

ХРИСТО ПАЧЕВ

ПЛАНИМЕТРИЯТА

В ПРИМЕРИ И ЗАДАЧИ

ПРЕДГОВОР

Целта на сборника е да предостави на учащите се богат материал за усвояване и задълбочаване на знанията им по планиметрия, а на преподавателите възможност за разнообразяване и подпомагане на работата им. Сборникът може да бъде използван за работа в часовете за задължително избираема и за свободно избираема подготовка в 9., 10., 11. и 12. клас, както и при подготовка за зрелостен и кандидатстудентски изпит.

В сборника са включени над 800 задачи, голяма част от които са подробно решени. Те са съобразени с учебните програми, с програмите за зрелостен изпит и с изискванията за кандидатстудентски изпит. Примерите и задачите са систематизирани по вид, съдържание, трудност и най-вече по отношение на методите за тяхното решаване. Структурата на главите и на параграфите е следната: решени типови задачи, даващи представа за използваните методи, и повече от достатъчен брой задачи за самостоятелно решаване, гарантиращи активното им усвояване.

При използването на сборника, преподавателят може да предпочете различна наредба на задачите в даден параграф или глава, като те се пренесат към друга група задачи, за да покаже и други начини за решаването им. Например, би могло глава 3. и особено глава 9. да се изучават по-рано.

Повечето от задачите са от кандидатстудентски изпити и дават възможност на читателя да се ориентира за степента на тяхната трудност. Тези, които са от най-авторитетните у нас ВУЗ са отбелязани. Голяма част от останалите задачи са от университети в Русия. Понякога условието умишлено е изменено. Пропуснати са полезните построятелни задачи, на които за съжаление се отделя все по-малко внимание в учебните програми и които от години не са давани на конкурсни и зрелостни изпити.

В сборника са използвани стандартните обозначения. С оглед краткост и яснота на условието бе въведено и означението $\triangle ABC$, което трябва да се чете като правоъгълен триъгълник с прав ъгъл при върха С.

Авторът изказва гореща благодарност на Издателство Лодос и лично на г-н Любомир Кръстев за идеята и съдействието при написването на тази книга и на г-н Иван Делев за голямото старание при редактирането ѝ.

- © Христо Сивков Пачев, автор, 2005
- © Христо Сергиев Йовев, корица, 2005
- © Издателство ЛОДОС, София, 2005

ISBN 954-9931-63-3

1. ПРАВОЪГЪЛЕН ТРИЪГЪЛНИК

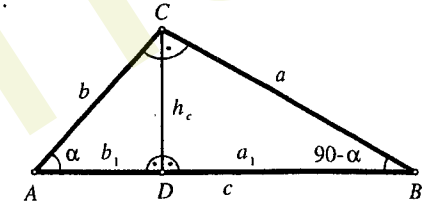
1.1. МЕТРИЧНИ ЗАВИСИМОСТИ В ПРАВОЪГЪЛЕН ТРИЪГЪЛНИК

Височината CD на правоъгълния триъгълник ABC през върха на правия ъгъл C , го разделя на два подобни триъгълника ACD и BCD , всеки от които е подобен на дадения. От това следва, че:

$$h_c^2 = a_1 b_1; \quad a^2 = a_1 c; \quad b^2 = b_1 c; \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{ch_c}{2} = mh_c = Rh_c = pr = p(p - c);$$

$$h_c = \frac{ab}{c}; \quad r = \frac{a + b - c}{2} = p - c.$$



1.1.1. $\triangle ABC$ е разделен от височината CD на два триъгълника BCD и ACD с полупериметри p_1 и p_2 . Намерете полупериметъра на $\triangle ABC$.

Решение: От подобие на трите триъгълника следва:

$$\frac{p_1}{AC} = \frac{p_2}{BC} = \frac{p}{AB} = k \quad \text{или} \quad p_1 = kAC, \quad p_2 = kBC, \quad p = kAB.$$

Тогава от $(kAB)^2 = (kAC)^2 + (kBC)^2$ следва $p^2 = p_1^2 + p_2^2$.

Тази връзка важи за всички съответни линейни елементи на трите триъгълника, например $r^2 = r_1^2 + r_2^2$.

1.1.2. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност с радиус r . Ако CD е височина, намерете разстоянието между центровете на вписаните в $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ окръжности. **Отг.** $r\sqrt{2}$.

1.1.3. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност с радиус r , а CD е височина. Периметрите на ACD и BCD са съответно P_1 и P_2 . Намерете лицето на $\triangle ABC$.

$$\text{Отг.} \quad \frac{r}{2} \sqrt{P_1^2 + P_2^2}.$$

1.1.4. Намерете височината към хипотенузата, ако тя разделя триъгълника на два триъгълника с радиуси на вписаните в тях окръжности r_1 и r_2 .

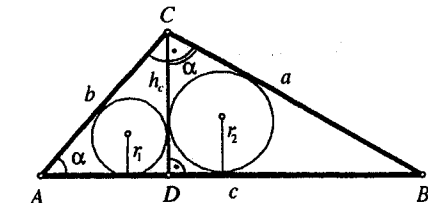
Решение: ABC , ACD и BCD са подобни и следователно $\frac{c}{r} = \frac{a}{r_2} = \frac{b}{r_1} = k$. Из-

разяваме по два начина лицето на $\triangle ABC$

$$\text{и получаваме: } S = pr = \frac{1}{2} ch_c,$$

$$\frac{1}{2} (kr + kr_1 + kr_2) = \frac{1}{2} kr \cdot h_c, \quad \text{т.е.}$$

$$h_c = r_1 + r_2 + r. \quad \text{От доказаното свойство в}$$



[1.1.1.] имаме, че $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, тогава $h_c = r_1 + r_2 + \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

1.1.5. Височината CD разделя $\triangle ABC$ на триъгълници ADC и CDB . Докажете, че в тези триъгълници:

- а) медианите AM и CN са перпендикулярни;
б) ъглополовящите AL и CP са перпендикулярни.

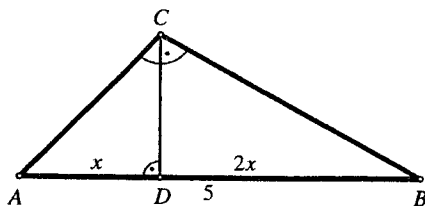
1.1.6. В $\triangle ABC$ през върха C е прекарана права вън от триъгълника, която пресича окръжностите с диаметри AB , BC и CA съответно в точки D , E и F . Докажете, че $S_{ABD} = S_{BCE} + S_{ACF}$.

1.1.7. В успоредника $ABCD$ $BD \perp AB$ и $BD = 6$. Ако $AC = 2\sqrt{22}$, намерете AD .
Отг. 7.

1.1.8. Намерете лицето на кръг, вписан в правоъгълен триъгълник, ако проекциите на катетите върху хипотенузата са 16 и 9.
Отг. 25π .

1.1.9. В правоъгълен трапец диагоналите са взаимноперпендикулярни, а основите се отнасят както $m : n$. Намерете отношението на диагоналите на трапеца.
Отг. $\sqrt{\frac{m}{n}}$ или $\sqrt{\frac{n}{m}}$.

1.1.10. В $\triangle ABC$ $AB = 5$, а CD е височина. Отношението на лицата на BCD и ACD е равно на 2. Намерете лицето на $\triangle ABC$.



Решение: $\frac{S_{ACD}}{S_{BCD}} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot h_c}{\frac{1}{2}BD \cdot h_c} = \frac{1}{2}$, т.е.

$2AD = DB$. Тогава $AD = \frac{5}{3}$ и $BD = \frac{10}{3}$.

Пресмятаме $h_c^2 = AD \cdot BD$, $h_c = \frac{5\sqrt{2}}{3}$. За ли-

цето получаваме $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5 \cdot 5\sqrt{2}}{3} = \frac{25\sqrt{2}}{6}$.

1.1.11. В $\triangle ABC$ CD е височина, а CM – медиана. Намерете отношението на големия катет към малкия, ако $CD : CM = 12 : 13$.
Отг. 3:2.

1.1.12. В $\triangle ABC$ CD е височина и $CD : AB = 2 : 5$. Намерете отношението на катетите.
Отг. 2 или $\frac{1}{2}$.

1.1.13. Точката D е вътрешна за $\triangle ABC$, като $S_{ADC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$, $S_{BCD} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Ако $AD = m$ и $BD = n$, намерете CD .

Решение: От $S_{ADC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$

или $\frac{1}{2}AC \cdot p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}AC \cdot BC$ намираме

$BC = 3p$. Аналогично от

$S_{BCD} = \frac{1}{4}S_{ABC}$ разбираме, че

$AC = 4q$. От $\triangle ADE$ $m^2 = p^2 + (3q)^2$,

а от $\triangle BDK$ имаме $n^2 = (2p)^2 + q^2$. Като решим тази система получаваме:

$p^2 = \frac{9n^2 - m^2}{35}$ и $q^2 = \frac{4m^2 - n^2}{35}$. Тогава $CD^2 = p^2 + q^2$ или $CD = \sqrt{\frac{3m^2 + 8n^2}{35}}$.

1.1.14. В $\triangle ABC$ с катети a и b е вписан квадрат, който има общ прав ъгъл с триъгълника. Намерете периметъра на квадрата.
Отг. $\frac{4ab}{a+b}$.

1.1.15. Лицето на $\triangle ABC$ е 100. Точката M от AB е на разстояния 4 и 8 от катетите му. Намерете катетите.
Отг. 40 и 5 или 10 и 20.

1.1.16. В $\triangle ABC$ CD е височина. Построени са перпендикулярите DE и DK към AC и BC . Ако $AE = m$, $BK = n$ и $AB = c$, докажете, че $\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{c^2}$.

Доказателство: Имаме $b_1 = \frac{b^2}{c}$, $a_1 = \frac{a^2}{c}$ и $CE = KD = b - m$, $CK = ED = a - n$.

От $\triangle ADE \sim \triangle DBK$ следва, че $\frac{b_1}{m} = \frac{a_1}{b-m}$ и

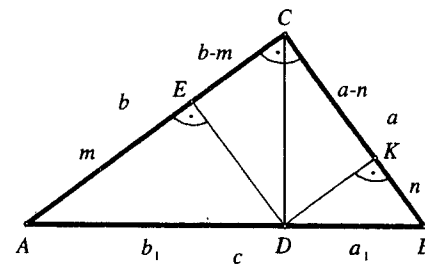
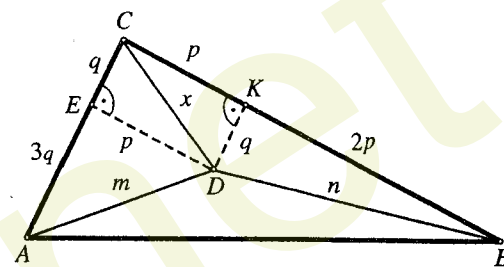
$\frac{b^2}{mc} = \frac{a^2}{c(b-m)}$, т.е. $m = \frac{b^3}{a^2 + b^2} = \frac{b^3}{c^2}$.

Аналогично $n = \frac{a^3}{c^2}$. Тогава

$m^{\frac{2}{3}} + n^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{b^3}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{a^3}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{a^2 + b^2}{c^{\frac{4}{3}}} = \frac{c^2}{c^{\frac{4}{3}}} = c^{\frac{2}{3}}$.

1.1.17. От върха на тъпия ъгъл на ромб са спуснати перпендикуляри към страните, неминаващи през този връх. Всеки от тях е дълъг h , а разстоянието между петите им е p . Намерете лицето на ромба.
Отг. $\frac{2h^4}{p\sqrt{4h^2 - p^2}}$.

1.1.18. Страната на квадрата $ABCD$ е a , а E и F са средите на AD и BC . Точката K лежи върху CF , а N върху AB . EF и KN се пресичат в точка M . Намерете лицето на $\triangle KFM$, ако $CK : KF = 1 : 5$, а лицето на трапеца $EMNA$ е $3/10$ от лицето на квадрата.
Отг. $5a^2/96$.



1.1.19. В квадрат с лице 18 е вписан правоъгълник така, че върху всяка страна на квадрата лежи по един връх на правоъгълника. Дължините на страните на правоъгълника се отнасят както 1:3. Намерете лицето му. **Отг.** 8.

1.1.20. Върховете на квадрата $MNPQ$ лежат на страните на квадрата $ABCD$. Ако отношението на лицата им е p , намерете отношението на отсечките, на които M, N, P и Q разделят страните на $ABCD$. **Отг.** $\frac{p + \sqrt{2p-1}}{1-p}$.

1.1.21. В ромб с диагонали a и $a\sqrt{3}$ е вписана окръжност. Намерете лицето на четириъгълника с върхове допирните точки на окръжността със страните на ромба. **Отг.** $3\sqrt{3}a^2/16$.

1.1.22. В $\triangle ABC$ $AB = 25$. CD е височина и служи за диаметър на окръжност, която дели всеки катет на две части. Ако $CD = 12$, намерете тези части. **Отг.** $27/5, 48/5, 36/5, 64/5$.

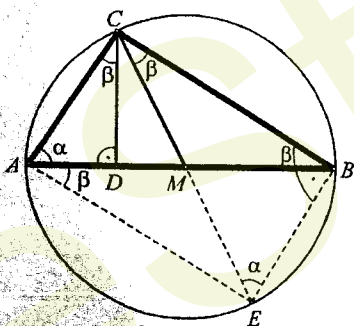
1.1.23. В $\triangle ABC$ CC_1 е височина. C' е симетрична на C относно AB и $CC_1:AC_1 = 4:3$. В $\triangle CC'B$ е вписана окръжност с център O , която се допира до BC в F . Ако лицето на OFB е 9, определете S_{ABC} . **Отг.** $225/4$.

1.2. МЕДИАНИ. РАДИУС НА ОПИСАНА ОКРЪЖНОСТ

Медианата към хипотенузата на $\triangle ABC$ е равна на половината от хипотенузата и на радиуса на описаната окръжност ($m_c = \frac{c}{2} = R$). Тя го разделя на два равнобедрени триъгълника.

1.2.1. За произволен $\triangle ABC$ докажете, че:

а) ако $m_c < \frac{c}{2}$, то $\gamma > 90^\circ$; б) ако $m_c > \frac{c}{2}$, то $\gamma < 90^\circ$.



1.2.2. Докажете, че ако ъгълът, който височината CD в $\triangle ABC$ сключва с CA е равен на ъгъла, който медианата CM сключва с CB , то $\triangle ABC$ е правоъгълен.

Решение: Продължаваме медианата CM до пресичането ѝ с описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точката E . $\angle CAB = \angle CEB = \frac{1}{2}\widehat{BC} = \alpha$, като вписани. По условие $\angle ACD = \angle BCM = \beta$, но $\alpha + \beta = 90^\circ$, т.е. $\angle CBE = 90^\circ$. Триъгълниците

$\triangle AME$ и $\triangle BMC$ са еднакви и следователно $CM = ME$, т.е. четириъгълникът $ACBE$ е успоредник. Но $\angle CBE$ е прав, $ACBE$ е правоъгълник, т.е. $\triangle ABC$ е правоъгълен.

1.2.3. $\triangle ABC$ е вписан в окръжност с $R = 10$. Намерете AC и BC , ако AC е два пъти по-близо до центъра от BC . **Отг.** $4\sqrt{5}; 8\sqrt{5}$.

1.2.4. Периметърът на $\triangle ABC$ е 70, а радиусът на описаната окръжност е 14,5. Намерете лицето на триъгълника. **Отг.** 210.

1.2.5. В $\triangle ABC$ CM е медианата и го разделя на два триъгълника с периметри P_1 и P_2 . Намерете AC и BC . **Отг.** $\sqrt{2P_1P_2 - P_1}, \sqrt{2P_1P_2 - P_2}$.

1.2.6. В $\triangle ABC$ $\angle B = 30^\circ$, а CM е медиана. Намерете лицето на $\triangle BCM$, ако $AC = 4$. **Отг.** $4\sqrt{3}$.

1.2.7. В $\triangle ABC$ $AC + BC = 14$, а радиусът на описаната окръжност е 5. Намерете лицето на кръга, вписан в ABC . **Отг.** 4π .

1.2.8. В $\triangle ABC$ CM и AK са медиани. Ако $CM = 5$, $AK = 2\sqrt{13}$ намерете страните на ABC , лицето му и лицето на вписания в ABC кръг.

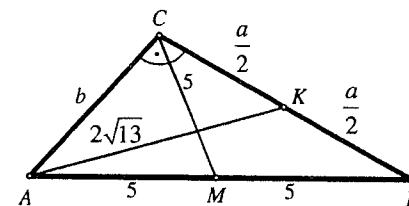
Решение: $CM = MA = MB = 5$. От

$$\triangle ACK \left(2\sqrt{13}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \text{ а от } \triangle ABC$$

$10^2 = a^2 + b^2$. Като решим тази система получаваме $a = 8$ и $b = 6$. Тогава

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24 \text{ и } r = \frac{a+b-c}{2} = 2.$$

Лицето на вписания кръг е $S = \pi r^2 = 4\pi$.



1.2.9. (ВУЗ) В $\triangle ABC$ $m_a = \sqrt{95}$ и $m_b = \sqrt{150}$. Намерете AB . **Отг.** 14.

1.2.10. Във вътрешността на $\triangle ABC$ е взета точка O , такава че $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ и $\triangle COA$ са равнолицеви. Намерете OC , ако $OA^2 + OB^2 = m^2$. **Отг.** $m/\sqrt{5}$.

1.2.11. В $\triangle ABC$ $AC = 3$, $BC = 4$. Ако M е среда на AB , намерете разстоянието между центровете на вписаните в ACM и BCM окръжности.

Решение: AMC и BMC са равнобедрени и ъглополовящите им ME и MD са още и височини, и медиани, а $MDCE$ е правоъгълник ($\angle DME = 90^\circ$), т.е.

$$O_1O_2 = \sqrt{O_1M^2 + O_2M^2}. \text{ Намираме}$$

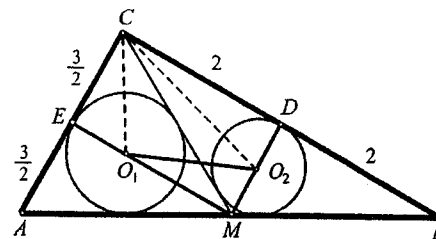
$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad CM = \frac{5}{2},$$

$$CD = EM = 2 \text{ и } EC = MD = \frac{3}{2}. \text{ От свой-$$

ство на ъглополовящата CO_1 в $\triangle CEM$:

$$\frac{O_1M}{O_1E} = \frac{CM}{CE} = \frac{5}{3}, \text{ следва } O_1M = \frac{5}{4}. \text{ Ана-$$

$$\text{логично от } \triangle CMD: O_2M = \frac{5}{6}. \text{ Пресмятаме } O_1O_2 = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{5\sqrt{13}}{12}.$$



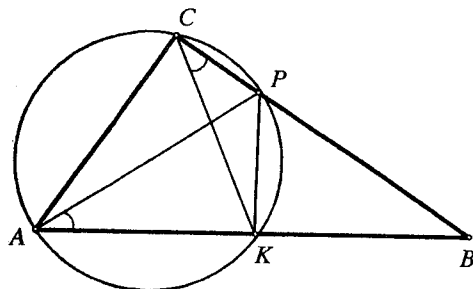
1.2.12. $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ имат обща хипотенуза $AB = 5$. C и D са разположени от различни страни на правата AB , като $BC = BD = 3$. E лежи на AC и $EC = 1$. F лежи на AD и $FD = 2$. Намерете лицето на $DBCEF$. Отг. 228/5.

1.2.13. Страните на правоъгълник са равни на a и b . Построена е окръжност с диаметър страната a . Намерете дължините на отсечките, на които тя разделя диагоналите. Отг. $\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

1.2.14. В окръжност с радиус 5 е вписан четириъгълник $ABCD$, в който $\angle D = 90^\circ$ и $AB : BC = 3 : 4$. Намерете периметъра на $ABCD$, ако лицето му е 44. Отг. $14 + 6\sqrt{5}$.

1.2.15. На хипотенузата AB на $\triangle ABC$ е построен квадрат $ABMN$ така, че той и триъгълникът са в различни полуравнини относно AB . Докажете, че ако S е центърът на $ABMN$, то CS е ъглополовяща на $\angle ACB$.

1.2.16. Даден е $\triangle ABC$. През P , лежаща на BC , е спуснат перпендикуляр PK към AB . Докажете, че $\angle PAK = \angle PCK$.

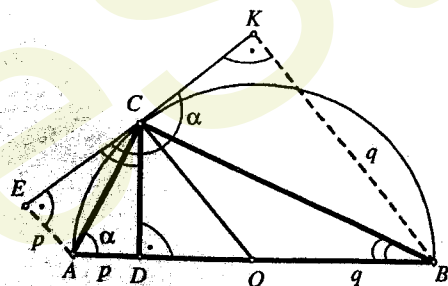


Решение: По условие $\angle ACB = \angle PKA = 90^\circ$ и следователно около $AKPC$ може да се опише окръжност с диаметър AP .

$$\text{Тогава } \angle PAK = \angle PCK = \frac{\widehat{PK}}{2}.$$

1.2.17. Окръжност се допира до единия катет на равнобедрен правоъгълен триъгълник и минава през върха на срещуположния остър ъгъл. Центърът на окръжността лежи върху хипотенузата AB на триъгълника. Намерете радиуса на окръжността, ако $AB = c$. Отг. $c(\sqrt{2}-1)$.

1.2.18. Разстоянията от A и B до допирателната в точка C към описаната около $\triangle ABC$ окръжност са p и q . Намерете катетите.



Решение: $\angle CAB$ (вписан) = $\angle KCB$ (периферен) = $\frac{\widehat{CB}}{2} = \alpha$.

$\angle BCD = \angle CAB$ и следователно $\triangle BCK \cong \triangle BCD$, т.е. $BD = BK = q$. Аналогично $\triangle AEC \cong \triangle ADC$ $AD = AE = p$. $CD^2 = DA \cdot DB$ или $CD = \sqrt{pq}$.

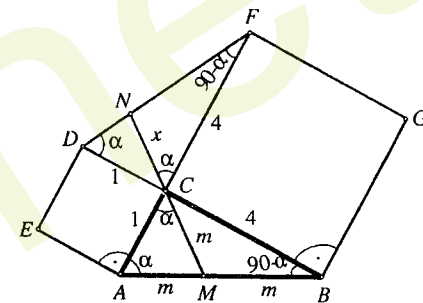
Намираме $BC = \sqrt{q^2 + pq}$ и $AC = \sqrt{p^2 + pq}$.

1.2.19. Извън $\triangle ABC$ върху AC и BC са построени квадратите $ACDE$ и $BCFG$. Продължението на медианата CM на $\triangle ABC$ пресича DF в точка N . Намерете CN , ако $AC = 1$, $BC = 4$.

Решение: Правоъгълните триъгълници ABC и DCF са еднакви и следователно $\angle CDF = \alpha$, а $\angle CFD = 90^\circ - \alpha$.

От друга страна върхните ъгли ACM и FCN са равни на α . Тогава $\angle FNC = 90^\circ$, т.е. CN е височина на $\triangle FCD$,

$$CN = \frac{1.4}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$



1.2.20. Върху страните на $\triangle ABC$ с катети a и b външно са построени квадрати. Точките D, E, F са центровете на тези квадрати (D е на най-големия квадрат). Докажете, че:

а) правата EF минава през C ; б) EF е перпендикулярна на CD ;

в) $EF = CD$; г) лицето на EFD е $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

1.3. ЪГЛОПОЛОВЯЩИ В ПРАВОЪГЪЛЕН ТРИЪГЪЛНИК

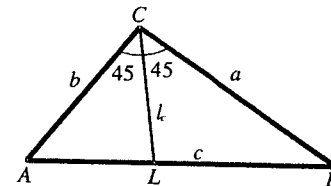
1.3.1. Даден е правоъгълен триъгълник с катети a и b . Намерете ъглополовящата на правия му ъгъл.

Решение: $S_{ACL} + S_{BCL} = S_{ABC}$;

$$\frac{1}{2}bl_c \sin 45^\circ + \frac{1}{2}al_c \sin 45^\circ = \frac{1}{2}ab;$$

$$l_c \sin 45^\circ (b+a) = ab;$$

$$l_c = \frac{ab}{\sin 45^\circ (a+b)} = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$



1.3.2. В $\triangle ABC$ CL е ъглополовяща. От върха A ($A > 45^\circ$) е спуснат перпендикуляр AN към CL ($N \in CL$). Намерете S_{ABC} , ако $AN = p$ и $CL = q$.

$$\text{Отг. } \frac{p^2 q}{2p-q}.$$

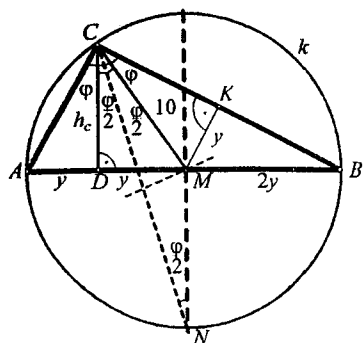
1.3.3. В $\triangle ABC$ CL е ъглополовяща. Намерете височината CD , ако $AL = p$ и $BL = q$.

$$\text{Отг. } \frac{pq(p+q)}{p^2+q^2}.$$

1.3.4. В $\triangle ABC$ е построена ъглополовящата CL , а LM и LN са съответно височини в $\triangle ALC$ и $\triangle BLC$. Намерете AC , ако $AM = 4$ и $BN = 9$.

Отг. 10.

1.3.5. Намерете страните на $\triangle ABC$, ако медианата CM и височината CD разделят $\angle ACB$ на три равни части и $CM = 10$.



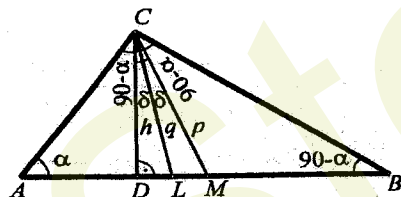
Решение: В $\triangle AMC$ височината CD е и ъглополовяща и следователно той е равнобедрен, т.е. $CA = CM = 10$.

I начин: Построяваме описаната около $\triangle ABC$ окръжност k и симетралата MN на страната AB . Тъй като N е среда на дъгата AB , то CN е ъглополовяща на $\angle ACB$ и $\angle DCN = \angle MCN = \frac{\varphi}{2}$. $\angle DCN = \angle MNC = \frac{\varphi}{2}$ като кръстни ъгли. Тогава CMN е равнобедрен и симетралата на CN минава през точка M . AB и CN

са хорди в k , а симетралите им се пресичат в M . Следователно M е центърът на k . Тогава AB е диаметър и $\angle ACB$ е 90° . $BC^2 = AB^2 - AC^2$ или $BC = \sqrt{400 - 100} = 10\sqrt{3}$.

II начин: Построяваме $CK = CD = h_c$. Тогава триъгълниците ADC , MDC и MKC са еднакви и $AD = MD = MK = y$ и $\angle CKM = 90^\circ$. Но $MA = MB = 2y$ и следователно $\angle MBK$ е равен на 30° , $\angle BMK = 60^\circ$, а $\angle KMA = 120^\circ$. От еднаквостта на триъгълниците следва, че $\angle KMC = \angle AMC = 60^\circ$. $\triangle AMC$ е равнобедрен с ъгъл от 60° , т.е. равнобедрен. Разбираме, че $\angle BAC = 60^\circ$ и $\angle ACB = 90^\circ$.

1.3.6. В $\triangle ABC$ медианата $CM = p$, а ъглополовящата $CL = q$. Намерете S_{ABC} .



Решение: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = CM \cdot CD = ph$.

Докажете сами, че $\angle DCL = \angle MCL$. Означаваме $\angle DCL = \delta$. Тогава $h = q \cos \delta$ и от $\frac{h}{p} = \cos 2\delta = \cos^2 \delta - 1$ получаваме $\frac{q \cos \delta}{p} = 2 \cos^2 \delta - 1$ или $2p \cos^2 \delta - q \cos \delta - p = 0$, но

δ е остър, т.е. $\cos \delta > 0$. Намираме $\cos \delta = \frac{q + \sqrt{q^2 + 8pq}}{4p}$. Сега

$$h = \frac{q}{4p} (q + \sqrt{q^2 + 8pq}) \text{ и } S = \frac{pq}{4p} (q + \sqrt{q^2 + 8pq}).$$

1.3.7. В $\triangle ABC$ $h_c = 3$, $l_c = 4$. Намерете S_{ABC} .

Отг. 72.

1.3.8. Даден е $\triangle ABC$ с $BC = a$ и $AC = b$ ($a > b$). Продълженията на ъглополовящата CL и медианата CM пресичат описаната около триъгълника окръж-

ност в точки P и Q , а правата PQ пресича продълженията на CA и CB съответно в точки D и E . Намерете лицето на $\triangle CDE$. Отг. $(a+b)^2/2$.

1.3.9. В $\triangle ABC$ AD е ъглополовяща. Окръжност с радиус $\sqrt{15}$ минава през точките A , C , D и пресича AB в точка E така, че $AE:AB = 3:5$. Намерете лицето на $\triangle ABC$.

Решение: Означаваме $AE = 3x$ и $EB = 2x$. Правоъгълните триъгълници ADE и ADC са еднакви и тогава $AC = AE = 3x$.

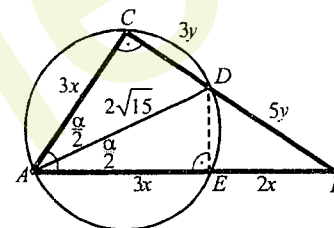
От свойството на ъглополовящата AD следва, че $\frac{DC}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$, т.е. $DC = 3y$; $DB = 5y$.

От формулата за ъглополовяща имаме:

$$AD^2 = AB \cdot AC - DB \cdot DC \text{ и от } (2\sqrt{15})^2 = 5x \cdot 3x - 5y \cdot 3y \text{ получаваме } x^2 = y^2 + 4.$$

От $\triangle ABC$ намираме $(5x)^2 = (3x)^2 + (8y)^2$ или $x = 2y$.

$$\text{Тогава } (2y)^2 = y^2 + 4 \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{3}}, x = \frac{4}{\sqrt{3}}. \text{ Пресмятаме } S = \frac{3x \cdot 8y}{2} = \frac{12 \cdot 16}{3 \cdot 2} = 32.$$



1.3.10. Даден е $\triangle ABC$ с ъглополовяща BK . С диаметър BK е построена окръжност, която пресича AB в точка M . Ако $BM:AM = m$, намерете в какво отношение се дели AB от петата на височината към нея. Отг. $\frac{2m+1}{m^2}$.

1.3.11. В $\triangle ABC$ AE и BD са ъглополовящи. През D и E са построени перпендикуляри DP и EQ към AB . Намерете $\angle PCQ$. Отг. 45° .

1.3.12. (ТУ) В $\triangle ABC$ CL е ъглополовяща, а точка M е средата на BC . Ако $AC = b$ и $BC = a$:

- изразете отсечката LM чрез a и b ;
- определете вида на $\triangle LMC$ и намерете $\angle LMC$, ако $a = 3b$.

Решение: а) Знаем, че $CL = \frac{\sqrt{2ab}}{a+b}$.

По косинусова теорема:

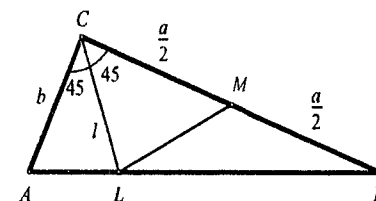
$$LM^2 = CL^2 + CM^2 - 2CL \cdot CM \cos 45^\circ, \text{ заместваме и получаваме:}$$

$$LM^2 = \frac{2a^2b^2}{(a+b)^2} + \frac{a^2}{4} - 2 \frac{\sqrt{2ab}}{a+b} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ След преобразувания достигаме до}$$

$$LM = \frac{a}{2(a+b)} \sqrt{5b^2 - 2ab + a^2}.$$

б) По условие $a = 3b$. Тогава $CL = \frac{\sqrt{2 \cdot 3b \cdot b}}{3b+b} = \frac{3\sqrt{2}}{4}b$ и

$$LM = \frac{3b}{2(3b+b)} \sqrt{5b^2 - 2 \cdot 3b \cdot b + (3b)^2} = \frac{3}{8} \sqrt{8b^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}b = LC.$$



Следователно $\triangle LMC$ е равнобедрен с ъгъл 45° и $\angle LMC = 90^\circ$.

1.3.13. В $\triangle ABC$ медианата AM и ъглополовящата BL се пресичат в точка O . Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако $BO = 9$ и $OL = 5$.
Отг. 1323/20.

1.3.14. В $\triangle ABC$ $AB=20$, $AC=16$. Намерете разстоянието от C до ъглополовящата на ъгъл B .
Отг. $12/\sqrt{5}$.

1.4. ВПИСАНА ОКРЪЖНОСТ

1.4.1. Докажете, че ако:

а) триъгълникът ABC е правоъгълен с хипотенуза AB и център J на вписаната окръжност, то $\angle AJB = 135^\circ$;

б) J е център на окръжността, вписана в $\triangle ABC$ и $\angle AJB = 135^\circ$, то триъгълникът е правоъгълен с хипотенуза AB .

1.4.2. Докажете, че ако $\triangle ABC$ е правоъгълен ($\angle C = 90^\circ$) то:

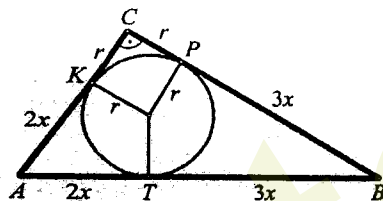
а) $a + b - c = 2r$; б) $a + b = 2(R + r)$;

в) $p = 2R + r$; г) $p - c = r$.

1.4.3. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност с $r = 2$. Ако $AB = 7$ намерете периметъра на триъгълника.
Отг. 18.

1.4.4. В $\triangle ABC$ CD е височина. Ако $AD = 9$, $BD = 16$ намерете радиуса на вписаната окръжност.
Отг. 5.

1.4.5. В $\triangle ABC$ с периметър 36 е вписана окръжност, която се допира до AB в точка T . Намерете AB , ако $AT:TB = 2:3$.



Решение: Означаваме $AT = 2x = AK$ и $TB = 3x = BP$, $CK = CP = r$. Знаем, че $r = p - c = 18 - 5x$.

От $\triangle ABC$ имаме: $(5x)^2 = (2x + r)^2 + (3x + r)^2$.

Заместваме r с $18 - 5x$ и достигаме до $x^2 + 15x - 54 = 0$ с положителен корен $x = 3$.

Тогава $AB = 15$.

1.4.6. Единият от катетите на $\triangle ABC$ е 15, а проекцията на другия катет върху хипотенузата е 16. Намерете радиуса на вписаната окръжност.
Отг. 5.

1.4.7. Лицето на правоъгълен триъгълник е равно на S , а радиусът на описаната около триъгълника окръжност е R . Намерете радиуса на вписаната окръжност.
Отг. $r = \sqrt{R^2 + S} - R$.

1.4.8. В $\triangle ABC$ $AB = 20$, $r = 4$. Намерете $AC + BC$.
Отг. 28.

1.4.9. В $\triangle ABC$ $AB = m$, а вписаната окръжност има радиус r . Намерете AC , BC и допустимите стойности на r .

Отг. $\frac{1}{2}(2r + m \pm \sqrt{m^2 - 4r^2 - 4mr})$; $r \leq \frac{m(\sqrt{2} - 1)}{2}$.

1.4.10. В $\triangle ABC$ $R = 15$, $r = 6$. Намерете AC и BC .
Отг. 24, 18.

1.4.11. В $\triangle ABC$ разстоянията от центъра J на вписаната окръжност до върховете A и B са $\sqrt{5}$ и $\sqrt{10}$. Намерете лицето на триъгълника.

Решение:

$\angle AJB = 180^\circ - \left(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}\right) = 135^\circ$. Пресмята-

ме $AB^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2\sqrt{5}\sqrt{10}\cos 135^\circ$,

т.е. $AB = 5$. Означаваме $AT = AK = x$ и от

$\triangle ATJ$ имаме: $r^2 = (\sqrt{5})^2 - x^2$, а от $\triangle BTJ$ полу-

чаваме: $r^2 = (\sqrt{10})^2 - (5 - x)^2$. Тази система има за решение $x = 2$ и $r = 1$. Тогава

$AC = 3$, $BC = 4$ и $S = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

1.4.12. В $\triangle ABC$ вписаната окръжност се допира до AB в точка T . Ако $AT = 2$, $BT = 3$, намерете радиуса на тази окръжност.
Отг. 1.

1.4.13. В $\triangle ABC$ O е център на описаната, а J – на вписаната окръжност. Ако $\angle OCJ = 20^\circ$, намерете $\angle CAB$.
Отг. 65° .

1.4.14. В $\triangle ABC$ $\angle CAB = \alpha$, а разстоянието от B до центъра на вписаната окръжност е m . Намерете лицето на триъгълника.

Отг. $\frac{m^2}{2} \cos \alpha \cdot \cotg \frac{\alpha}{2}$.

1.4.15. В $\triangle ABC$ CD е височина, а $\angle CAB = 30^\circ$. Намерете разстоянието между центровете на вписаните в $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ окръжности, ако $BC = 1$.
Отг. $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/2$.

1.4.16. Лицето на $\triangle ABC$ е 30, J е център на вписаната окръжност и лицето на $\triangle AJB$ е 13. Намерете страните на $\triangle ABC$.

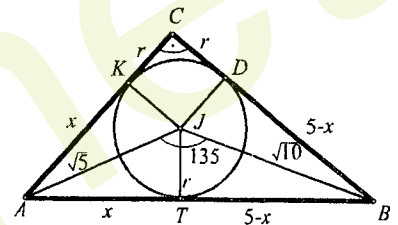
Решение: Знаем, че $S = \frac{a+b+c}{2}r = \frac{a+b}{2}r + \frac{cr}{2} = 30$ и $S_{AJB} = \frac{cr}{2} = 13$. От

тези равенства получаваме $\frac{a+b}{2}r = 17$ и $r = \frac{26}{c}$ или $r = \frac{34}{a+b} = \frac{26}{c}$, т.е.

$17c = 13(a+b)$. Като вдигнем на квадрат и използваме, че $ab = 60$ достигаме до $289c^2 = 169(c^2 + 120)$, т.е. $c = 13$ и следователно $r = 2$.

От $a+b=17$ и $ab=60$ намираме $a=12$ и $b=5$ или $b=12$, $a=5$.

1.4.17. В $\triangle ABC$ ъглополовящата $BL = \frac{8\sqrt{10}}{3}$. Центърът на вписаната окръжност я дели в отношение 3 : 1 считано от върха. Намерете S_{ABC} .



The diagram shows a triangle \$ABC\$ with an inscribed circle centered at \$J\$. The circle is tangent to side \$AC\$ at \$L\$, side \$BC\$ at \$T\$, and side \$AB\$ at \$K\$. Dashed lines represent radii \$r\$ from \$J\$ to each point of tangency. Solid lines show segments \$z\$ (\$AL = BK\$) and \$x\$ (\$LC = KT\$). The full side lengths are indicated as \$3r\$ (\$AC = BC\$) and \$3x\$ (\$AB\$).

От ΔBJT имаме $JB^2 = (3r)^2 + r^2$ или $r = 2$ и

От $\triangle ABC$ имаме $(r+z)^2 + (4r)^2 = (z+3r)^2$,

но $r=2$ или $(2+z)^2 + 8^2 = (z+6)^2$, т.е. $z=4$
и $AC=6$, $S=24$.

Решение: Означаваме
 $AK = AE = R_c - b$ и $BT = BE = R_c - a$
 $AB = c = R_c - b + R_c - a$ или
 $c = 2R_c - (a + b)$, т.е. $p = R_c$, но $p - c = r$.
 Тогава $c = R_c - r$.

а) Намерете радиусите r и r_a .

Отг. а) $r = 1, r_a = 2$; б) $JJ_a = \sqrt{10}$; $S = 5/2$.

а) Намерете лицето на четириъгълника JT_1J_cT .

Отг. а) $\frac{1}{2}c^2 \cos 2\alpha$; **б)** $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}$.

Отг. $3\sqrt{5}/2$.

Решение: Централата OO_1 на двете допиращи се окръжности минава през върха C . От $\triangle CKO_1$ $O_1K = \sqrt{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}} = 1$.

 $CD = \frac{3}{2}$, а $BC = 3$. Търсеното лице е $S = 9$.

Отг. $\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{(a+b)^2}$.

Отг. 144.

Отг. 1.

Отг. 30, 40.

а) лицето на ромба $ABCD$ като функция на x ;

Отг. а) $4(-x^2 + ax)$; б) a^2 .

Отг. 3:4.

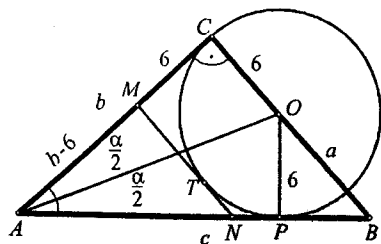
Отг. 4.

1.4.31. (УНСС) В $\triangle ABC$ е вписана полуокръжност, така че центърът ѝ лежи на хипотенузата и я дели на отсечки с дължини 3 и 4. Намерете:

а) дължината на дъгата на полуокръжността, заключена между допирните точки с катетите;

б) лицето на правоъгълния триъгълник. **Отг.** а) $6\pi/5$; б) $294/25$.

1.4.32. $\triangle ABC$ има периметър 54, като $AC > 10$. Окръжност с радиус 6, чийто център лежи на BC се допира до AB и AC . Намерете S_{ABC} .



Решение: Построяваме отсечката MN , която е успоредна на BC и се допира до дадената окръжност. $P_{AMN} = AM + AN + MN = AM + AN + MT + NT$.

$$P_{AMN} = AM + AN + MC + NP = AC + AP = 2b.$$

От $\triangle AMN \sim \triangle ACB$ следва, че $\frac{AM}{AC} = \frac{P_{AMN}}{P_{ACB}}$,

$$\frac{b-6}{b} = \frac{2b}{54} \text{ или } b^2 - 27b + 162 = 0. \text{ Получаваме}$$

$$b_1 = 18; b_2 = 9 < 10. \text{ Пресмятаме } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{OP}{AP} = \frac{OP}{AC} = \frac{1}{3}, \text{ тогава } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \text{ и}$$

$$\text{намираме } a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = 18 \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{2}. \text{ Лицето е } S = \frac{ab}{2} = \frac{243}{2}.$$

1.4.33. В правоъгълника $ABCD$ $AB = 12$ и $AD = 5$. Диагоналите му се пресичат в точка E , а центровете и радиусите на вписаните окръжности в $\triangle ABE$ и $\triangle BCE$ са O_1, r_1 и O_2, r_2 .

а) Докажете, че $\frac{r_1}{r_2} = \frac{P_{BCE}}{P_{ABE}}$; б) намерете отношението $\frac{O_1E}{O_2E}$. **Отг.** б) $3:10$.

1.4.34. В $\triangle ABC$ $AB = 125$, $AC = 75$ и CD е височина. Окръжност с диаметър AD пресича AC в точка M . Намерете AM . **Отг.** 27.

1.4.35. В $\triangle ABC$ $AC = 4$ и $BC = 3$, а CL е ъглополовяща. Точките O_1 и O_2 са центрове на описаните около триъгълниците ACL и BCL окръжности.

а) Намерете O_1O_2 ;

б) Докажете, че най-голямата стойност на функцията $f(x) = x^2 - 2x + \frac{25}{98}$ в интервала $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ е равна на $\frac{S_{O_1O_2}}{S_{ABC}}$.

$$\text{Отг. а) } \frac{25\sqrt{2}}{14}.$$

1.5. ЗАДАЧИ С ИЗПОЛЗВАНЕ НА ТРИГОНОМЕТРИЯ

1.5.1. В $\triangle ABC$ $BC = 36$, а косинусът на ъгъла BAC е равен на $8/17$. Намерете AC и лицето на триъгълника. **Отг.** $96/5, 1728/5$.

1.5.2. В $\triangle ABC$ е вписан квадрат $MNPQ$, като M и N лежат на AB , P – на

BC , а Q – на AC . Ако $AB:MN = 13:3$ намерете $\operatorname{tg} \alpha$.

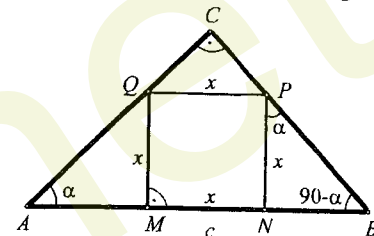
Решение: Означаваме MN с x . $AB = AM + MN + NB = x \cot \alpha + x + x \operatorname{tg} \alpha$.

$$\text{Получаваме } \frac{AB}{x} = \frac{x \cot \alpha + x + x \operatorname{tg} \alpha}{x} = \frac{13}{3}$$

$$\text{или } \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + 1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{13}{3}.$$

Решения на това уравнение са $\operatorname{tg} \alpha = 3$

$$\text{и } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}.$$



1.5.3. В $\triangle ABC$ на BC са избрани точките D и E така, че AD и AE делят $\angle BAC$ на три равни части (E е между D и C) и $AD = m$, $AE = p$. Намерете отношението на лицата на триъгълниците ADC и AEC .

$$\text{Отг. } \frac{p + \sqrt{p^2 + 8m^2}}{2p}.$$

1.5.4. Ако страните на $\triangle ABC$ образуват геометрична прогресия, намерете синусите на острите ъгли. **Отг.** $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; $\sin \beta = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{2}$.

1.5.5. В $\triangle ABC$ $AB = c$, а ъглополовящата на един от острите ъгли е $\frac{c\sqrt{3}}{3}$. Намерете катетите.

Решение: Ъглите на $\triangle ABL$ са: $\frac{\alpha}{2}$, $90^\circ - \alpha$

и $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$. По синусова теорема за $\triangle ABL$ има-

$$\text{ме: } \frac{\sin\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{AB}{AL} \text{ или } \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} = \sqrt{3}.$$

Получаваме $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{3} \left(2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1\right)$ и полагаме $\cos \frac{\alpha}{2} = y > 0$. Положителният

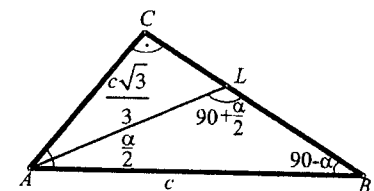
корен на $2\sqrt{3}y^2 - y - \sqrt{3} = 0$ е $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогава $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = 60^\circ$, $AC = \frac{c}{2}$ и

$$BC = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

1.5.6. Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако $AB = a$, а ъглополовящата $AL = l$.

$$\text{Отг. } \frac{a^3 \sqrt{l^2 - a^2}}{2a^2 - l^2}.$$

1.5.7. В $\triangle ABC$ височината $CD = 9$ и разполовява ъглополовящата AL . Намерете лицето на триъгълника. **Отг.** $54\sqrt{3}$.



1.5.8. В окръжност е вписан четириъгълник $ABCD$ с перпендикулярни диагонали, пресичащи се в точка E . През E минава права, перпендикулярна на AB и пресичаща CD в точка M .

а) Докажете, че EM е медиана в CDE .

б) Намерете EM , ако $AD = a$, $AB = b$ и $\angle BDC = \alpha$.

Отг. б) $\frac{\sqrt{a^2 - b^2 \cos^2 \alpha}}{2 \cos \alpha}$.

1.5.9. В $\triangle ABC$ $\frac{R}{r} = \sqrt{3} + 1$. Намерете ъглите на триъгълника.

Решение: По условие $\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, но $R = \frac{c}{2}$, $r = \frac{a + b - c}{2}$ или

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}, \text{ т.е. } \sin \alpha + \cos \alpha - 1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \text{ или } \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Като повдигнем на квадрат и преобразуваме получаваме $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тогава $2\alpha = 60^\circ$ или $2\alpha = 120^\circ$, $\alpha = 30^\circ$ или $\alpha = 60^\circ$.

1.5.10. В $\triangle ABC$ $\angle CAB = \alpha$. Намерете отношението $\frac{R}{r}$. При кое α това отношение е най-голямо?

Отг. $\sin \alpha - \cos \alpha - 1$; 45° .

1.5.11. Хипотенузата на правоъгълен триъгълник се дели от допирната точка на вписаната му окръжност на отсечки, чието отношение е равно на k .

Намерете $\operatorname{tg} \alpha$.

Отг. $\frac{2k(\sqrt{k^2 + 6k + 1} - k - 1)}{k^2 - 4k - 1 + (k + 1)\sqrt{k^2 + 6k + 1}}$.

1.5.12. В $\triangle ABC$ $BC > AC$. $h_c : c = 6 : 13$. Точките M и N са вътрешни за AB , като $4AM = AB$ и $3BN = AB$.

а) Намерете $BC : AC$. б) Докажете, че $\angle MCN = 45^\circ$.

Отг. а) $3 : 2$.

1.5.13. В $\triangle ABC$ AM е медиана, а AL – ъглополовяща. Ако $\operatorname{tg} \alpha = 4/3$, намерете тангенса на ъгъла между AM и AL .

Отг. $1/8$.

1.5.14. (ТУ) Ако отношението на лицето на $\triangle ABC$ към лицето на вписания в него кръг е $\frac{2\sqrt{3} + 3}{\pi}$, намерете ъглите на триъгълника.

Отг. $30^\circ, 60^\circ$.

1.5.15. Даден е $\triangle ABC$ с $\angle CAB = \alpha$ ($\alpha > 45^\circ$) и височина $CH = h$. Окръжност с диаметър ъглополовящата CD пресича AC и AB в точките M и P .

а) Намерете лицето и периметъра на ABC .

б) Намерете страните и лицето на PDM .

Решение: а) Изразяваме $b = \frac{h}{\sin \alpha}$,

$$a = \frac{h}{\cos \alpha}, \quad c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{h}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Тогава

$$P = a + b + c = h \frac{1 + \sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\text{и } S = \frac{1}{2} ab = \frac{h^2}{\sin 2\alpha}.$$

б) $\angle CPD$ и $\angle DMC$ са прави, защото CD е диаметър, т.е. $MDNC$ е квадрат.

По формулата за ъглополовящата CD имаме: $CD = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$, но CD е диагонал в

$MDNC$, тогава $MD = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{ab}{a+b}$. Заместваме a и b с техните равни и получаваме

$$MD = \frac{h}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{h\sqrt{2}}{2 \cos(\alpha - 45^\circ)}.$$

$\angle PDM = \angle PCM = 90^\circ - \alpha$ (вписани), аналогично $\angle PMD = \angle PCD = \alpha - 45^\circ$.

По синусова теорема имаме:

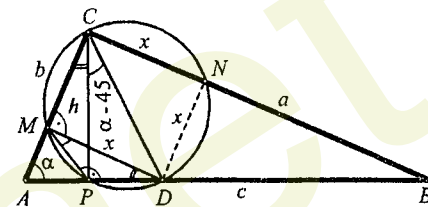
$$PD = \frac{MD}{\sin 135^\circ} \sin(\alpha - 45^\circ) = h \operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ), \quad PM = \frac{MD}{\sin 135^\circ} \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{h \cos \alpha}{\cos(\alpha - 45^\circ)}.$$

За лицето на PDM получаваме $S = \frac{1}{2} DM \cdot DP \sin(90^\circ - \alpha) =$

$$= \frac{h^2 \sqrt{2} \cos \alpha \cdot \operatorname{tg}(\alpha - 45^\circ)}{4 \cos(\alpha - 45^\circ)}.$$

1.5.16. В $\triangle ABC$ CM е медиана, а CD – височина. Намерете радиуса на вписаната окръжност, ако $CM : CD = 2 : 1$, а $AB = c$.

Отг. $\frac{c}{4}(\sqrt{6} - 2)$.

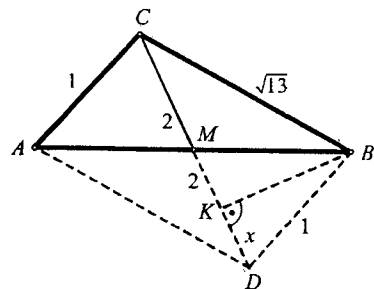


2. СРЕДИ, СРЕДНИ ОТСЕЧКИ, МЕДИАНИ

2.1. СРЕДИ И МЕДИАНИ В ТРИЪГЪЛНИК

2.1.1. Определете лицето на $\triangle ABC$, ако $b = 1$, $a = \sqrt{13}$, $m_c = 2$.

Решение: Построяваме точка D , симетрична на върха C , относно средата M на AB . AB и DC се разполюват, т.е. $ADBC$ е успоредник, $AC = DB = 1$ и $S_{ABC} = S_{CDB}$. Ще намерим височината BK в $\triangle CDB$. Означаваме DK с x . Тогава:



$$\begin{aligned} BK^2 &= 1^2 - x^2 \\ BK^2 &= (\sqrt{13})^2 - (4-x)^2. \end{aligned}$$

Оттук получаваме $x = \frac{1}{2}$ и следователно $BK = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $S_{CDB} = \sqrt{3}$.

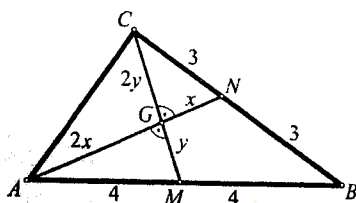
2.1.2. В $\triangle ABC$ $b = 27$, $a = 29$, $m_c = 26$. Намерете h_b .

Отг. 20.

2.1.3. В $\triangle ABC$ $b = 12$, $a = 15$, $\gamma = 60^\circ$. Намерете дължината на медианата към най-голямата страна на триъгълника.

Отг. $21/2$.

2.1.4. В $\triangle ABC$ $a = 8$, $c = 6$. Медианите към тези страни са взаимноперпендикулярни. Намерете третата страна на триъгълника.



Решение: Нека $GN = x$, $GM = y$. Тогава $AG = 2x$, $CG = 2y$. $\triangle AGM$ и $\triangle CGN$ са правоъгълни или

$$\begin{aligned} (2x)^2 + y^2 &= 4^2 \\ x^2 + (2y)^2 &= 3^2. \end{aligned}$$

Събираме двете

уравнения и получаваме $5x^2 + 5y^2 = 25$. От $\triangle AGC$ $b^2 = (2x)^2 + (2y)^2 = 20$, т.е. $b = 2\sqrt{5}$.

2.1.5. (ТУ) Даден е триъгълник ABC със страни $AC = b$ и $BC = a$. Медианите към тези страни са взаимноперпендикулярни.

а) Намерете третата страна AB на триъгълника.

б) В какви граници трябва да се изменя отношението $a:b$, за да съществува триъгълникът.

Отг. а) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$; б) $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$.

2.1.6. В $\triangle ABC$ $GA_1 = 3$, $GB_1 = 4$ и $A_1B_1 = 5$, където G е медицентър, а A_1 и B_1 са средите на BC и AC . Намерете медианата през върха C .

Отг. 15.

2.1.7. В $\triangle ABC$ $AB = 26$. Медианите към другите две страни са 30 и 39. Намерете лицето на триъгълника.

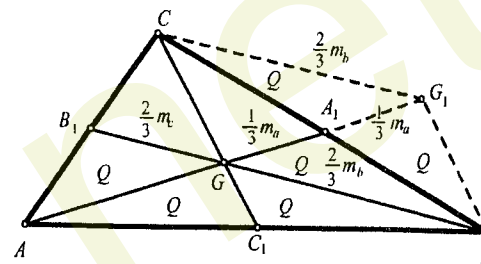
Отг. 720.

2.1.8. Намерете отношението на лицето на $\triangle ABC$ към лицето на триъгълника, образуван от медианите му.

Решение: Медицентърът G и трите медиани разделят триъгълника на 6 равноличеви триъгълника с лице Q . Продължаваме AA_1 до точката G_1 , като $A_1G_1 = GA_1 =$

$$= \frac{m_a}{3}.$$

Успоредникът GBG_1C се разделя от диагоналите му на 4 равноличеви триъгълника. $\triangle GG_1C$ е подобен на триъгълника, образуван от медианите на триъгълника с коефициент $\frac{2}{3}$ и има лице $2Q$. Тогава лицето на



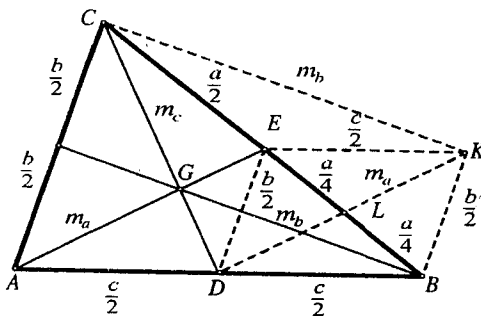
последния е $\left(\frac{3}{2}\right)^2 2Q = \frac{9}{2}Q$ или $\frac{S_{med}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{9}{2}Q}{6Q} = \frac{3}{4}$.

2.1.9. От медианите на $\triangle ABC$ е построен триъгълник, а от неговите медиани – нов триъгълник. Докажете, че този триъгълник и $\triangle ABC$ са подобни и намерете коефициента на подобие.

Решение: Построяваме отсечката DK , успоредна и равна на медианата AE . Тогава $EK = AD = DB =$

$$= \frac{c}{2} \text{ и четириъгълникът } DBKE \text{ е успоредник със страни } BK = DE = \frac{b}{2}.$$

От друга страна страните BK и FC са успоредни и равни на $\frac{b}{2}$ и четириъгълникът $BKCF$ е успоредник и следователно $KC = BF = m_b$. $\triangle DKC$ има страни, равни на медианите на $\triangle ABC$, а точката E е негов медицентър, защото $CE = \frac{a}{2}$ и $EL = \frac{a}{4}$.



$\triangle DEB$ е образуван от страни, равни на $\frac{2}{3}$ от медианите на втория триъгълник DKC и е подобен на третия триъгълник с коефициент $\frac{2}{3}$. От своя страна той е подобен на $\triangle ABC$ с коефициент $\frac{1}{2}$. Тогава коефициентът на подобие на

третия триъгълник и $\triangle ABC$ е $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Допълнителните построения, които направихме при решаването на задачи 2.1.1., 2.1.8. и 2.1.9. водят към **фигури, конструктивно свързани с основния триъгълник. Тези построения се прилагат често при задачи с медиани.**

2.1.10. Намерете S_{ABC} , ако $m_a = 12$, $m_b = 15$, $m_c = 21$. **Отг.** $48\sqrt{6}$.

2.1.11. Докажете, че ако $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$, то $\triangle ABC$ е правоъгълен.

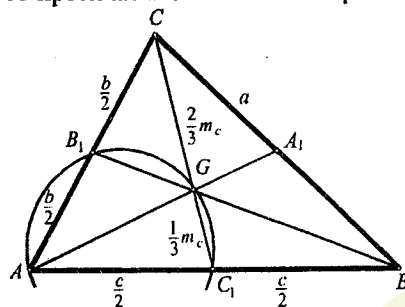
2.1.12. Докажете, че за всеки триъгълник $\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$.

2.1.13. Докажете, че за всеки триъгълник

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a+b+c.$$

2.1.14. Даден е $\triangle ABC$. Докажете, че $\frac{1}{2} < \frac{m_a}{m_b} < 2$.

2.1.15. В $\triangle ABC$ $BC = a$. Намерете медианата AA_1 , ако медианите CC_1 и BB_1 се пресичат в G и около четириъгълника AC_1GB_1 може да се опише окръжност.



Решение: От теоремата за секущите знаем, че $CA \cdot CB_1 = CC_1 \cdot CG$ или

$$b \cdot \frac{b}{2} = m_c \cdot \frac{2}{3} m_c. \text{ Получаваме } 4m_c^2 = 3b^2.$$

От формулата за медианата имаме $4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$ или $3b^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$, т.е. $b^2 + c^2 = 2a^2$. Пресмятаме

$$AA_1 = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2(2a^2) - a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

2.1.16. Медианите AM и BN се пресичат в точка G . Около $GMNC$ може да се опише окръжност. Докажете, че $\angle ACB \leq 60^\circ$.

2.1.17. В $\triangle ABC$ CD е височина. Ъглополовящите на $\angle BAC$ и $\angle DCB$ се пресичат в точка P , а ъглополовящите на $\angle ACD$ и $\angle DCB$ – в Q . CQ и CP пресичат AB в точки F и K . Ако $FK = m$, намерете PQ . **Отг.** $m/2$.

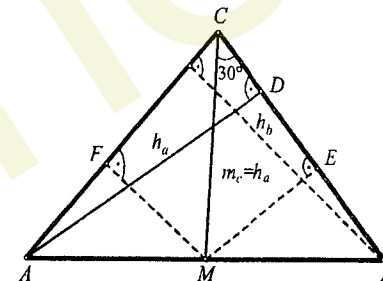
2.1.18. Даден е $\triangle ABC$, като $AB = c$ и $AC = b$. CP е перпендикуляр към външната ъглополовяща на $\angle BAC$. Намерете дължината на PD , където D е средата на BC . **Отг.** $(b+c)/2$.

2.2. МЕДИАНИ И ДРУГИ ЕЛЕМЕНТИ

2.2.1. Да се докаже, че ако височината h_a не е по-малка от останалите височини на триъгълника и $h_a = m_c$, то $\gamma \leq 60^\circ$.

Доказателство: Построяваме $ME \perp BC$. Тогава ME , като средна отсечка в $\triangle ABD$ е равна на $\frac{h_a}{2}$. В правоъгълния $\triangle MEC$ $MC = 2ME$ или $\angle MCB = 30^\circ$.

Аналогично построяваме $MF \perp AC$, но $h_b < h_a = m_c$, т.е. $\angle MCF < 30^\circ$. Така доказахме, че $\gamma \leq 60^\circ$ (равенство се достига само ако $h_a = h_b$).

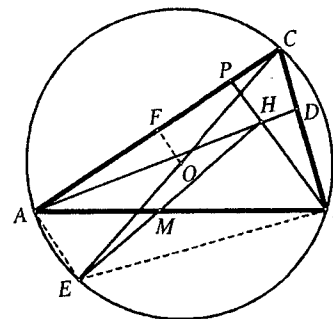


2.2.2. Докажете, че ако височина, медиана и ъглополовяща от три различни върха са равни по дължина, то триъгълникът е равностранен.

2.2.3. Около $\triangle ABC$ е описана окръжност и е пострен диаметърът ѝ CE . Ако H е ортоцентърът на $\triangle ABC$, докажете, че отсечките AB и EH взаимно се разполюват. Докажете, че разстоянието от центъра на окръжността до страната AC е равно на половината от дължината на BH .

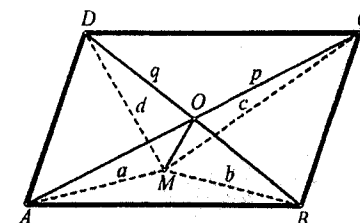
Доказателство: Понеже CE е диаметър, $\angle EBC = 90^\circ$, т.е. $AH \parallel EB$.

Аналогично $BH \parallel EA$. Доказахме, че $AEBH$ е успоредник и следователно диагоналите му HE и AB се разполюват. В $\triangle AEC$ OF е средна отсечка, т.е. $OF = \frac{AE}{2} = \frac{BH}{2}$.



2.2.4. Изразете разликата от квадратите на диагоналите p и q на успоредник чрез разстоянията a, b, c, d от произволна точка M до върховете му.

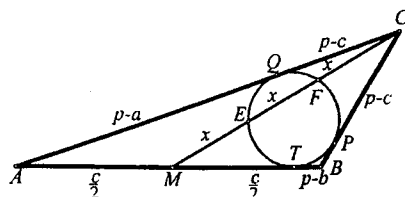
Решение: MO е медиана в триъгълниците AMC и BMD . Следователно са изпълнени $4OM^2 = 2a^2 + 2c^2 - p^2$ и $4OM^2 = 2b^2 + 2d^2 - q^2$. Получаваме $p^2 - q^2 = 2(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)$.



2.2.5. Окръжност е вписана в ромб $ABCD$ с ъгъл 45° . Докажете, че за всяка точка M от окръжността е изпълнено: $2(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2) = 5AB^2$.

2.2.6. Ако O_1 е симетричната на центъра O на описаната около $\triangle ABC$ окръжност спрямо страната AB , докажете че $CO_1^2 = R^2 + a^2 + b^2 - c^2$.

2.2.7. Даден е $\triangle ABC$ с периметър $2p$. Намерете страните на триъгълника, ако медианата през върха C се разделя на три равни части от вписаната му окръжност.



Решение: От теоремата за допирателната и секущата получаваме:

$CP^2 = CF \cdot CE$. Понеже $CP = p - c$ имаме:

$$(p - c)^2 = 2x^2, \text{ т.е. } c = p - x\sqrt{2}.$$

$$MT^2 = ME \cdot MF = 2x^2 \text{ или } MT = CP, \text{ но}$$

$$MT = MB - BT, \text{ т.е. } \frac{c}{2} - (p - b) = p - c. \text{ От-}$$

тук намираме, че $a = \frac{c}{2}$ или $a = \frac{p - x\sqrt{2}}{2}$ и $b = 2p - a - c = \frac{p + 3x\sqrt{2}}{2}$.

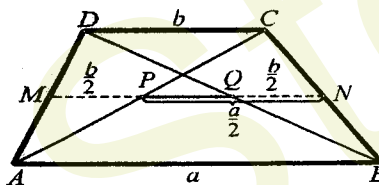
Знаем, че $4CM^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$ или $4(3x)^2 = 2b^2 - 2a^2 = 2(b - a)(b + a)$. Като заместим a и b с техните равни получаваме $x = \frac{p\sqrt{2}}{7}$. Страните са:

$$BC = \frac{5p}{14}, AC = \frac{13p}{14} \text{ и } AB = \frac{10p}{14}.$$

2.2.8. Докажете, че ако медицентърът на триъгълник лежи върху вписаната окръжност, то $5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(ab + bc + ca)$.

2.3. СРЕДНА ОТСЕЧКА В ТРАПЕЦ

2.3.1. Трапец има основи a и b ($a > b$). Намерете дължината на отсечката с краища средите на диагоналите му.



Решение: Нека P и Q са средите на AC и BD . В $\triangle ABD$ MQ е средна отсечка, т.е.

$$MQ = \frac{a}{2}. \text{ Аналогично } MP \text{ е средна отсечка}$$

$$\text{в } \triangle CDA \text{ или } MP = \frac{b}{2}. \text{ Тогава}$$

$$PQ = MQ - MP = \frac{a - b}{2}.$$

2.3.2. Върху основите AB и CD на трапеца $ABCD$ са взети точки M и N . Докажете, че средната отсечка на трапеца разполювява MN .

2.3.3. Точките P и Q са средите на основите AB и CD на трапеца $ABCD$. Намерете лицето му, ако $AD = 7$, $BC = 9$, $CD = 7/2$ и $PQ = 4$.

Решение: Построяваме QM , успоредна на AD и QN , успоредна на CB . Ясно е, че

$$MP = PN = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \text{ и } MQ = AD, NQ = BC.$$

Понеже QP е медиана в триъгълника MNQ , имаме $4QP^2 = 2MQ^2 + 2NQ^2 - MN^2$ или

$$4 \cdot 4^2 = 2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 9^2 - MN^2; MN = 14 \text{ и } AB = \frac{35}{2}.$$

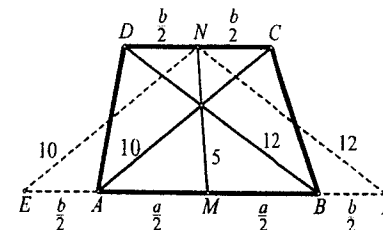
Лицето на MNQ пресмятаме по Хероновата формула

$$S_{MNQ} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 12\sqrt{5}. \text{ Получаваме } \frac{14h}{2} = 12\sqrt{5} \text{ или } h = \frac{12\sqrt{5}}{7}.$$

Лицето на трапеца е $S = 18\sqrt{5}$.

2.3.4. Отсечката, съединяваща средите на основите на трапец е равна на 5, а диагоналите му са 10 и 12. Намерете лицето му.

Решение: Построяваме $NE \parallel CA$ и $NK \parallel BD$. В $\triangle EKN$ $NE = 10$, $NK = 12$, а NM е медиана и $NM = 5$. Сега можем да продължим както в предходната задача, но можем да съкратим изчисленията, като се възползваме от още едно допълнително построение. Продължете NM до P като $MP = NM = 5$. Понеже $EPKN$ е успоредник $S_{EKN} = S_{PNE}$, но $S_{EKN} = S_{ABCD}$ или $S_{PNE} = S_{ABCD}$. Знаем трите страни на $\triangle PNE$. $S_{PNE} = 48$.



2.3.5. Даден е трапец с основи a и b , бедра m и n и диагонали d_1 и d_2 . Докажете, че $d_1^2 + d_2^2 = m^2 + n^2 + 2ab$.

2.3.6. В трапеца $ABCD$ $\angle DAB + \angle ABC = 90^\circ$. Ако P и Q са среди на диагоналите, а M и N – на основите, докажете, че $PQ = MN$.

2.3.7. Дължината на средната отсечка на трапец е 4, а ъглите при основата са 40° и 50° . Намерете дължините на основите, ако отсечката, която свързва средите им е равна на 1.

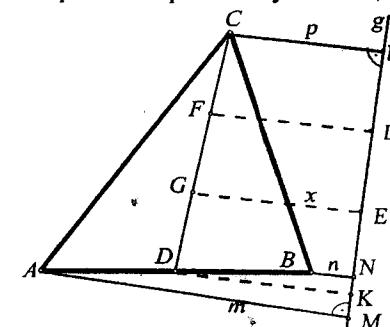
Отг. 5 и 3.

2.3.8. Дадени са $\triangle ABC$ и права g , която не пресича страните му. Ако m , n и p са разстоянията от A, B и C до правата, намерете разстоянието от медицентъра на триъгълника до g .

Решение: Нека F е средата на CG . В трапеца $AMNB$ средната отсечка

$$KD = \frac{m+n}{2}. \text{ Аналогично в трапеца } GEPC$$

$$FL = \frac{x+p}{2}, \text{ а от трапеца } DKLF \quad x = \frac{KD + FL}{2}.$$



Заместваме KD и FL с равните им и получаваме $x = \frac{m+n+p}{3}$.

2.3.9 Дадени са $\triangle ABC$ и права g , минаваща през B и непресичаща страната AC . Разстоянията от A и C до g са съответно m и p . Намерете разстоянието от медицентъра на ABC до g . **Отг.** $(m+p)/3$.

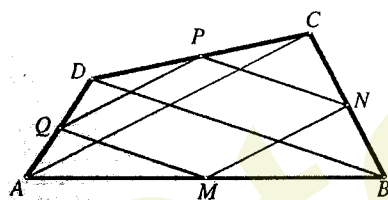
2.3.10. Дадени са $\triangle ABC$ с медицентър G и права g , пресичаща отсечките BA , BC и BG . Ако разстоянията от върховете на триъгълника до g са съответно 8, 2 и 3, намерете разстоянието от G до правата g . **Отг.** 3.

2.3.11. Докажете, че ако права минава през медицентъра на триъгълник, то разстоянието от единия от върховете до тази права е равно на сбора на разстоянията от останалите два върха до същата права.

2.3.12. Правата g не пресича страните на $\triangle ABC$. През A, B и C са построени успоредни прави, пресичащи g съответно в точките A_1, B_1 и C_1 така, че $AA_1 + BB_1 = CC_1$. Докажете, че всички други прави със същото свойство ($AA_1 + BB_1 = CC_1$) и g имат една и съща обща точка.

2.4. СРЕДИ НА СТРАНИТЕ НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

2.4.1. Докажете, че средите на страните на всеки четириъгълник са върхове на успоредник. При какви условия средите на страните на четириъгълника определят ромб, правоъгълник или квадрат?



Доказателство: В $\triangle DBC$ NP е средна отсечка, т.е. $NP \parallel BD$ и $NP = \frac{BD}{2}$.

Аналогично в $\triangle BDA$ средната отсечка $MQ \parallel BD$ и $MQ = \frac{BD}{2}$. Доказахме, че $MNPQ$ е успоредник.

Ако диагоналите AC и BD са равни, $MNPQ$ ще е ромб. Ако $AC \perp BD$, $MNPQ$ ще е правоъгълник. Ако $AC \perp BD$ и $AC = BD$, $MNPQ$ ще е квадрат.

2.4.2. Докажете, че ако за четириъгълник отсечката с краища средите на двойка срещуположни страни е равна на полусбора на другата двойка срещуположни страни, то четириъгълникът е или трапец или успоредник.

2.4.3. Даден е четириъгълник, за който сборът на отсечките с краища средите на срещуположните двойки страни е равен на полупериметъра на четириъгълника. Определете вида на четириъгълника. **Отг.** Успоредник.

2.4.4. В изпъкнал четириъгълник дължините на диагоналите са 2 и 4. Намерете лицето на четириъгълника, ако дължините на отсечките, свързващи средите на срещуположните страни са равни. **Отг.** 4.

2.4.5. (ВУЗ) Даден е изпъкналият четириъгълник $ABCD$, в който M, Q, N, P са съответно среди на AB, BC, CD, DA . Докажете, че ако $MN = PQ$, то:

а) диагоналите AC и BD са перпендикулярни;

б) лицето на $ABCD$ е равно на $\frac{1}{2}AC \cdot BD$;

в) $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

2.4.6. В изпъкналият четириъгълник $ABCD$ дължината на отсечката, съединяваща средите на AB и CD е равна на 1 и $BC \perp AD$. Намерете дължината на отсечката, съединяваща средите на диагоналите AC и BD . **Отг.** 1.

2.4.7. В изпъкналият четириъгълник $ABCD$ отсечката, съединяваща средите на диагоналите е равна на отсечката, съединяваща средите на AD и BC . Намерете ъгъла между правите AD и BC . **Отг.** 90° .

2.4.8. Диагоналите на четириъгълник са равни, а дължините на средните му отсечки са p и q . Намерете лицето на четириъгълника. **Отг.** pq .

2.4.9. Даден е четириъгълник със страни a, b, c и d , а E и F са средите на диагоналите му. Докажете, че $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4EF^2$.

Доказателство: Нека M, N, P и Q са среди на страните на четириъгълника $ABCD$. $MENF$ е успоредник със страни $\frac{b}{2}$ и $\frac{d}{2}$. За диагоналите на успоредник знаем, че $MN^2 + EF^2 = 2\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{d}{2}\right)^2$.

Аналогично $PEQF$ е успоредник, т.е. $PQ^2 + EF^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2$. Тогава

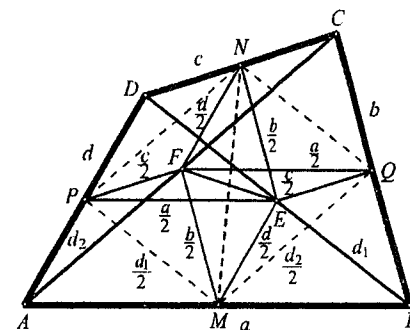
$$MN^2 + PQ^2 + 2EF^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2).$$

От успоредника $MQNP$ имаме: $MN^2 + PQ^2 = 2\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{d_2}{2}\right)^2$ или

$$d_1^2 + d_2^2 + 4EF^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

2.4.10. В четириъгълника $ABCD$ M е среда на AB , а N – среда на CD . Докажете, че средите на AN, MD, MC и BN са или върхове на успоредник или лежат на една права.

2.4.11. През средите на диагоналите на четириъгълник са построени прави, успоредни на диагоналите му, пресичащи се в точка O . Докажете, че четириъгълниците, определени от един един от върховете, средите на страните, минаващи през него и точката O , са равнолицеви.



2.4.12. Даден е изпъкнал петогълник $ABCDE$. Средите на страните AB , CD , BC и DE са краища на отсечки със среди M и N . Докажете, че $4MN = AE$.

2.4.13. Медиана на (равнинен или пространствен) четириъгълник се нарича отсечката с краища връх на четириъгълника и медицентъра на триъгълник с върхове останалите три върха. Докажете, че медианите на четириъгълника минават през една точка, която ги дели в отношение 3:1, считано от съответния връх.

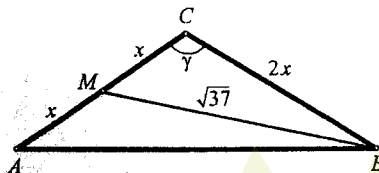
2.4.14. Даден е четириъгълник $ABCD$. Докаже, че медицентровете G_D , G_A , G_B , G_C на $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ и $\triangle DAB$ са върхове на четириъгълник със страни и диагонали, успоредни на страните и диагоналите на четириъгълника $ABCD$ и три пъти по-малки от тях.

2.4.15. Даден е $\triangle ABC$ и точка E , вътре в него. Точката P е централносиметричната на E спрямо средата на BC , Q е централносиметричната на E спрямо средата на AC , а M – спрямо средата на AB . Докажете, че:

- правите AP , BQ и CM минават през една точка;
- триъгълниците ABC и PQM са еднакви.

2.5. ЗАДАЧИ С ИЗПОЛЗВАНЕ И НА ТРИГОНОМЕТРИЯ

2.5.1. Лицето на равнобедрен тъпоъгълен $\triangle ABC$ ($AC=BC$) е 8, а медианата му $BM = \sqrt{37}$. Намерете $\cos \angle ACB$.



Решение: Ако $BC = 2x$ имаме:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2x \sin \gamma = 8, \text{ откъдето } x^2 = \frac{4}{\sin \gamma}.$$

От косинусова теорема получаваме:

$$BM^2 = CM^2 + CB^2 - 2CM \cdot CB \cos \gamma, \text{ т.е.}$$

$$37 = x^2 + 4x^2 - 2x \cdot 2x \cos \gamma. \text{ Тогава}$$

$$x^2 = \frac{37}{5 - 4 \cos \gamma}. \text{ Повдигаме на квадрат } \frac{4}{\sin \gamma} = \frac{37}{5 - 4 \cos \gamma} \text{ и достигаме до уравне-$$

нието $1625 \cos^2 \gamma - 640 \cos \gamma - 969 = 0$. По условие $\cos \gamma < 0$, решение е

$$\cos \gamma = -\frac{3}{5}.$$

2.5.2. В $\triangle ABC$ медианите AM и BN сключват остър ъгъл φ . Нека $\angle BAC = \alpha$, а $\tan \varphi = p$. Изразете $\sin 2\alpha$ чрез p . Отг. $4/3p$.

2.5.3. (СУ) В $\triangle ABC$ точката M е средата на страната BC и $AM = BC$.

а) Докажете, че $\cos 2\beta + \cos 2\gamma + 5 \sin^2 \alpha = 2$.

б) Нека N е средата на страната AB . Ако $\angle NCB = \angle CAB$, намерете косинуса на ъгъла между медианите AM и CN .

Решение: а) $4AM^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$, но $AM = a$, т.е. $5a^2 = 2b^2 + 2c^2$. Изразяваме $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \sin \beta$ и $c = 2R \sin \gamma$ и достигаме до $5 \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \beta + 2 \sin^2 \gamma$. С помощта на формулата $2 \sin^2 \beta = 1 - \cos 2\beta$ получаваме, че $\cos 2\beta + \cos 2\gamma + 5 \sin^2 \alpha = 2$.

б) От синусова теорема за $\triangle MCG$ имаме $\frac{CM}{\sin \varphi} = \frac{MG}{\sin \alpha}$, но $CM = \frac{a}{2}$, $GM = \frac{a}{3}$, откъдето $\sin \varphi = \frac{3}{2} \sin \alpha$. $\triangle ABC \sim \triangle CBN$, следователно

$\frac{NB}{BC} = \frac{BC}{AB}$ или $\frac{c}{2a} = \frac{a}{c}$, т.е. $c = a\sqrt{2}$. Заместяваме $c = a\sqrt{2}$ в $5a^2 = 2b^2 + 2c^2$ и по-

лучаваме, че $a = b\sqrt{2}$ и $c = 2b$. Пресмятаме $\cos \alpha = \frac{b^2 + 4b^2 - 2b^2}{4b^2} = \frac{3}{4}$. Тогава

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}, \text{ а } \sin \varphi = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}. \text{ Накрая намираме } \cos \varphi = \frac{1}{8}.$$

2.5.4. Намерете косинуса на ъгъла между височината CD и медианата CM в $\triangle ABC$ с ъгли α , β и γ .

$$\text{Отг. } \frac{2 \sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{2 \sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \beta - \sin^2 \gamma}}.$$

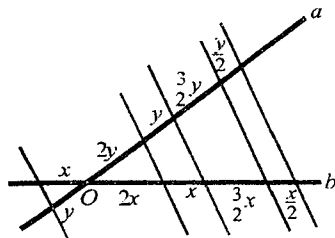
2.5.5. (СУ) В $\triangle ABC$ медианата $AM = 1$, BN и CP са височини, $BN = 1$, $CP = \sqrt{2}$. Намерете ъгъл BAC и дължините на страните на $\triangle ABC$.

Отг. 75° , $AB = \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$; $BC = 2\sqrt{11 - 6\sqrt{3}}$; $CA = \sqrt{3} - 1$ или

165° , $AB = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$; $BC = 2\sqrt{16 + 6\sqrt{3}}$; $CA = \sqrt{3} + 1$.

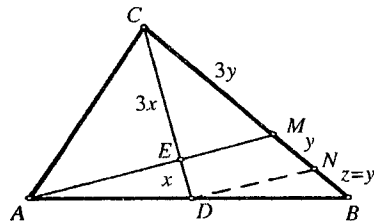
3. ОТНОШЕНИЕ НА ОТСЕЧКИ И ЛИЦА

На фигурата е показано и означено как, съгласно теоремата на Талес, отношението на отсечките от една права a се пренася чрез успоредни прави върху отсечките от друга права b .



3.1. ОТНОШЕНИЕ НА ОТСЕЧКИ В ТРИЪГЪЛНИК

3.1.1. В $\triangle ABC$ точката E лежи на медианата CD , като $CE = 3ED$. Правата AE пресича BC в точка M . Намерете отношението $BC:BM$.



Решение: Построяваме $DN \parallel AM$. По теоремата на Талес $\frac{CM}{MN} = \frac{CE}{ED} = \frac{3x}{x} = 3$.

$$\frac{CM}{MN} = \frac{CE}{ED} = \frac{3x}{x} = 3$$

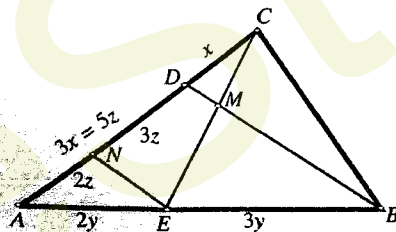
Означаваме $CM = 3y$, $MN = y$. Отново по Талес $\frac{MN}{NB} = \frac{AD}{DB} = 1$, т.е. $MN = y$. Тогава

$$\frac{MN}{NB} = \frac{AD}{DB} = 1, \text{ т.е. } MN = y. \text{ Тогава}$$

$$\frac{BC}{BM} = \frac{5y}{2y} = \frac{5}{2}.$$

В тази задача търсехме отношението на частите, на които една права разделя дадена отсечка. Такава права ще наричаме **деляща права**. Много от задачите от този тип се решават с помощта на стандартно допълнително построение: **построяваме права (прави), успоредна на делящата права**.

3.1.2. В $\triangle ABC$ на AC е взета точка D така, че $CD:DA = 1:3$, а на AB – точка E така, че $AE:EB = 2:3$. В какво отношение правата BD дели отсечката CE ?



Решение: Делящата права е BD . Построяваме $EN \parallel BD$.

По Талес: $\frac{BE}{EA} = \frac{3y}{2y} = \frac{DN}{NA} = \frac{3z}{2z}$. По условие

$$\frac{CD}{DA} = \frac{1}{3}, \text{ но } DA = 5z, \text{ т.е. } CD = \frac{5z}{3}. \text{ Тогава}$$

$$\frac{CM}{ME} = \frac{CD}{DN} = \frac{\frac{5z}{3}}{3z} = \frac{5}{9}.$$

3.1.3. В $\triangle ABC$ на AB е взета точка M така, че $AM:MB = 2:1$, а върху BC точка N така, че $BN:NC = 4:1$. Правата MN пресича правата AC в точка D .

а) Намерете $AD:DC$.

б) Намерете $MN:ND$.

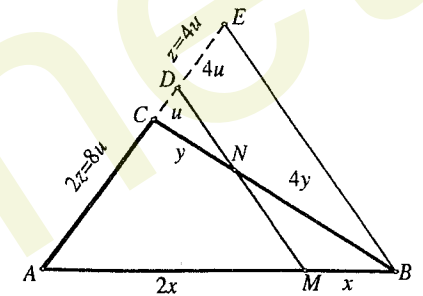
Решение:

а) Означаваме $MB = x$, $NC = y$. Делящата права е MN . Построяваме $BE \parallel MN$ и по Талес намираме $\frac{AM}{MB} = \frac{2x}{x} = \frac{AD}{DE} = \frac{2z}{z}$ и

$$\frac{AM}{MB} = \frac{2x}{x} = \frac{AD}{DE} = \frac{2z}{z}$$

$$\frac{BN}{NC} = \frac{4y}{y} = \frac{ED}{DC} = \frac{4u}{u}. \text{ Получаваме, че}$$

$$DE = z = 4u. \text{ Тогава } AD = 8u \text{ или } \frac{AD}{DC} = 8.$$



б) Делящата права е BC . Направете нов чертеж като построите $FD \parallel BC$.

Трябва да получите $\frac{MN}{ND} = \frac{7}{3}$.

3.1.4. Върху бедрата CA и CB на равнобедрен $\triangle ABC$ са взети точки K и E , така че $CK:KA = 2:1$ и $CE:EB = 1:2$. В какво отношение правата KE дели височината CD .
Отг. 4:5.

3.1.5. Точките P и K лежат на бедрата AC и BC на равнобедрения $\triangle ABC$. PK пресича височината CD в точка O . Ако $AP:PC = m$ и $BK:KC = n$, определете $DO:OC$.
Отг. $(m+n)/2$.

3.1.6. Правата g пресича страните AB и AC на $\triangle ABC$ в точки C_1 и B_1 и правата BC в точка A_1 . Докажете, че $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Решение: Нека $AC_1 = x$, $AB_1 = y$, $C_1B = mx$, $B_1C = ny$. Ще разгледаме случая когато g пресича лъчът CB . Построяваме $BE \parallel B_1C_1$ и по Талес получаваме:

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{mx}{x} = \frac{EB_1}{B_1A} = \frac{mz}{z}. \text{ Ясно е, че } z = y,$$

$$\frac{BC_1}{C_1A} = \frac{mx}{x} = \frac{EB_1}{B_1A} = \frac{mz}{z}$$

$$\text{тогава } \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{CB_1}{B_1E} = \frac{nu}{mu}.$$

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{x}{mx} \cdot \frac{mu}{ny} \cdot \frac{ny}{y} = 1.$$

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{x}{mx} \cdot \frac{mu}{ny} \cdot \frac{ny}{y} = 1.$$

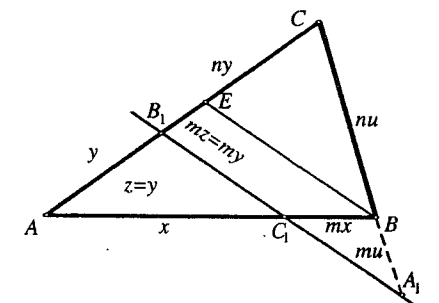
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{x}{mx} \cdot \frac{mu}{ny} \cdot \frac{ny}{y} = 1.$$

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{x}{mx} \cdot \frac{mu}{ny} \cdot \frac{ny}{y} = 1.$$

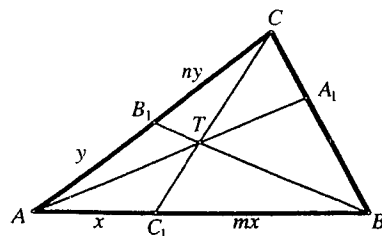
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{x}{mx} \cdot \frac{mu}{ny} \cdot \frac{ny}{y} = 1.$$

Задачата е частен случай от **теоремата на Менелай**.

3.1.7. В $\triangle ABC$ са построени вътрешните ъглополовящи AD и BE . Правата DE пресича правата AB в точка P . Докажете, че CP е ъглополовяща на външния ъгъл при върха C .



3.1.8. В $\triangle ABC$ AA_1 ($A_1 \in BC$), BB_1 ($B_1 \in AC$) и CC_1 ($C_1 \in AB$) имат обща точка T . Докажете, че $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$ (теорема на Чева).



Решение: Ще скицираме едно възможно решение. Означете $AC_1 = x$, $C_1B = mx$, $AB_1 = y$, $B_1C = ny$. Първо намерете отношението $C_1T:TC$, а след това и $CA_1:A_1B$.

Ето едно друго решение. Прилагаме теоремата на Менелай [3.1.6.] за $\triangle ACC_1$ и

правата BB_1 : $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CT}{TC_1} \cdot \frac{C_1B}{BA} = 1$, а след това и

за $\triangle BCC_1$ и правата AA_1 : $\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BA}{AC_1} \cdot \frac{C_1T}{TC} = 1$. Като умножим получените равенства достигаме до равенството, което трябваше да докажем.

3.1.9. В $\triangle ABC$ на BC е взета точка D , а на AB – точка K така, че $AK:KB = 4:3$ и $CD:DB = 1:3$. AD и CK се пресичат в E . Намерете $CE:EK$. **Отг.** 7:12.

3.1.10. Върху страните AC и BC на $\triangle ABC$ са взети точките K и E така, че $CK:KA = 2:3$, $CE:EB = 4:3$. В какво отношение пресечната точка на AE и BK дели отсечката KB ? **Отг.** 4:5.

3.1.11. В $\triangle ABC$ M лежи на BC и $BM = 2CM$. Докажете, че медианите в $\triangle ABM$ и $\triangle ACM$ съответно през върховете M и C са успоредни.

3.1.12. В $\triangle ABC$ на AB са взети точки P и Q така, че $AP < AQ$. CP и CQ делят медианата AM на три равни части. Ако $PQ = 3$ намерете AB . **Отг.** 10.

3.1.13. (УНСС) В $\triangle ABC$ със страна $BC = a$ медианата CD е разделена на четири равни части. Точките на деление са съединени с A с прави, пресичащи BC . Намерете дължините на отсечките от BC . **Отг.** $\frac{a}{7}, \frac{4a}{21}, \frac{4a}{15}, \frac{2a}{5}$.

3.1.14. В $\triangle ABC$ K е от AB и $AK:KB = 3:2$, а M е от AC и $AM:MC = 4:5$. Намерете:

а) отношението, в което правата, минаваща през K и успоредна на BC дели отсечката BM ;

б) отношението, в което CK дели BM . **Отг.** а) 18:7; б) 6:5.

3.1.15. В $\triangle ABC$ е построена медианата AM . Точката E е среда на AM , точката K – среда на CE и точката P е среда на AK . Правата CP пресича AB в точка D . Намерете AD , ако $AB = a$. **Отг.** $a/11$.

3.1.16. Точките D , E и K лежат съответно върху страните BC , CA и AB , като $BD:BC = CE:CA = AK:AB = k$.

а) Ако M е среда на BC , а AM и EK се пресичат в P намерете $EP:PK$.

б) Докажете, че медицентърът G на $\triangle DEK$ лежи на AM .

в) Докажете, че $\triangle ABC$ и $\triangle DEK$ имат общ медицентър. **Отг.** $(1-k):k$.

3.2. ОТНОШЕНИЕ НА ЛИЦА НА ТРИЪГЪЛНИЦИ

Припомняме, че:

1. Лицата на два триъгълника с равни основи се отнасят както височините към тях.

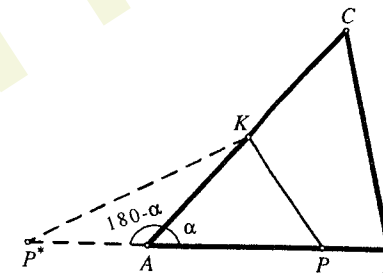
2. Лицата на два триъгълника с равни височини се отнасят както съответните основи.

3. Лицата на два подобни триъгълника се отнасят както квадратите на съответните им линейни елементи.

Лема: Лицата на два триъгълника с равен ъгъл между съответни страни се отнасят както отношенията между страните, съдържащи ъгъла.

Доказателство:

$$\frac{S_{APK}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AP \cdot AK \sin \alpha}{\frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \alpha} = \left(\frac{AP}{AB} \right) \cdot \left(\frac{AK}{AC} \right).$$



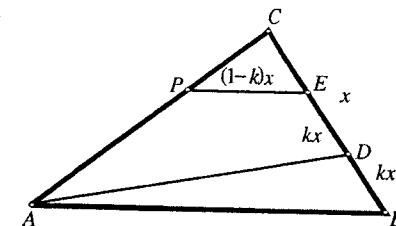
Твърдението е изпълнено и за триъгълника AP^*K с ъгъл $180^\circ - \alpha$.

3.2.1. В $\triangle ABC$ точка D е от BC и $BD:DC = k$ ($k < 1/2$). Между D и C е взета точка E така, че $BD = DE$. Нека P е от AC и $EP \parallel AB$. Намерете отношението $S_{ABEP} : S_{ABD}$.

Решение: Нека $CD = x$, т.е. $BD = DE = kx$ и следователно $CE = (1-k)x$. Съгласно лемата $\frac{S_{PEC}}{S_{ABC}} = \frac{(1-k)^2}{(1+k)^2}$. Пресмятаме лицето на $ABEP$

$$S_{ABEP} = S_{ABC} - S_{PEC} = \frac{4k}{(1+k)^2} S_{ABC}$$

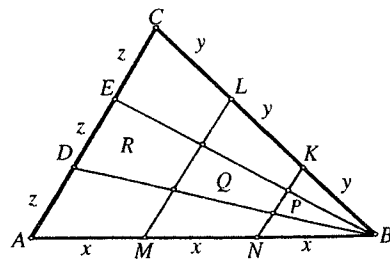
$$\text{и } \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{BA}{BA} \cdot \frac{BD}{BC} = \frac{k}{1+k}. \text{ Получихме, че } \frac{S_{ABEP}}{S_{ABD}} = \frac{4k}{(1+k)^2} \cdot \frac{(1+k)}{k} = \frac{4}{1+k}.$$



3.2.2. Точките M и N , K и L , E и D лежат съответно върху страните AB , BC и CA на $\triangle ABC$, като $AM = MN = NB$, $BK = KL = LC$ и $AD = DE = EC$. Намерете лицето на четириъгълника, ограничен от пресичането на правите ML , NK , BD и BE , ако лицето на $\triangle ABC$ е S .

Решение:

Ясно е, че $S_{ABD} = S_{DBE} = S_{EBC} = S/3$. Търсеното лице означаваме с Q .



Триъгълникът с лице P е подобен на $\triangle BDE$ с коефициент $k_1 = 1/3$, т.е. $P = S/27$, а триъгълникът с лице $P+Q$ – с коефициент $k_2 = 2/3$, т.е. $P+Q = 4S/27$.

Сега определяме $Q = P+Q - P = S/9$.

3.2.3. В $\triangle ABC$ с лице 40, D е от BC и $BD:DC = 3:2$. Медианата BK пресича AD в точка E . Намерете лицето на четири-

Отг. 11.

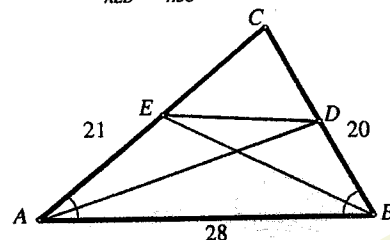
3.2.4. В $\triangle ABC$ точка D лежи на BC и $BD:DC = 2:3$, а K е от AB , като $AK:KB = 1:2$. CK пресича AD в точка E . Намерете лицето на четириъгълника $EKBD$, ако лицето на $\triangle ABC$ е 90.

Отг. 44.

3.2.5. В $\triangle ABC$ на AC е взета точка E така, че $AE:EC = p$, а на AB – точка D такава, че $AD:DB = k$. CD и BE се пресичат в K . Намерете отношението на лицето на $ADKE$ към лицето на ABC .

Отг. $\frac{pk(p+k+2)}{(p+1)(k+1)(p+k+1)}$.

3.2.6. В $\triangle ABC$ са построени ъглополовящите AD и BE . Намерете отношението $S_{AED} : S_{ABC}$, ако $AB = 28$, $AC = 21$ и $BC = 20$.



Решение: Ще сравним лицата на $\triangle ABC$ и $\triangle AED$ с лицето на $\triangle ACD$. Като използваме лемата получаваме:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{ADC}} = \frac{AD \cdot AE}{AD \cdot AC} = \frac{AE}{AC}, \text{ но } BE \text{ е ъглополовяща}$$

$$\text{и } \frac{AE}{EC} = \frac{BA}{BC} = \frac{7}{5} \text{ или } \frac{AE}{AC} = \frac{7}{12}. \text{ Аналогично}$$

$$\frac{S_{CAD}}{S_{CAB}} = \frac{CA \cdot CD}{CA \cdot CB} = \frac{CD}{CB} \text{ и понеже } AD \text{ е ъглополовяща } \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{3}. \text{ Така получа-$$

$$\text{ваме, че } \frac{S_{CAD}}{S_{CAB}} = \frac{3}{7}. \text{ Окончателно } S_{ADE} = \frac{7}{12} S_{CAD} = \frac{7}{12} \cdot \frac{3}{7} S_{ABC} = \frac{1}{4} S_{ABC}.$$

Обърнете внимание на използвания при решаването на задачата метод. Често зависимости между елементите на две геометрични фигури намираме като ги сравняваме с трета (метод на междинния елемент).

3.2.7. В $\triangle ABC$ $AC < BC$, AL е ъглополовяща, а CM – медиана. Правата ML пресича правата AC в точка E . Намерете $AC:AB$, ако лицето на $\triangle ABC$ е 45, а лицето на $\triangle CEL$ е 15.

Отг. 2:1.

3.2.8. Лицето на $\triangle ABC$ е 1. Върху медианите му AK , CE и BM са взети точките P , Q и R такива, че $AP:PK = 1:1$; $CQ:QE = 1:2$ и $BR:RM = 5:4$. Намерете лицето на триъгълника PQR .

Отг. 1/12.

3.2.9. (ТУ) Върху страните на $\triangle ABC$ са взети точките P , Q и R такива, че $BP:PC = p$, $CQ:QA = q$, $AR:RB = r$. Изразете лицето на $\triangle PQR$ чрез лицето на $\triangle ABC$.

Отг. $\frac{1-pqr}{(p+1)(q+1)(r+1)} S$.

3.2.10. (УНСС) Върху страните AB , BC и AC на равностранен $\triangle ABC$ с лице S са избрани точките A_1 , B_1 и C_1 така, че $AA_1 = BB_1 = CC_1 = AB/4$. Точките M , N , P са пресечните точки на AB_1 с BC_1 , на BC_1 с CA_1 и на CA_1 с AB_1 . Намерете лицето на $\triangle MNP$.

Решение: Ясно е, че $S_{AA_1C} = \frac{1}{4} S$. От лемата $\frac{S_{CC_1N}}{S_{CA_1A}} = \frac{CC_1 \cdot CN}{CA \cdot CA_1} = \frac{1}{4} \frac{CN}{CA_1}$. Пост-

рояваме $A_1D \parallel BC_1$ и намираме

$$\frac{AD}{DC_1} = \frac{AA_1}{A_1B} = \frac{1}{3}. \text{ Нека } AD = y, \text{ по ус-$$

$$\text{ловие } \frac{CC_1}{C_1A} = \frac{1}{3} \text{ или } CC_1 = \frac{4}{3} y \text{ и}$$

$$CD = \frac{13}{3} y. \text{ По Талес } \frac{CC_1}{CD} = \frac{CN}{CA_1} = \frac{4}{13}.$$

Получихме,

$$\text{че } S_{CC_1N} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{1}{4} S = \frac{1}{52} S. \text{ Разбира се, } S_{CC_1N} = S_{AA_1P} = S_{BB_1M}. \text{ Пресмятаме}$$

$$S_{APNC_1} = S_{ACA_1} - 2S_{CC_1N} = \frac{11}{52} S. \text{ Тогава } S_{MNP} = S - \left(3 \cdot \frac{1}{52} S + 3 \cdot \frac{11}{52} S \right) = \frac{4}{13} S. \text{ Ясно е, че}$$

условието $\triangle ABC$ да е равностранен е излишно.

3.2.11. Върху страните на $\triangle ABC$ с лице p^2 са взети точките D , E и P съответно от AB , BC и CA , като $AD:DB = 1:2$; $BE:EC = 1:2$ и $CP:PA = 1:1$. Намерете лицето на триъгълника, заграден от AE , BP и CD .

Отг. $p^2/7$.

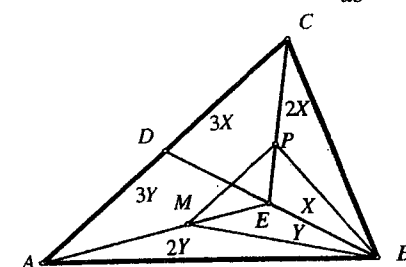
3.2.12. Намерете отношението на лицето на равнобедрен триъгълник с основа a и бедро b към лицето на триъгълник с върхове пресечните точки на ъглополовящите със срещуположните страни.

Отг. $\frac{(a+b)^2}{ab}$.

3.2.13. В $\triangle ABC$ на страната AC е избрана точката D . Нека M и P са медицентровете на $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$. Намерете лицето на $\triangle MPB$, ако лицето на $\triangle ABC$ е 10.

Решение: Нека E е средата на BD .

Съобразяваме, че $S_{AEC} = \frac{S_{ABC}}{2} = 5$. Понеже



M е медицентър в $\triangle ABD$ $S_{BAM} = 2S_{BME}$ и $S_{DEA} = S_{BEA}$. Означаваме $S_{BME} = Y$. Със същите разсъждения, ако означим $S_{BEP} = X$, имаме: $S_{BPC} = 2X$ и $S_{CDE} = 3X$.
Тогава $6X + 6Y = S_{ABC} = 10$. Знаем, че $\frac{S_{MPE}}{S_{DEC}} = \frac{EP \cdot EM}{EC \cdot EA} = \frac{1}{9}$, т.е. $S_{MPE} = \frac{5}{9}$. За лицето на $\triangle MPB$ получаваме: $S_{MPB} = S_{MPE} + X + Y = \frac{5}{9} + \frac{5}{9} = \frac{10}{9}$.

3.2.14. Даден е $\triangle ABC$. Върху страните му AB , BC , и AC са взети съответно точки M , N и P така, че $AM:MB = BN:NC = CP:PA = k$.

а) Намерете дължините на отсечките MN , NP и MP , ако $\triangle ABC$ е правоъгълен с катети $AC = b$, $BC = a$ и $k = 2$.

б) Определете k така, че сумата $S = MN^2 + NP^2 + MP^2$ да е най-малка за произволен триъгълник. **Отг. а)** $\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2}$, $\frac{1}{3}\sqrt{a^2+4b^2}$, $\frac{1}{3}\sqrt{4a^2+b^2}$; б) 1.

3.2.15. $\triangle ABC$ е равнобедрен с основа $AB = a$ и $\angle A = \alpha > 45^\circ$. Намерете S_{CHE} , ако AH е височина, а BE – ъглополовяща. **Отг.** $\frac{a^2(1-2\cos\alpha)\sin 2\alpha}{8\cos\alpha(1+2\cos\alpha)}$.

3.2.16. В $\triangle ABC$ медианата CD пресича ъглополовящата BE в точка K . Намерете $BK:KE$, ако $\angle A = \alpha$ и $\angle C = \gamma$. **Отг.** $\frac{2}{\sin\alpha} \sin \frac{\alpha+\gamma}{2} \cos \frac{\alpha-\gamma}{2}$.

3.2.17. В $\triangle ABC$ точката E е среда на BC , а $M \in AC$ и $AM:MC = 1:2$. AE пресича BM в точка K . Намерете отношението $BK:KM$. Ако P дели BE в отношение $BP:PE = 1:3$, а T е пресечната точка на BM и AP , намерете отношението на лицата на четириъгълника $PEKT$ и $\triangle ABC$. **Отг.** 3:1; 9:40

3.2.18. Лицето на $\triangle ABC$ е 12. На страните BC , CA и AB лежат съответно точките K , M и P като $BC:BK = 3$, $CA:CM = 4$ и $AP = x \cdot AB$. Определете:

а) лицето на триъгълника KMP като функция на x ;

б) положенията на P , при които $\triangle KMP$ има най-голямо и най-малко лице.

Отг. а) $6-5x$; б) $P \equiv A$, $P \equiv B$.

3.2.19. Точката M е среда на страната AB в $\triangle ABC$. Правата l е успоредна на BC и отсича от $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$ равнолицеви триъгълници. Намерете в какво отношение l разделя медианата CM . **Отг.** $\sqrt{2}:2$.

3.2.20. В $\triangle ABC$ точките K и P лежат на AB и BC , а O е пресечната точка на AP и CK . Лицата на $\triangle AOK$ и $\triangle COP$ са равни на 1 и 8, а $\triangle AOC$ и четириъгълника $BKOP$ са равнолицеви. Намерете лицето на $\triangle ABC$. **Отг.** 15.

3.2.21. В $\triangle ABC$ на страната AC е взета точка M , а на BC – точка N . BM и AN се пресичат в точка O . Намерете лицето на $\triangle CMN$, ако лицата на $\triangle AOM$, $\triangle AOB$ и $\triangle BON$ са съответно S_1, S_2, S_3 .

Решение: Означаваме лицето на MNC с Q и на MNO с Q_1 . Ясно е, че

$$\frac{Q_1}{S_1} = \frac{ON}{OA} = \frac{S_3}{S_2}, \text{ т.е. } Q_1 = \frac{S_1 S_3}{S_2}. \text{ От лемата}$$

имаме: $\frac{S_{CMN}}{S_{CAB}} = \frac{CM}{CA} \cdot \frac{CN}{CB}$. Съобразяваме, че

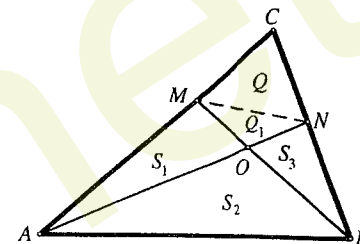
$$\frac{CM}{CA} = \frac{S_{MNC}}{S_{ANC}} = \frac{Q}{Q+Q_1+S_1} \text{ и}$$

$$\frac{CN}{CB} = \frac{S_{CMN}}{S_{CMB}} = \frac{Q}{Q+Q_1+S_3}. \text{ От една страна}$$

$$\frac{S_{CMN}}{S_{CAB}} = \frac{Q}{Q+Q_1+S_1+S_2+S_3}, \text{ а от друга}$$

$$\frac{S_{CMN}}{S_{CAB}} = \frac{Q}{Q+Q_1+S_1} \cdot \frac{Q}{Q+Q_1+S_3}. \text{ Като заместим } Q_1 = \frac{S_1 S_3}{S_2} \text{ и решим полученото за}$$

$$Q \text{ уравнение, достигаем до } Q = \frac{S_1 S_3 (S_1 + S_2)(S_2 + S_3)}{S_2 (S_2^2 - S_1 S_3)}.$$



3.2.22. Външната ъглополовяща на $\triangle ABC$ при върха C пресича правата AB в точка E . През точката E е построена права g , която разделя триъгълника ABC на две равни части. Ако $CA = 6$, $CB = 4$ намерете дължините на отсечките, на които правата g разделя CA и CB . **Отг.** 4 и 2; 3 и 1.

3.3. ОТНОШЕНИЕ НА ОТСЕЧКИ В ТРАПЕЦ И УСПОРЕДНИК

3.3.1. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$), диагоналите се пресичат в точка E , а лицата на $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ са равни на 30 и 20. Намерете S_{CDE} . **Отг.** 8.

3.3.2. Основите на трапеца $ABCD$ са $AB = 8$ и $CD = 6$, а височината му е 7. През точка E от страната BC е прекарана права ED , която пресича диагонала AC в точка F , като $AF:FC = 3:2$. Намерете лицето на $\triangle FEC$.

Решение: По условие $S_{CAB} = 28$, но

$$\frac{S_{CFE}}{S_{CAB}} = \frac{CF \cdot CE}{CA \cdot CB} = \frac{2}{5} \cdot \frac{CE}{CB}. \text{ За да намерим}$$

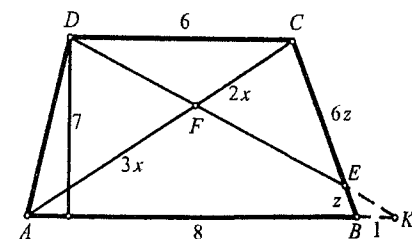
$CE:CB$, продължаваме DE до пресичането ѝ с AB в K . $\triangle AKF \sim \triangle CDF$, т.е.

$$\frac{AK}{CD} = \frac{AF}{CF} = \frac{3}{2}. \text{ Получаваме, че } AK = 9 \text{ и}$$

$BK = 1$. Също така $\triangle CDE \sim \triangle BKE$, следователно $\frac{CE}{BE} = \frac{CD}{BK} = 6$. Тогава $\frac{CE}{CB} = \frac{6}{7}$

$$\text{или } S_{CFE} = \frac{48}{5}.$$

3.3.3. (УАСГ) Трапецът $ABCD$ има основи $AB = 3$ и $CD = 1$. Точката M е



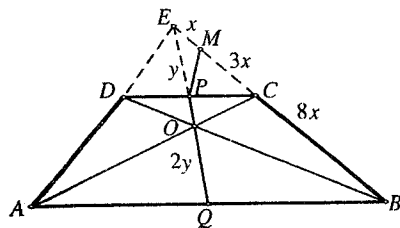
от BC и M не съвпада с B . Правата DM пресича AC в точка P и продължението на AB в Q . Нека $AP:PC = \lambda$.

а) Докажете, че $\lambda > 3$ и че $BQ = \lambda - 3$.

б) Ако $k(\lambda) = \frac{S_{PMC}}{S_{ABC}}$, докажете, че $k(\lambda) = \frac{1}{(\lambda+1)(\lambda-2)}$.

в) Намерете стойностите на λ , за които $\frac{S_{PMC}}{S_{BQM}} = \frac{1}{3}$. **Отг. в)** $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

3.3.4. Лицето на трапеца $ABCD$ е 6. Продълженията на бедрата му AD и BC се пресичат в точка E . През E и пресечната точка на диагоналите O е построена права, която пресича CD в точка P , а AB ($AB > CD$) – в точка Q . Точката M е от отсечката EC и $EM:MC = EP:EQ = 1:3$. Намерете лицето на $\triangle EPM$.



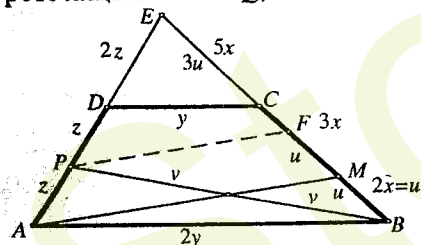
Решение: Докажете сами [7.2.1.], че P и Q са средите на CD и AB (*теорема на Щайнер*). $\triangle CDE \sim \triangle BAE$ и

$$\frac{S_{DCE}}{S_{ABE}} = \left(\frac{EP}{EQ}\right)^2 = \frac{1}{9}, \text{ но } S_{ABE} = S_{ABCD} + S_{DCE} \text{ и}$$

$$\text{от } \frac{S_{DCE}}{S_{DCE} + 6} = \frac{1}{9} \text{ получаваме, че } S_{DCE} = \frac{3}{4} \text{ и}$$

$$S_{PCE} = \frac{3}{8}. \text{ Понеже } \frac{S_{PME}}{S_{PCE}} = \frac{EP}{EP} \cdot \frac{EM}{EC} = \frac{1}{4}, \text{ намираме } S_{EPM} = \frac{3}{32}.$$

3.3.5. Лицето на трапеца $ABCD$ е 30. Точката P е среда на бедрото AD . Точката M е от BC , като $BM:MC = 2:3$. AM и BP се пресичат в точка Q . Намерете лицето на $\triangle APQ$, ако $AB = 2CD$.



Решение: Имаме $\frac{S_{PAQ}}{S_{PAB}} = \frac{PQ}{PB}$, но

$$S_{PAB} = 10 \text{ (защо?)}. \text{ Остава да намерим } \frac{PQ}{PB}.$$

Нека E е пресечната точка на AD и BC . В $\triangle ABE$ CD е средна отсечка. Сведохме задачата до вече позната задача: В $\triangle ABE$ имаме $AP:PE = 1:3$ и $BM:ME = 2:8$. Намерете как AM дели PB . Като я решите, трябва да получите, че $PQ:PB = 1:2$. Тогава $S_{PAQ} = 5$. Опитайте да решите по подобен начин и зад. 3.3.2.

3.3.6. Лицето на трапеца $ABCD$ е 23. Точката M е от бедрото AD такава, че $2MD = AM$, а P е от BC и $3BP = BC$. Ако K е пресечната точка на BM и AP и $AB = 3CD$, намерете лицето на $\triangle AKB$. **Отг.** $9/2$.

3.3.7. В трапеца $ABCD$ с основи AB и CD на AD е взета точка K така, че $AK:KD = 4:3$, а на BC – точка E така, че $BE:EC = 2:3$. AE и BK се пресичат в

точка M , а отношението на лицата на $\triangle ABM$ и трапеца $ABCD$ е $8:45$. Намерете отношението на $AB:CD$. **Отг.** 2.

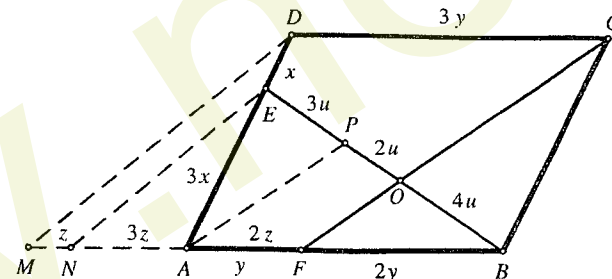
3.3.8. В успоредника $ABCD$ на страните AD и AB са взети точките E и F така, че $AE:ED = 3:1$ и $AF:FB = 1:2$. Ако O е пресечната точка на BE и FC , намерете отношението $EO:OB$.

Решение: Делящата права е CF . Построяваме DM и EN , успоредни на CF и получаваме $AN:NM =$

$= 3:1$. Нека $MN = z$, а

$AF = y$. Понеже

$FM = CD = AB$, имаме $y + 4z = 3y$ или $y = 2z$. Тогава $EO:OB = NF:FA = 5:4$.



3.3.9. В правоъгълника $ABCD$ на страните AB и AD са избрани точките K и E така, че $AK:KB = 2:3$ и $AE:ED = 5:1$. Ако P е пресечната точка на BE и CK и $S_{ABCD} = 30$, намерете лицето на $\triangle KPB$. **Отг.** 3.

3.3.10. Точките M, N, P, Q са среди на страните AB, BC, CD и DA на ромба $ABCD$. Изчислете лицето на фигурата, която е обща част на четириъгълниците $ABCD, ANCQ$ и $BPDM$, ако лицето на ромба е 100. **Отг.** 20.

3.3.11. Точка M е вътрешна за успоредника $ABCD$. Правите BM и AD се пресичат в точка E , а правите DM и AB се пресичат в точка K . Докажете, че четириъгълниците $MKCE$ и $MBAD$ са равнолицеви.

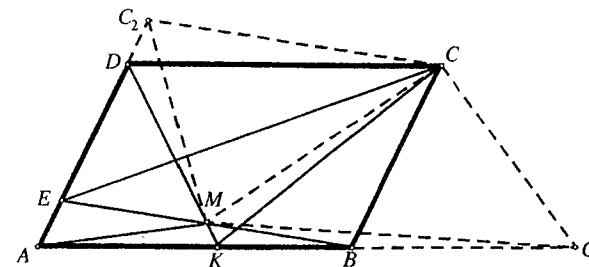
Доказателство: Построяваме $CC_1 \parallel DK$.

Имаме $S_{CMK} = S_{C_1MK}$ (с

обща основа и равни височини). Равнолицеви са и $\triangle C_1MK$ и $\triangle ABM$ ($C_1K = AB$).

Аналогично като построим $CC_2 \parallel BE$

доказваме, че $S_{EMC} = S_{EMC_2} = S_{ADM}$. Тогава $S_{MKCE} = S_{ABMD}$.



4. ВИСОЧИНИ И ЛИЦА

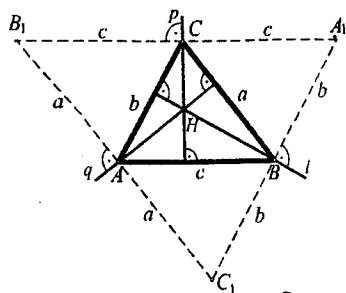
4.1. ВИСОЧИНИ В ТРИЪГЪЛНИКА

Знаем, че:

$$2S = ch_c = bh_b = ah_a; a:b:c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c};$$

$$S = \frac{ch_c}{2} = \frac{abc}{4R} = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c;$$

$$h_c = \frac{2pr}{c} = \frac{ab}{2R} = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



4.1.1. Докажете, че във всеки триъгълник трите височини минават през една и съща точка (*теорема на Архимед*).

Доказателство:

I начин: Построяваме $\Delta A_1B_1C_1$ със страни $2a$, $2b$ и $2c$, съответно успоредни на BC , CA и AB . Симетралите p , q и l на новия триъгълник се пресичат в една точка H . Тя е ортоцентър за ΔABC .

II начин: Да допуснем, че височините BH_2 и CH_3 се пресичат в точка H , а BH_2 и AH_1 – в точка H_0 . От $\Delta AH_0H_2 \sim \Delta BCH_2$ имаме:

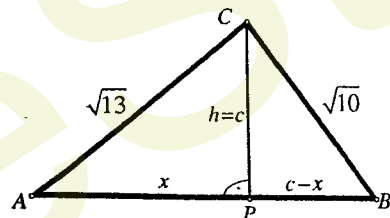
$$\frac{H_0H_2}{AH_2} = \frac{CH_2}{BH_2}, \text{ т.е. } H_0H_2 = \frac{AH_2 \cdot CH_2}{BH_2}.$$

$$\text{Аналогично от } \Delta CHN_2 \sim \Delta AHN_2 \text{ получаваме: } \frac{HN_2}{CH_2} = \frac{AH_2}{BH_2},$$

$$HN_2 = \frac{AH_2 \cdot CH_2}{BH_2}.$$

Понеже $H_0H_2 = HN_2$, H_0 и N съвпадат.

4.1.2. В остроъгълния ΔABC $AC = \sqrt{13}$, $BC = \sqrt{10}$. Намерете AB , ако тя е равна на височината към нея.



Решение: От ΔAPC $h_c^2 = c^2 = 13 - x^2$, а от ΔBPC $h_c^2 = c^2 = 10 - (c-x)^2$.

Тогава $13 - x^2 = 10 - (c-x)^2$. Намираме $x = \frac{3+c^2}{2c}$. Понеже ΔABC е остроъгълен,

$x < c$. От $\frac{3+c^2}{2c} < c$ следва, че $c > \sqrt{3}$.

Имаме $c^2 = 13 - \frac{9+6c^2+c^4}{2c^2}$ или $2c^4 - 4c^2 + 9 = 0$. От решенията на това

уравнение условието $c > \sqrt{3}$ изпълнява само $c = 3$.

4.1.3. Намерете лицето на равнобедрения ΔABC ($AC = BC$), ако височината $CD = 10$, а височината $AP = 12$. **Отг.** 75.

4.1.4. В равнобедрен триъгълник височините, спуснати към основата и бедрото, са m и n . Намерете страните и лицето на триъгълника.

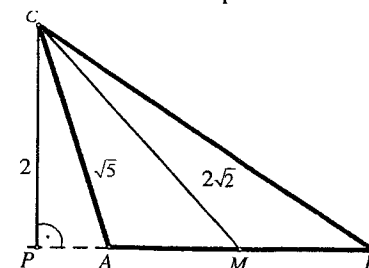
$$\text{Отг. } \frac{2mn}{\sqrt{4m^2 - n^2}}, \frac{2m^2}{\sqrt{4m^2 - n^2}}, \frac{m^2n}{\sqrt{4m^2 - n^2}}.$$

4.1.5. Върху основата AB на равнобедрен триъгълник като на диаметър е построена окръжност, пресичаща AC в точка D така, че $CD:DA = 3:2$. Намерете лицето на ΔABC , ако $BD = \frac{12}{\sqrt{5}}$. **Отг.** 18.

4.1.6. В ΔABC $b = \sqrt{5}$, $h_c = 2$, $m_c = 2\sqrt{2}$, $\angle CAB > 90^\circ$. Намерете BC .

Решение: От правоъгълните триъгълници MCP и ACP имаме $PM^2 = (2\sqrt{2})^2 - 2^2$ и $PA^2 = (\sqrt{5})^2 - 2^2$, т.е. $PM = 2$, $PA = 1$.

$$AM = PM - PA = 1, \text{ т.е. } AB = 2. \text{ Пресмятаме } BC = \sqrt{BP^2 + CP^2} = \sqrt{13}.$$



4.1.7. Лицето на ΔABC е 16. Намерете AC , ако $AB = 5$, $BC = 8$ и $\angle ACB > 90^\circ$. **Отг.** $\sqrt{137}$.

4.1.8. В ΔABC с диаметър страната AB е построена окръжност, пресичаща AC в точка D , като $AD:DC = 12:5$. Намерете лицето на ΔABC , ако $AB = 26$, а $\angle ACB = 45^\circ$. **Отг.** 170.

4.1.9. CD е височина в остроъгълния ΔABC . Ако $\angle ACB = 60^\circ$, $BC = a$ и $S_{ACD} : S_{BCD} = 2:5$. Намерете лицето на ΔABC и радиуса на описаната окръжност. **Отг.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{5}$, $\frac{a\sqrt{7}}{5}$.

4.1.10. В ΔABC са построени височините AE и CD . Намерете AB , ако $BD = 18$, $BC = 30$ и $AE = 20$. **Отг.** 25.

4.1.11. В остроъгълния ΔABC медианите BM и CN са равни на 4 и 5, а височината $AD = 6$. Намерете лицето на ΔABC . **Отг.** $2(\sqrt{7} + 4)$.

4.1.12. В ΔABC $AB = AC = 5\sqrt{7}$, $BC = 6\sqrt{7}$. Намерете разстоянието от върха B до пресечната точка на височините. **Отг.** 9.

4.1.13. Докажете, че за всеки триъгълник са в сила равенствата:

а) $r_a r_b r_c = p^2 r$; б) $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$;

в) $\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a} = \frac{2}{h_a}$; г) $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} = \frac{1}{r_a}$;

д) $r_a + r_b + r_c - r = 4R$.

Доказателство: д) От $S = (p-a)r_a$ имаме $r_a = \frac{S}{p-a} = \frac{S^2}{(p-a)S}$ или

$$r_a = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)S}. \text{ Аналогични равенства получаваме и за } r_b, r_c \text{ и } r.$$

Тогава $r_a + r_b + r_c - r =$

$$= \frac{p(p-b)(p-c) + p(p-a)(p-c) + p(p-a)(p-b) - (p-a)(p-b)(p-c)}{S} =$$

$$= \frac{1}{S}(2p^3 - p^2(a+b+c) + abc) = \frac{abc}{S} = 4R.$$

4.1.14. Височините на $\triangle ABC$ са h_a, h_b и h_c . Намерете радиуса на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Решение: Знаем, че $a = \frac{2S}{h_a}$, $b = \frac{2S}{h_b}$, $c = \frac{2S}{h_c}$. Тогава от $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$

получаваме $p = \frac{S}{h_a} + \frac{S}{h_b} + \frac{S}{h_c}$ и $\frac{1}{r} = \frac{p}{S} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

4.1.15. Височините на триъгълник са равни на 12, 15 и 20. Докажете, че той е правоъгълен и намерете лицето му. Отг. 150.

4.1.16. Намерете лицето на триъгълник с височини h_a, h_b и h_c .

Решение: Имаме [4.1.15] $p = \frac{a+b+c}{2} = S \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right)$, като за краткост

означаваме $p = SH$. Аналогично $p-a = S \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} \right) = SH_a$,

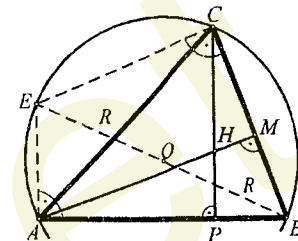
$$p-b = S \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b} \right) = SH_b \text{ и } p-c = S \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \right) = SH_c.$$

$$\text{Тогава } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{S^4 H H_a H_b H_c} \text{ или } S = \frac{1}{\sqrt{H H_a H_b H_c}}.$$

4.1.17. Намерете ъглите на триъгълник с радиус на вписаната окръжност $r = 1$, ако височините му са цели числа. Отг. $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$.

4.1.18. В $\triangle ABC$ H е ортоцентър. Докажете, че $AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2 = CH^2 + AB^2 = 4R^2$.

Доказателство: Построяваме диаметъра BE . Четириъгълникът $AHCE$ е успоредник, защото $AE \perp AB$, $CH \perp AB$, т.е. $AE \parallel CH$ и аналогично $CE \parallel AH$. От правоъгълния $\triangle BAE$ $AE^2 + AB^2 = BE^2$, но $AE = CH$, т.е. $CH^2 + AB^2 = 4R^2$.



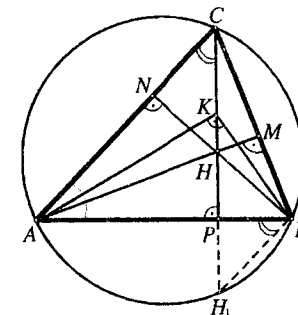
4.1.19. Нека O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, а CD е височина. Докажете, че $\angle ACD = \angle BCO$.

4.1.20. Лицето на $\triangle ABC$ е S , а лицето на $\triangle AHB$ е Q , където H е ортоцентърът на триъгълника. Нека K е от правата HC , като $\angle ABK = 90^\circ$. Намерете лицето на $\triangle ABK$.

Решение: Нека H_1 е пресечната точка на CH с описаната окръжност. $\triangle HPB \cong \triangle H_1PB$ ($\angle ABH_1 = \angle ACH_1$ като вписани).

Тогава $HP = H_1P$ (така доказахме, че симетричната на ортоцентъра H спрямо страната AB лежи на описаната окръжност). От теоремата за хордите имаме $CP \cdot PH_1 = BP \cdot PA$.

KP е височина в правоъгълния $\triangle AKB$, $KP^2 = BP \cdot PA$. Следователно $CP \cdot HP = KP^2$. Умножаваме двете страни с AB^2 и получаваме $2S_{ABH} \cdot 2S_{ABC} = 4S_{ABK}^2$ или $S_{ABK} = \sqrt{Q \cdot S}$.

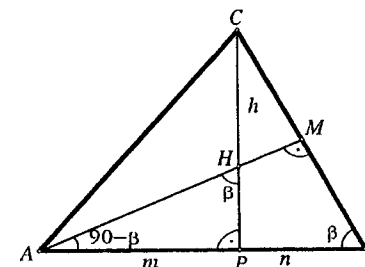


4.2. ПОДОБНИ ТРИЪГЪЛНИЦИ. ВПИСАНИ ЧЕТИРИЪГЪЛНИЦИ

4.2.1. Височината CP в остроъгълния $\triangle ABC$ разделя AB на отсечки $AP=m$ и $BP=n$. Ако H е ортоцентър и $CP=h$, намерете CH .

Решение: $\triangle APH \sim \triangle CPB$; $\frac{HP}{AP} = \frac{BP}{CP}$, т.е.

$$HP = \frac{mn}{h}; CH = h - \frac{mn}{h} = \frac{h^2 - mn}{h}.$$

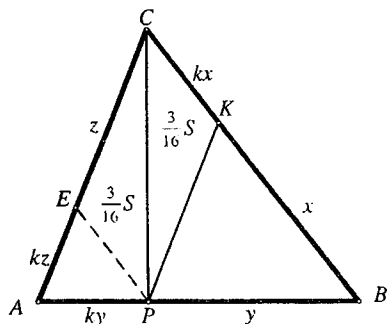


4.2.2. В $\triangle ABC$ CP е височина. Правата PK ($K \in BC$) е успоредна на AC . Намерете $CK:KB$, ако $S_{CPK} : S_{ABC} = 3:16$.

Решение:

Означаваме $BK = x$, а $KC = kx$. Построяваме $PE \parallel BC$. Ясно е, че

$$S_{PEC} = \frac{3}{16} S_{ABC}. \text{ По Талес получаваме } BP = y, PA = ky \text{ и } CE = z, EA = kz.$$



Имаме $\frac{S_{AEP}}{S_{CEP}} = \frac{AE}{EC} = \frac{kz}{z} = k$ и $\frac{S_{BKP}}{S_{CKP}} = \frac{KB}{CK} = \frac{1}{k}$, $S_{AEP} = \frac{3kS}{16}$ и $S_{BKP} = \frac{3S}{16k}$. От $\frac{3kS}{16} + \frac{3S}{16k} + \frac{6S}{16} = S$ получаваме $3k^2 - 10k + 3 = 0$ с корени $k_1 = \frac{1}{3}$, $k_2 = 3$.

4.2.3. В $\triangle ABC$ със страни $AC=10$, $BC=17$ и $AB=21$ е вписан правоъгълник с периметър 24 така, че едната му страна лежи на AB . Намерете страните на правоъгълника. **Отг.** 72/13, 84/13.

4.2.4. В $\triangle ABC$ петата D на височината CD лежи на отсечката AB . $AB=c$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle BCD=\beta$. В $\triangle ABC$ е вписан правоъгълник $MNPQ$ така, че върховете му M и N лежат на AB , P – на BC и Q на AC .

а) Ако α и β са фиксирани, намерете максималното лице на $MNPQ$.

б) Ако $\angle BCA=90^\circ$, намерете α и β , за които лицето на $MNPQ$ да е най-голямо.

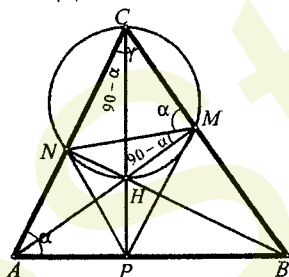
Отг. а) $\frac{\sin \alpha \cos \beta}{4 \cos(\alpha - \beta)} c^2$; б) $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$.

4.2.5. В $\triangle ABC$ ($AC=BC$) височините AF и CD се пресичат в точка H , като $CH:HD=n$. В какво отношение ъглополовящата AE дели CD . **Отг.** $\sqrt{n+2}$.

4.2.6. В $\triangle ABC$ ($AC=BC$) ъглополовящата AE пресича височината CD в точка J , като $JC:JD=3$. В какво отношение височината AF дели CD . **Отг.** 7:1.

4.2.7. В остроъгълн $\triangle ABC$ с ъгли α , β и γ AM , BN и CP са височини. Докажете, че $\triangle MNC \sim \triangle ABC$.

Доказателство:



I начин: $\triangle AMC \sim \triangle BNC$ или $\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB}$. Тогава по втори признак са подобни и $\triangle MNC$ и $\triangle ABC$. Коефициентът на подобие е $k = \frac{CM}{CA} = \cos \gamma$. Аналогично $\triangle ANP \sim \triangle ABC$ ($k = \cos \alpha$) и $\triangle BMP \sim \triangle ABC$ ($k = \cos \beta$). **Запомнете това свойство.**

II начин: Около $MCNH$ можем да опишем окръжност с диаметър CH . $\angle ACH = 90^\circ - \alpha$ и $\angle NMH = \angle ACH$ (като вписани). Тогава

$$\angle NMC = 90^\circ - \angle NMH = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha.$$

4.2.8. Докажете, че височините на остроъгълн триъгълник са ъглополовящи в триъгълника с върхове петите на височините.

4.2.9. Лицето на остроъгълния $\triangle ABC$ е 18. AM и CP са височини $S_{BMP}=2$, а $MP=2\sqrt{2}$. Намерете радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Решение: Знаем, че $\triangle BMP \sim \triangle BAC$ ($k = \cos \beta$). Тогава $S_{BMP} : S_{BAC} = \cos^2 \beta$, следователно $\cos \beta = \frac{1}{3}$ и $\sin \beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. От $\frac{MP}{AC} = k = \frac{1}{3}$ намираме $AC = 6\sqrt{2}$.

По синусова теорема $R = \frac{AC}{2 \sin \beta} = \frac{9}{2}$.

4.2.10. AP и CQ са височини в остроъгълния $\triangle ABC$. Намерете AC , ако периметрите на $\triangle ABC$ и $\triangle BPQ$ са 15 и 9, а радиусът на описаната около $\triangle BPQ$ окръжност е $\frac{9}{5}$. **Отг.** $\frac{24}{5}$.

4.2.11. AM и CP са височини в остроъгълния $\triangle ABC$. Намерете радиуса на описаната около $\triangle BMP$ окръжност, ако $AC=b$ и $\angle ABC=\beta$. **Отг.** $\frac{b}{2} \cot \beta$.

4.2.12. (ВУЗ) В $\triangle ABC$ ($AC=BC$) $AB=12$, $AC=10$. С диаметър AC е описана окръжност. Намерете лицето на четириъгълника с върхове пресечните точки на окръжността със страните на триъгълника. **Отг.** 30,72.

4.2.13. (ВУЗ) BH_2 и CH_3 са височини в $\triangle ABC$ със страни $AB=9$, $BC=10$ и $AC=17$.

а) Ако S е пресечната точка на правите BC и H_2H_3 докажете, че триъгълниците BSH_2 и CSH_3 са подобни.

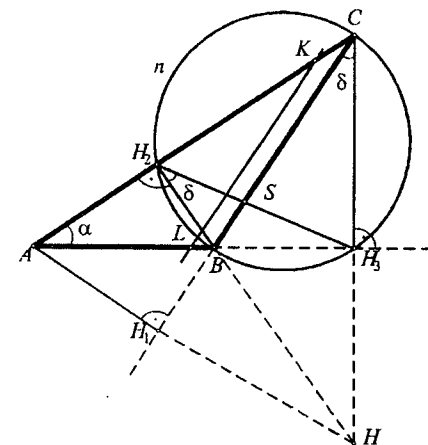
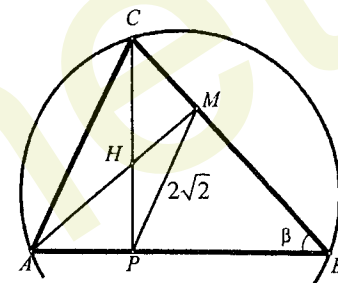
б) Ако K е от AC , а L от AB и $AK = AH_3$, $AL = AH_2$, докажете, че $KL \parallel BC$.

Решение: Понеже $17^2 > 9^2 + 10^2$, $\angle ABC > 90^\circ$. Тъй като четириъгълникът BH_3CH_2 има два срещуположни прави ъгъла, то около него може да се опише окръжност.

$\angle BH_2H_3 = \angle BCH_3 = \delta$ (вписани) и $\angle BSH_2 = \angle CSH_3$ (връхни), следователно $\triangle BSH_2 \sim \triangle CSH_3$. Също така и $\triangle ABH_2 \sim \triangle ACH_3$ (90° и α).

Тогава $\frac{AH_2}{AB} = \frac{AH_3}{AC}$ и $\frac{AL}{AB} = \frac{AK}{AC}$, по Талес $LK \parallel BC$.

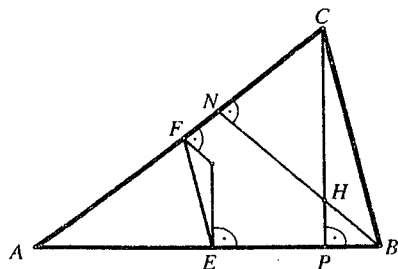
Забележка: При тъпоъгълн триъгълник, например с връх B на тъпия ъгъл, ор-



тоцентърът H е външна точка за триъгълника и заедно с другите два върха (A и C), образува остроъгълен триъгълник, на който върхът B служи за ортоцентър.

4.2.14. (ВУЗ) BB_1 и CC_1 са височини в $\triangle ABC$ ($\angle ABC > 90^\circ$). Докажете, че:

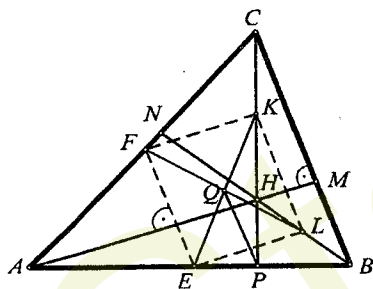
- а) ако M е пресечната точка на B_1C_1 и BC , а S_1 и S_2 са лицата на $\triangle MCC_1$ и $\triangle MBV_1$, то $BM \cdot CM = B_1M \cdot C_1M$ и $S_1 : S_2 = AC^2 : BC^2$;
б) лицето на $\triangle B_1MC$ е по-голямо от лицето на $\triangle BMC_1$.



4.2.15. Даден е $\triangle ABC$ с ортоцентър H и център O на описаната окръжност. Ако E е среда на AB , докажете, че $CH = 2EO$.

Доказателство: Нека F е среда на страната AC , тогава $\triangle EFO$ е подобен на $\triangle CHB$, защото трите страни на единия са успоредни на трите страни на другия. Понеже EF е средна отсечка на $\triangle ABC$, $BC = 2EF$, т.е. коефициентът на подобие на двата триъгълника е 2. Тогава $CH = 2EO$.

4.2.16. Докажете, че средите на страните, петите на височините и средите на отсечките, определени от ортоцентъра и върховете на триъгълника лежат на една окръжност (*окръжност на 9-те точки или окръжност на Фойербиха*).



Доказателство: $LK \parallel BC$ и $2LK = BC$, защото LK е средна отсечка в $\triangle BCH$. Отсечката $EF \parallel BC$ и $2EF = BC$ (EF е средна отсечка $\triangle ABC$). Аналогично FK и EL са средни отсечки в $\triangle AMC$ и $\triangle AMB$ и $FK \parallel EL$. Следователно $ELKF$ е правоъгълник. Ако Q е пресечната точка на диагоналите му, то $QE = QL = QK = QF$. PQ е медиана в правоъгълния $\triangle EPK$, т.е. $QP = QE$. Аналогично и останалите среди и пети са на едно и също разстояние от точката Q . Q е центърът на окръжността на 9-те точки.

4.2.17. Докажете, че за всеки триъгълник центърът O на описаната окръжност, медицентърът G , центърът Q на окръжността на деветте точки и ортоцентърът H лежат на една права (*права на Ойлер*), като $OG : GQ : QH = 2 : 1 : 3$.

4.2.18. Докажете, че ако H е ортоцентърът на неправоеъгълен $\triangle ABC$, то ABC , ABH , BCH и CAH имат обща окръжност на 9-те точки (*теорема на Хамилтон*).

4.2.19. Три еднакви окръжности минават през точката H и се пресичат две по две. Докажете, че вторите им пресечни точки са върхове на триъгълник, който има за ортоцентър точката H .

4.2.20. Точките A, B, C, D са в една равнина и $AB \perp CD$, $AC \perp BD$. Докажете, че $AD \perp BC$.

4.2.21. H е ортоцентър в $\triangle ABC$ ($AC = BC$). Ако $AH = m$, $CH = n$, намерете радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. **Отг.** $\frac{1}{4}(\sqrt{8m^2 + n^2} \pm n)$.

4.2.22. Ортоцентърът на $\triangle ABC$ ($AC = BC$) лежи на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Докажете, че $4AC = 3AB$ и $\tan \gamma = 8 \tan \alpha$.

4.2.23. В $\triangle ABC$ височината CP се разделя от ортоцентъра на две равни части. Докажете, че $\tan \alpha \tan \beta = 2$.

4.2.24. (СУ) Височините AM и BN в остроъгълния $\triangle ABC$ се пресичат в точка H . Разстоянията от центъра O на описаната около $\triangle ABC$ окръжност до BC и AC са 1 и $3\sqrt{2}$, а лицето на $\triangle AHB$ е равно на 6. Намерете:

- а) $\angle ACB$ и $\angle NOM$;
б) радиуса R на описаната около $\triangle ABC$ окръжност и радиуса r на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Решение: а) Нека L и K са средите на BC и AC . $\triangle ANH \sim \triangle LKO$ ($k = 2$). Тогава $AH = 2$ и $BH = 6\sqrt{2}$. Понеже $\angle AHB = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, $S_{AHB} = \frac{1}{2} AH \cdot BH \sin(180^\circ - \gamma) = 6$.

Намираме, че $\sin \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, т.е. $\gamma = 45^\circ$.

$\angle AOB = 2\gamma = 90^\circ$. Разбираме, че точките A, N, O, M, B лежат на една окръжност с диаметър AB . Дъгата $\widehat{AN} = 2(90^\circ - \alpha)$, а $\widehat{BM} = 2(90^\circ - \beta)$.

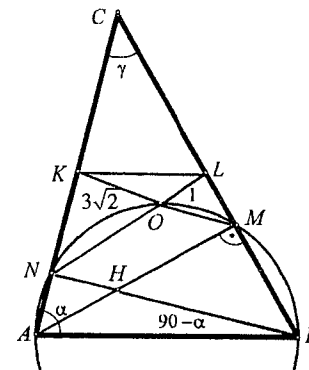
Тогава $\angle NOM = \angle NOA + \angle AOB + \angle BOM = 90^\circ - \alpha + 90^\circ + 90^\circ - \beta = 135^\circ$.

б) $AB^2 = AH^2 + BH^2 - 2 \cdot AH \cdot BH \cos 135^\circ = 100$ или $AB = 10$. По синусова теорема $R = \frac{AB}{2 \sin 45^\circ} = 5\sqrt{2}$. Пресмятаме $CK^2 = R^2 - OK^2 = 32$, $AC = 2CK = 8\sqrt{2}$. Аналогично $BC = 14$.

$$S_{ABC} = pr = \frac{1}{2} CA \cdot CB \sin 45^\circ = \frac{1}{2} 8\sqrt{2} \cdot 14 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 56. \text{ Тогава } r = \frac{56}{p} = \frac{56}{12 + 4\sqrt{2}}.$$

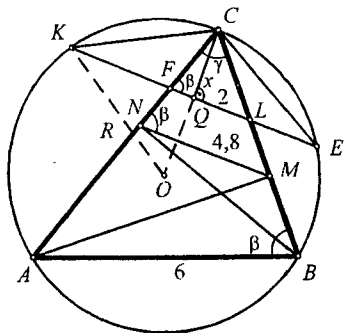
4.2.25. В $\triangle ABC$ височината CD се разделя от точката E в отношение 3:1, считано от C . Средите на AD и DB са M и N . Докажете, че E е ортоцентър на $\triangle MNC$.

4.2.26. AA_1 и BB_1 са височини в $\triangle ABC$ ($\gamma \neq 90^\circ$). Правата g пресича AC и



BC и е успоредна на A_1B_1 . Докажете, че g отсича от $\triangle ABC$ четириъгълник, около който може да се опише окръжност.

4.2.27. AM и BN са височини в $\triangle ABC$ и $AB=6$. Хордата KE от окръжността, описана около $\triangle ABC$, пресича AC и BC в F и L . Ако $\angle ABC = \angle CFL$, $MN = \frac{24}{5}$, $LF=2$ и $S_{ABLF}=8$, намерете височината на $\triangle KEC$, спусната от върха C , и неговото лице.



Решение: Построяваме височините AM и BN . Знаем, че $\triangle MNC \sim \triangle ABC$ ($k = \cos \gamma$) [4.2.7.],

$$\text{т.е. } \cos \gamma = \frac{MN}{AB} = \frac{4}{5}, \sin \gamma = \frac{3}{5} \text{ и } R = \frac{AB}{2 \sin \gamma} = 10.$$

$$\triangle LFC \sim \triangle ABC \text{ } (\beta \text{ и } \gamma), \text{ тогава } \frac{S_{LFC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{2}{6}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

$$\text{или } \frac{S_{LFC}}{S_{LFC} + S_{ABLF}} = \frac{1}{9}. \text{ Понеже } S_{ABLF} = 8, \text{ получаваме, че } S_{LFC} = 1, \text{ но } LF = 2, \text{ т.е. } CQ = 1.$$

От правоъгълния $\triangle KOQ$ имаме:

$$QK = \sqrt{R^2 - (R - CQ)^2}, QK = 3. Q \text{ е среда на } KE, \text{ т.е. } KE = 6 \text{ и } S_{KEC} = 3.$$

4.3.ОРТОЦЕНТРИЧЕН ПЕДАЛЕН ТРИЪГЪЛНИК

Триъгълника с върхове петите на височините наричаме **ортоцентричен педален триъгълник**.

За краткост ще използваме само педален триъгълник.

4.3.1. Остроъгълният $\triangle ABC$ има страни a, b, c , ъгли α, β, γ , височини AM , BN , CP и описана окръжност k с радиус R .

а) Докажете, че симетричните точки на ортоцентъра H на $\triangle ABC$ лежат на окръжността k .

б) Намерете ъглите на $\triangle MNP$.

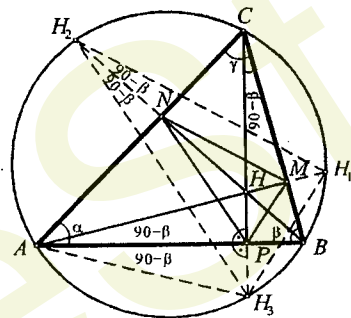
в) Докажете, че височините на $\triangle ABC$ са ъглополовящи на $\triangle MNP$.

г) Докажете, че в $\triangle MNP$ $NP = a \cos \alpha$, $PM = b \cos \beta$, $MN = c \cos \gamma$.

Доказателство:

а) $\angle BAM = 90^\circ - \beta = \angle BCH_3 = \angle BAH_3$ (като

вписани). Тогава правоъгълните $\triangle AHP$ и $\triangle AH_3P$ са еднакви и $HP = PH_3$. По същия начин доказваме, че $HM = MH_1$ и $HN = NH_2$. Ясно е, че MP е средна отсечка в $\triangle HH_1H_3$. Следователно $\triangle H_1H_2H_3 \sim \triangle MNP$ ($k=2$).



б) Ъглите на $\triangle MNP$ са равни на ъглите на $\triangle H_1H_2H_3$, които са вписани в окръжността и са равни съответно на $180^\circ - 2\alpha$, $180^\circ - 2\beta$ и $180^\circ - 2\gamma$.

в) $\angle H_3H_2B = \angle H_1H_2B = 90^\circ - \beta$, с което доказахме, че височините на $\triangle ABC$ са ъглополовящите на $\triangle MNP$.

г) $2MP = H_1H_3 = 2R \sin(180^\circ - 2\beta) = 4R \sin \beta \cos \beta = 2AC \cos \beta$ или $MP = AC \cos \beta$. Аналогично $MN = AB \cos \gamma$ и $NP = BC \cos \alpha$.

4.3.2. Намерете ъглите на остроъгълен триъгълник, ако продълженията на височините разделят описаната около него окръжност на дъги, градусните мерки на които се отнасят както $q:s:t$.

$$\text{Отг. } 90^\circ - \frac{90t}{q+s+t}, 90^\circ - \frac{90q}{q+s+t}, 90^\circ - \frac{90s}{q+s+t}.$$

4.3.3. В $\triangle ABC$ $\angle A = 60^\circ$ и $\angle B = 45^\circ$. Продълженията на височините на $\triangle ABC$ пресичат описаната окръжност в точките M, N и P . Намерете отношението на лицата на $\triangle ABC$ и $\triangle MNP$.

$$\text{Отг. } \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

4.3.4. Продълженията на височините AM и CN в остроъгълния $\triangle ABC$ пресичат описаната окръжност в точките P и Q . Намерете радиуса на тази окръжност, ако $AC = b$ и $PQ = \frac{6}{5}b$.

$$\text{Отг. } \frac{5}{8}b.$$

4.3.5. (УАСТ) Описаната около $\triangle ABC$ окръжност има радиус R . Ъглите на триъгълника α, β, γ образуват аритметична прогресия, като $\alpha = 45^\circ$. Точките L, M и N са симетричните на ортоцентъра H относно страните BC, AC и AB . Намерете периметъра на $ANBLCM$.

$$\text{Отг. } R(2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}).$$

4.3.6. Окръжност с диаметър страната AB на $\triangle ABC$ пресича AC и BC в точките D и E . DE разделя лицето на $\triangle ABC$ на две равни части и образува с AB ъгъл от 15° . Намерете ъглите на $\triangle ABC$.

$$\text{Отг. } 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ.$$

4.3.7. Лицето на равнобедрен триъгълник е S , а ъгълът при основата е α ($\alpha > 45^\circ$). Намерете лицето на педалния триъгълник.

$$\text{Отг. } -\frac{S \cot \alpha \cdot \sin 4\alpha}{2}.$$

4.3.8. Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако страните на педалния му триъгълник са 5, 12 и 13.

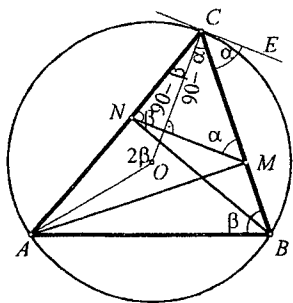
$$\text{Отг. } 195.$$

4.3.9. (СУ) $\triangle ABC$ е остроъгълен с ортоцентър H и радиус на описаната окръжност R . Ако $\angle ACB = 45^\circ$ и $AH = R$ намерете лицето на $\triangle ABC$.

$$\text{Отг. } \frac{1}{4}R^2(3 + \sqrt{3}).$$

4.3.10. Докажете, че радиусите OA, OB и OC на окръжността, описана около остроъгълен $\triangle ABC$, са перпендикулярни на страните на педалния триъгълник.

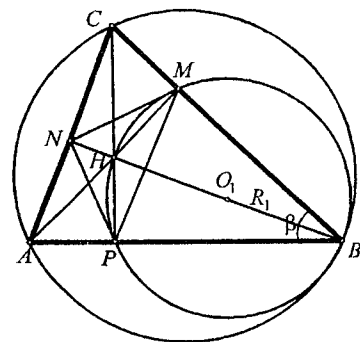
Доказателство:



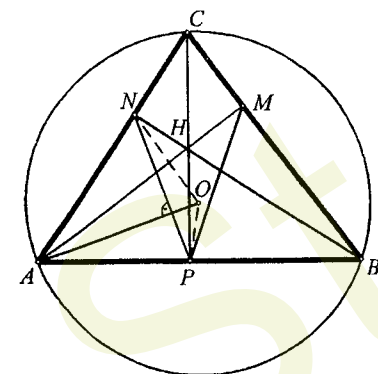
I начин: Построяваме допирателната CE и тогава $\angle BAC = \angle BCE = \alpha$ ($\angle BAC$ е вписан, а $\angle BCE$ – периферен). Знаем, че и $\angle NMC = \alpha$ [4.1.7.]. Тогава $CE \parallel NM$ и от $OC \perp CE$ следва, че $OC \perp NM$.

II начин: $\angle AOC = 2\beta$ (централен), а $\angle NCO = 90^\circ - \beta$. От $\angle CNM = \beta$, следва че $OC \perp MN$.

4.3.11. Остроъгълният $\triangle ABC$ има страни a, b, c . Докажете, че периметърът на педалния му триъгълник е равен на $\frac{8S^2}{abc}$.



Решение: I начин: От [4.1.7.] знаем, че $\triangle BMP \sim \triangle ABC$ ($k = \cos \beta$) или $\frac{PM}{CA} = \frac{2R_1}{2R} = \frac{BH}{2R}$. Тогава $PM = \frac{CA(NB - NH)}{2R} = \frac{2S - 2S_{CHA}}{2R}$. Аналогично $MN = \frac{2S - 2S_{AHB}}{2R}$ и $NP = \frac{2S - 2S_{BHC}}{2R}$.
 $P_{MNP} = \frac{6S - 2(S_{CHA} + S_{AHB} + S_{BHC})}{2R}$, т.е.
 $P_{MNP} = \frac{2S}{R} = \frac{8S^2}{abc}$.



II начин: От [4.3.10.] знаем, че $OA \perp NP$, $OB \perp PM$, $OC \perp MN$.
 $S = S_{APON} + S_{BMOP} + S_{CNOM}$.
 $S = \frac{NP \cdot OA}{2} + \frac{PM \cdot OB}{2} + \frac{MN \cdot OC}{2}$ или $S = \frac{P_{MNP} \cdot R}{2}$,
 т.е. $P_{MNP} = \frac{2S}{R}$. Тъй като $R = \frac{abc}{4S}$, получаваме
 $P_{MNP} = \frac{8S^2}{abc}$.

Можете да решите задачата и като изразите $MN = AB \cos \gamma = R \sin 2\gamma$, аналогично $NP = R \sin 2\alpha$, $MP = R \sin 2\beta$, и преобразувате получения тригонометричен израз.

4.3.12. (СУ) AM и CP са височини в остроъгълния $\triangle ABC$. Описаната около $\triangle ABC$ окръжност е с център O и радиус R . K и Q са центровете на описаните около $\triangle AMP$ и $\triangle BMP$ окръжности.

а) Докажете, че $KQ = R$.

б) Докажете, че ако $AB = R\sqrt{2}$, правите AO и KQ са перпендикулярни.

в) Намерете стойността на $\angle ABC$, при която лицето на четириъгълника $MKPQ$ е най-голямо. **Отг. в) 45° .**

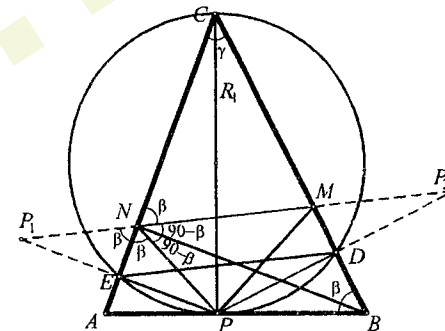
4.3.13. В $\triangle ABC$ са построени височините AM, BN и CP . От P са спуснати перпендикулярите PD и PE към BC и AC . Докажете, че DE е равна на полупериметъра на $\triangle MNP$.

Доказателство:

I начин: Около $CDPE$ може да опишем окръжност с диаметър CP . Тогава $DE = 2 \frac{CP}{2} \sin \gamma$, но $CP = h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2abc}{4Rc} = \frac{ab}{2R}$. Получаваме

$$DE = \frac{ab}{2R} \sin \gamma = \frac{S}{R}. \text{ От [4.3.11.] } S = \frac{1}{2} R \cdot P_{MNP} \text{ и следователно } DE = \frac{P_{MNP}}{2}.$$

II начин (конструктивен): Построяваме точките P_1 и P_2 , симетрични на P относно AC и BC . Тогава $NP = NP_1$ и $MP = MP_1$. $\angle P_1NM = 180^\circ$ и $\angle P_2MN = 180^\circ$. Точките P_1, M, N и P_2 лежат на една права. Периметърът на $\triangle MNP$ е равен на P_1P_2 , а DE е средна отсечка в $\triangle P_1PP_2$, т.е. $DE = \frac{1}{2} P_{MNP}$.



4.3.14. Докажете, че от всички триъгълници, вписани в даден остроъгълен триъгълник, педалният триъгълник има най-малък периметър.

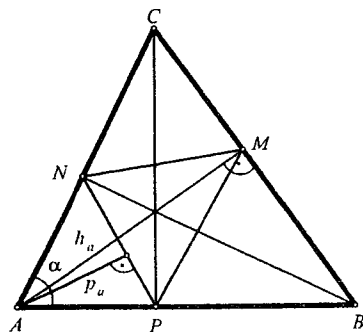
Доказателство: В предходната задача доказахме, че

$DE = \frac{1}{2} P_{MNP} = CP \sin \gamma$, но $\sin \gamma$ е постоянна величина, а CP е най-къса, когато е височина, т.е. P е пета на височината от C . С аналогични разсъждения установяваме, че и другите два върха на търсения триъгълник са пети на съответните височини.

4.3.15. Ъглите на $\triangle ABC$ са α, β и γ , а височината $CD = h$. На CD като диаметър е построена окръжност k . Пресечните точки E и F на k с AC и BC са съединени с D . Намерете S_{DFCE} . **Отг. $\frac{h^2 \sin \gamma \cos(\alpha - \beta)}{2}$.**

4.3.16. Остроъгълният $\triangle ABC$ е вписан в окръжност с радиус R . Страните му са $BC = a, CA = b, AB = c$, а височините – $AM = h_a, BN = h_b, CP = h_c$. Ако p_a, p_b и p_c са разстоянията от върховете A, B и C на триъгълника до NP, PM и MN , докажете, че:

$$\text{а) } \frac{p_a}{h_a} = \cos \angle CAB; \text{ б) } p_a + p_b + p_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R}; \text{ в) } \frac{p_a}{a^2} + \frac{p_b}{b^2} + \frac{p_c}{c^2} \geq \frac{3}{4R}.$$



Доказателство: а) Знаем, че [4.1.7.] $\triangle NPA \sim \triangle ABC$ ($k = \cos \alpha$). Отношението на съответните височини е $\frac{p_a}{h_a} = \cos \alpha$.

б) Имаме $p_a = h_a \cos \alpha = h_a \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, но $h_a = \frac{bc}{2R}$ [4.3.13], получаваме $p_a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4R}$. Подобни формули получаваме и за p_b и p_c , откъдето следва б).

$$\text{в) } \frac{p_a}{a^2} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4a^2 R} = \frac{1}{4R} \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} - 1 \right), \text{ подобни изрази получаваме и за } \frac{p_b}{b^2} \text{ и } \frac{p_c}{c^2}.$$

$$\text{Достигаем до } \frac{p_a}{a^2} + \frac{p_b}{b^2} + \frac{p_c}{c^2} = \frac{1}{4R} \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} - 3 \right).$$

Понеже сумата на две реципрочни положителни числа $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (като равенство имаме само за $x = 1$), $\frac{p_a}{a^2} + \frac{p_b}{b^2} + \frac{p_c}{c^2} \geq \frac{1}{4R} (6 - 3) = \frac{3}{4R}$. Равенство се получава само при $a = b = c$.

4.3.17. Права m минава през ортоцентъра H на неправоегълния $\triangle ABC$ и пресича AB , AC и BC или продълженията им. Ако m_1 , m_2 и m_3 са симетричните на m прави относно BC , CA и AB , докажете, че m_1 , m_2 и m_3 минават през една точка.

4.4. НАМИРАНЕ НА ЛИЦА. ЗАДАЧИ, КОИТО СЕ РЕШАВАТ ЧРЕЗ ЛИЦА

Най-често използваните формули са:

$$1) S = \frac{ch_c}{2}; 2) S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma; 3) S = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma}; 4) S = pr = \frac{abc}{4R};$$

$$5) S = (p-a)(p-b) \cot \frac{\gamma}{2};$$

$$6) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4} \sqrt{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4};$$

$$7) 9S^2 = (m_a + m_b + m_c)(m_b + m_c - m_a)(m_c + m_a - m_b)(m_a + m_b - m_c);$$

$$8) \frac{1}{S^2} = \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a} \right) \left(\frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} \right) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \right).$$

4.4.1. В $\triangle ABC$ е построена отсечка $MN \parallel AB$. Ако $S_{ABMN} = kS_{ABC}$ и $AB = c$, намерете MN .

Отг. $c\sqrt{1-k}$.

4.4.2. Страната на равностранен триъгълник е a . Намерете дължината на най-късата отсечка, с която триъгълникът може да се раздели на две равноличеви части.

Решение:

$$S_{MNB} = \frac{y^2 \sin \varphi \sin (120^\circ - \varphi)}{2 \sin 60^\circ} = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Определяме } y^2 = \frac{3a^2}{8 \sin \varphi \sin (120^\circ - \varphi)}.$$

Разглеждаме функцията

$$f(\varphi) = \sin \varphi \sin (120^\circ - \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2} [\cos (2\varphi - 120^\circ) - \cos 120^\circ] \text{ или}$$

$$f(\varphi) = \frac{1}{2} \cos (2\varphi - 120^\circ) + \frac{1}{4} \quad \varphi \in (0; 90^\circ].$$

Най-голямата ѝ стойност се достига, когато $\cos (2\varphi - 120^\circ) = 1$, т.е. за $\varphi = 60^\circ$ и $f(60^\circ) = \frac{3}{4}$. Тогава $8 \sin \varphi \sin (120^\circ - \varphi) \leq 8 \cdot \frac{3}{4} = 6$, т.е. $y^2 \leq \frac{a^2}{2}$ или $y_{\min} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

4.4.3. Намерете радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, ако $BC = 26$, $CA = 30$ и височината $CD = 24$.

Отг. $65/4$.

4.4.4. Около $\triangle ABC$ е описана окръжност с радиус 65. Ако $BC = 104$ и $CA = 120$, намерете височината CD .

Отг. 96.

4.4.5. В $\triangle ABC$ $AB = 28$, височината $CD = 24$ и $AC + BC = 56$. Намерете другите две страни.

Решение: Пресмятаме по два начина лицето S на $\triangle ABC$.

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 42, \text{ т.е. } p-a = 42-a,$$

$$p-b = p-(56-a) = a-14, p-c = 14.$$

$$\text{Тогава } S = \sqrt{42(42-a)(a-14)14},$$

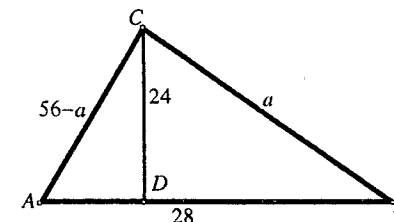
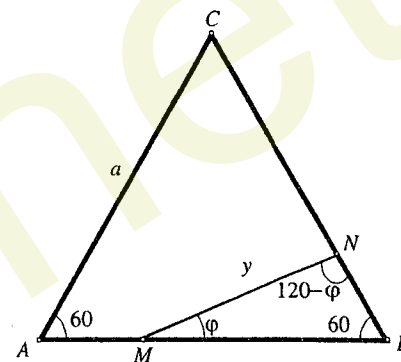
$$\text{но } S = \frac{1}{2} AB \cdot CD = 14 \cdot 24.$$

Получаваме $42(42-a)(a-14)14 = 14^2 \cdot 24^2$. Достигаем до $a^2 - 56a + 780 = 0$ с корени $a = 26$ и $a = 30$. Ако $a = 26$, то $b = 30$, а при $a = 30$, $b = 26$.

4.4.6. В триъгълник са дадени страната $AB = c$, $\angle ACB = 2\gamma$ и височината $CD = h$. Намерете сумата на другите две страни.

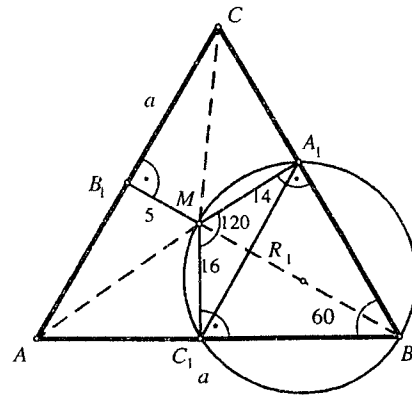
Отг. $\sqrt{c^2 + 2ch \cot \gamma}$.

4.4.7. (УНСС) От точка M , вътрешна за равностранния $\triangle ABC$, са спуснати перпендикулярите MA_1 , MB_1 и MC_1 към страните на триъгълника, като $MA_1 = 14$, $MB_1 = 5$, $MC_1 = 16$. Пресметнете страните на $\triangle A_1B_1C_1$, отсечките MA ,



MB , MC и страната на $\triangle ABC$.

Решение: Около четириъгълника A_1MC_1B описваме окръжност с диаметър $BM = 2R_1$. По косинусова теорема



$C_1A_1^2 = MC_1^2 + MA_1^2 - 2MC_1 \cdot MA_1 \cos 120^\circ$

пресмятаме, че $C_1A_1 = 26$ и по същия начин $A_1B_1 = \sqrt{291}$, $B_1C_1 = 19$. По синусова теорема $BM = 2R_1 = \frac{C_1A_1}{\sin 60^\circ} = \frac{52}{\sqrt{3}}$.

Аналогично $CM = 2\sqrt{97}$ и $AM = \frac{38}{\sqrt{3}}$. От

$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a \cdot 16}{2} + \frac{a \cdot 14}{2} + \frac{a \cdot 5}{2}$ получаваме

$$a\sqrt{3} = 70 \text{ или } a = \frac{70}{\sqrt{3}}.$$

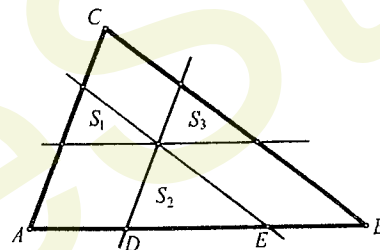
4.4.8. Докажете, че сумата от разстоянията на точка, взета върху една от страните на равностранен триъгълник до другите две страни е постоянна величина.

4.4.9. Вътре в равностранен триъгълник е взета точка M на разстояния m , n и p от страните му. Намерете височината на триъгълника. **Отг.** $m + n + p$.

4.4.10. Равнобедрен триъгълник със страни 24, 15, 15 е разделен на три равнолицеви части чрез перпендикуляри от точка M към страните му. Намерете разстоянията от тази точка до всяка страна. **Отг.** 4, $9 - 5\sqrt{3}$.

4.4.11. Точка M е вътрешна за $\triangle ABC$ и разстоянията ѝ до BC и AC са 4 и 2. Намерете разстоянието от M до AB , ако $AB = 10$, $BC = 17$ и $CA = 21$. **Отг.** 29/5.

4.4.12. През вътрешна точка на $\triangle ABC$ са построени прави, успоредни на страните му, които разделят лицето му на шест части, три от които са триъгълници с лица S_1 , S_2 , S_3 . Намерете лицето на $\triangle ABC$.



Решение: От подобие на триъгълниците следва: $\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} = \frac{AD}{AB}$, $\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} = \frac{DE}{AB}$,

$$\frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{EB}{AB}. \text{ Събираме почленно тези равенства}$$

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{AD + DE + EB}{AB} = 1.$$

$$\text{Получаваме } S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2.$$

4.4.13. През вътрешна точка на триъгълник са построени прави, успоредни на трите страни. Те разделят триъгълника на три успоредника и три триъ-

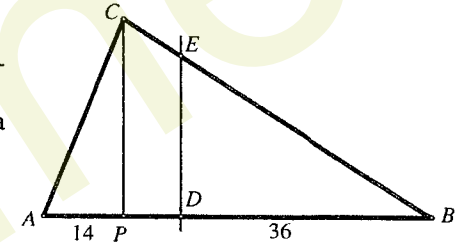
гълника. Произведението на лицата на триъгълниците е m^2 . Намерете произведението на лицата на успоредниците. **Отг.** $8m^2$.

4.4.14. В $\triangle ABC$ височината CP разделя AB на части – $AP = 14$ и $BP = 36$. Права, успоредна на CP дели лицето на $\triangle ABC$ на две равни части. Намерете на какви отсечки тя разделя основата.

Решение:

$$\text{Имаме: } \frac{S_{ABC}}{S_{CPB}} = \frac{AB}{PB} = \frac{50}{36} = \frac{25}{18}. \text{ Триъгълниците } EDB \text{ и } CPB \text{ са подобни. Тогава}$$

$$\frac{S_{EDB}}{S_{CPB}} = \left(\frac{BD}{BP}\right)^2 \text{ или } BD^2 = \frac{36^2 \cdot \frac{1}{2} S_{ABC}}{S_{CPB}} = 36^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{18} = 6^2 \cdot 5^2; BD = 30, AD = 20.$$



4.4.15. Успоредникът $ABCD$ има страни $AB = 180$, $AD = 153$ и височина $DE = 135$ към AB . Той е разделен на три равнолицеви части чрез прави, перпендикулярни на AB . Намерете разстоянията от A до тези прави. **Отг.** 96, 156.

4.4.16. Докажете, че в правоъглен триъгълник произведението на дължините на отсечките, на които се дели хипотенузата от допирната точка с вписаната му окръжност е равно на лицето на триъгълника.

4.4.17. В ромб е вписана окръжност, а в нея – квадрат. Намерете острия ъгъл на ромба, ако лицето на квадрата е 4 пъти по-малко от лицето на ромба. **Отг.** 30° .

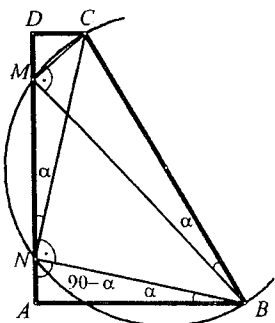
4.4.18. В $\triangle ABC$ ъглополовящата $AD = a$ е диаметър на окръжност, която дели страните AB и AC в отношение 2:1 и 1:1, считано от A . Намерете лицето на $\triangle ABC$. **Отг.** $\frac{7a^2 \sqrt{35}}{48}$.

4.4.19. Страните на триъгълник образуват аритметична прогресия с разлика a . Докажете, че $2rR = 4r^2 + a^2$, където R и r са радиусите на описаната и на вписаната окръжност. За кои стойности на a задачата има смисъл. **Отг.** $a < \sqrt{6Rr + a^2}/2$.

4.4.20. Наклоненото бедро BC на правоъглен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) служи за диаметър на окръжност, която пресича AD в точките M и N . Докажете, че $S_{ABCD} = S_{MBC} + S_{BNC}$.

Доказателство: $\angle DNC = \angle MBC$ (вписани), тогава $\triangle DNC \sim \triangle MBC$ и

$$\frac{S_{DNC}}{S_{MBC}} = \frac{CN^2}{BC^2}. \angle ABN = \angle MBC, \text{ т.е. } \triangle ABN \sim \triangle MBC \text{ и } \frac{S_{ABN}}{S_{MBC}} = \frac{BN^2}{BC^2}.$$



Събираме почленно двете равенства

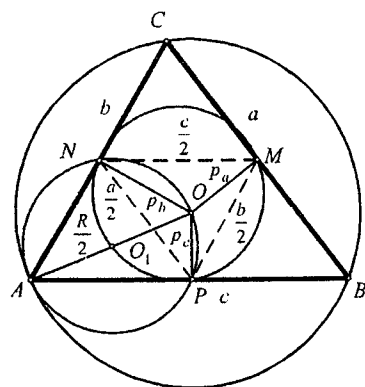
$$\frac{S_{DNC}}{S_{MBC}} + \frac{S_{ABN}}{S_{MBC}} = \frac{CN^2 + BN^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1.$$

$$S_{DNC} + S_{ABN} = S_{MBC}$$

$$S_{ABCD} = S_{BNC} + S_{DNC} + S_{ABN} = S_{MBC} + S_{BNC}.$$

4.4.21. (ВУЗ) Страните на остроъгълен триъгълник са a, b и c , а разстоянията от центъра на описаната окръжност до страните са

$$p_a, p_b \text{ и } p_c. \text{ Докажете, че } ap_b p_c + bp_c p_a + cp_a p_b = \frac{abc}{4}.$$



Доказателство: Страните на $\triangle MNP$ са средните отсечки на $\triangle ABC$ и неговото лице е $\frac{1}{4} S_{ABC}$. Радиусите на описаните окръжности около ONP, OPM и MON са равни на $\frac{1}{2} R$.

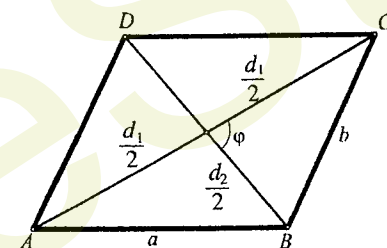
$$S_{NPM} = \frac{p_b p_c \frac{a}{2}}{4 \frac{R}{2}} + \frac{p_c p_a \frac{b}{2}}{4 \frac{R}{2}} + \frac{p_a p_b \frac{c}{2}}{4 \frac{R}{2}} = \frac{1}{4} \frac{abc}{4R} \text{ или}$$

$$ap_b p_c + bp_c p_a + cp_a p_b = \frac{abc}{4}.$$

4.4.22. (ВУЗ) В $\triangle ABC$ ($\angle ACB > 90^\circ$) разстоянията от центъра O на описаната окръжност до страните са p_a, p_b и p_c . Височините на триъгълника са h_a, h_b и h_c . Докажете равенството: $\frac{p_a}{h_a} + \frac{p_b}{h_b} - \frac{p_c}{h_c} = 1$.

Забележка: Задачи, които се решават чрез лица могат да се намерят и в другите параграфи, например задачите от 4.1.14. до 4.1.19.

4.5. ЛИЦЕ НА ЧЕТИРИЪГЪЛНИК



$$b^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - 2 \frac{d_1}{2} \frac{d_2}{2} \cos \varphi. \text{ Като извадим двете равенства, получаваме}$$

4.5.1. Намерете лицето на успоредник със страни a и b ($a > b$), и ъгъл φ между диагоналите му.

Решение: Изразяваме страните на успоредника чрез косинусова теорема

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - 2 \frac{d_1}{2} \frac{d_2}{2} \cos(180^\circ - \varphi) \text{ и}$$

$$a^2 - b^2 = d_1 d_2 \cos \varphi. \text{ Лицето на успоредника е } S = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{2} = \frac{a^2 - b^2}{2} \operatorname{tg} \varphi.$$

4.5.2. Намерете лицето на успоредник с остър ъгъл α и диагонали d_1 и d_2 ($d_1 > d_2$).

$$\text{Отг. } \frac{1}{4}(d_1^2 - d_2^2) \operatorname{tg} \alpha.$$

4.5.3. Изразете разликата от квадратите на диагоналите d_1 и d_2 на успоредник чрез страните му a, b и лицето S .

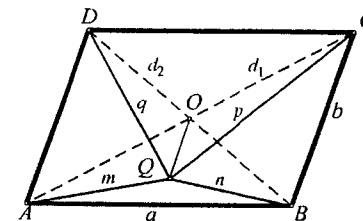
Решение: По косинусова теорема $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \alpha)$ и $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$. Тогава $d_1^2 - d_2^2 = 4ab \cos \alpha = 4\sqrt{a^2 b^2 (1 - \sin^2 \alpha)}$. Лицето на успоредника е $S = ab \sin \alpha$. Получаваме $d_1^2 - d_2^2 = \sqrt{a^2 b^2 - S^2}$.

4.5.4. Изразете лицето S на успоредник чрез страните му a и b , и разстоянията m, n, p, q от произволна точка Q до върховете на успоредника.

Решение: Изразяваме медианата OQ в $\triangle AQC$ и $\triangle BQD$. $4OQ^2 = 2m^2 + 2p^2 - d_1^2$ и $4OQ^2 = 2n^2 + 2q^2 - d_2^2$. Като от първото равенство извадим второто получаваме $d_1^2 - d_2^2 = 2(m^2 + p^2 - n^2 - q^2)$. В предходната задача намерихме, че $d_1^2 - d_2^2 = \sqrt{a^2 b^2 - S^2}$.

Тогава $4\sqrt{a^2 b^2 - S^2} = 2(m^2 + p^2 - n^2 - q^2)$ или $4(a^2 b^2 - S^2) = (m^2 + p^2 - n^2 - q^2)^2$.

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 b^2 - (m^2 + p^2 - n^2 - q^2)^2}.$$



4.5.5. През върховете на изпъкнал четириъгълник са построени прави, успоредни на диагоналите му. Намерете отношението на лицето на успоредника, образуван от тези прави, и лицето на дадения четириъгълник. **Отг.** 2:1.

4.5.6. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ диагоналите се пресичат в точка O . Лицата на триъгълниците BOC, COD и AOD са 20, 40 и 60. Намерете $\angle BAO$, ако $AB = 15, AO = 8$ и $\angle BOA > 31^\circ$.

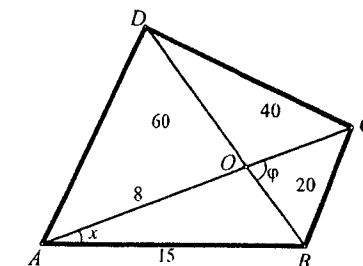
Решение:

$2S_{AOB} = AO \cdot BO \sin(180^\circ - \varphi) = AO \cdot BO \sin \varphi$. Аналогични равенства имаме и за лицата на останалите триъгълници. Разбираме, че за произволен четириъгълник $S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{DOA}$. В тази задача $S_{AOB} \cdot 40 = 20 \cdot 60$, т.е. $S_{AOB} = 30$. Но

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} 15 \cdot 8 \sin \angle OAB, \text{ тогава } \sin \angle OAB = \frac{1}{2}.$$

Понеже $\angle BOA > 31^\circ, \angle OAB < 149^\circ$ или $\angle OAB = 30^\circ$.

4.5.7. Изпъкнал четириъгълник се разделя от диагоналите си на четири



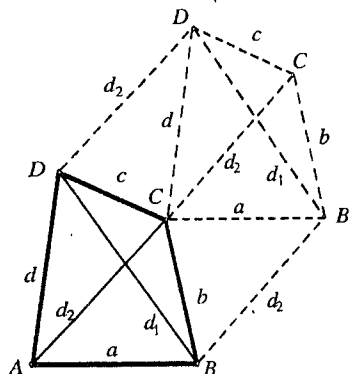
триъгълника. Лицата на три от тях са 10, 20 и 30 и са по-малки от лицето на четвъртия триъгълник. Намерете лицето на четириъгълника. **Отг.** 120.

4.5.8. Диагоналите с дължини $\sqrt{7}$ и 4 делят четириъгълник на части, лицата на които образуват аритметична прогресия. Намерете лицето на четириъгълника, ако ъгълът между по-големия диагонал и най-малката страна е 30° .

Отг. $3\sqrt{3}$ или $\sqrt{3}$.

4.5.9. Изразете лицето на четириъгълник чрез страните a, b, c и d , и диагоналите му d_1 и d_2 .

Решение: Ще използваме *построението на Петерсен*, при което се получават много фигури, конструктивно свързани с дадения четириъгълник. Пренасяме успоредно по направление на вектора $\overrightarrow{AC}$. Получават се точките B_1, C_1 и D_1 .



$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BDC} = S_{CB_1D_1} + S_{BDC}.$$

Виждаме, че $2S_{ABCD} = S_{BB_1D_1D}$. Следователно трябва да намерим лицето на успоредник със страни d_1, d_2 и разстояния a, b, c , и d от точка C до върховете на успоредника. Това е направено в задача [4.5.4.];

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4} \sqrt{4d_1^2 d_2^2 - (a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2}.$$

4.5.10. Намерете лицето на четириъгълник, ако отсечките, свързващи средите на срещуположните му страни имат дължини m_1 и m_2 , а диагоналите му сключват ъгъл φ .

Упътване: Диагоналите на BB_1D_1D от *построението на Петерсен* [4.5.9.] са два пъти по-големи от отсечките m_1 и m_2 .

Отг. $\frac{1}{2} |m_1^2 - m_2^2| \operatorname{tg} \varphi$.

4.5.11. Намерете лицето на четириъгълник с диагонали d_1 и d_2 и ъгъл φ между правите, свързващи средите на срещуположните му страни.

Отг. $\frac{1}{4} |d_1^2 - d_2^2| \operatorname{tg} \varphi$.

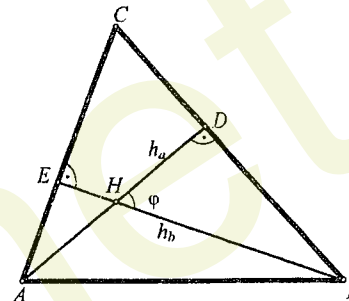
4.6. ЗАДАЧИ С ИЗПОЛЗВАНЕ НА ТРИГОНОМЕТРИЯ

4.6.1. В остроъгълния $\triangle ABC$ височините $AD = h_a$ и $BE = h_b$ сключват ъгъл φ . Намерете страната AB .

Решение: Ясно е, че и $\angle BSA = \varphi$. Тогава $CA = \frac{h_a}{\sin \varphi}$ и $CB = \frac{h_b}{\sin \varphi}$. По косинусова

теорема $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos \varphi$.

Намираме, че $AB = \frac{\sqrt{h_a^2 + h_b^2 - 2h_a h_b \cos \varphi}}{\sin \varphi}$.



4.6.2. В $\triangle ABC$ ($AC = BC$) ортоцентърът A дели височината CD на две равни части. Намерете $\operatorname{tg} \angle CAB$ и $\operatorname{tg} \angle ACB$.

Отг. $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$.

4.6.3. В $\triangle ABC$ ($AC = BC$) височината AD дели BC , така че $CD : DB = \sqrt{2} : (2 - \sqrt{2})$. Намерете $\angle ACB$.

Отг. 45° .

4.6.4. Лицето на равнобедрен триъгълник е S , а ъгълът при върха е 2γ . Намерете височините на триъгълника.

Отг. $\sqrt{S \cot \gamma}, \sqrt{2S \sin 2\gamma}$.

4.6.5. Тангенсът на ъгъла между височина и медиана, построени към бедро в равнобедрен остроъгълнен триъгълник, е $\frac{1}{2}$. Намерете синуса на ъгъла при върха му.

Отг. $3/5$.

4.6.6. Височина на триъгълник дели ъгъла му в отношение 2:1, а срещу-положната страна – на отсечки в отношение, равно на k ($k > 1$). Намерете синуса на по-малкия ъгъл при тази страна.

Отг. $1/(k-1), (k > 2)$.

4.6.7. Остроъгълният $\triangle ABC$ има ъгли α, β, γ . Намерете отношението, в което ортоцентърът дели височината от върха A .

Решение: $\angle AHN = \angle MHB = \gamma$. Тогава

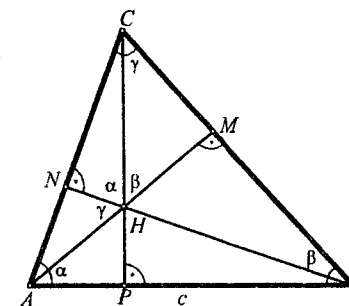
$$AH = \frac{AN}{\sin \gamma} = \frac{c \cos \alpha}{\sin \gamma} \text{ и } MH = \frac{BM}{\operatorname{tg} \gamma}, \text{ но}$$

$$BM = c \cos \beta.$$

$$\text{Намираме } \frac{AH}{MH} = \frac{c \cos \alpha \operatorname{tg} \gamma}{\sin \gamma c \cos \beta} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \cos \gamma}.$$

4.6.8. В остроъгълния $\triangle ABC$ CC_1 е височина, CL е ъглополовяща $\angle C_1CL = 30^\circ$. Ако H е ортоцентърът на $\triangle ABC$ и $\cos \angle ACB = \frac{1}{10}$, намерете отношението $CH : C_1H$.

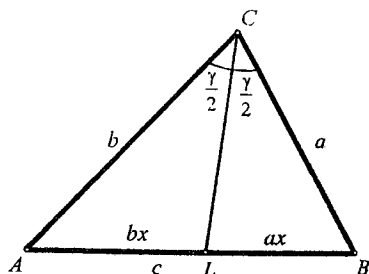
Отг. $1/2$.



5. ЪГЛОПОЛОВЯЩИ

5.1. СВОЙСТВА НА ЪГЛОПОЛОВЯЩИТЕ

5.1.1. Страните на $\triangle ABC$ са a , b и c . Намерете отсечките, на които вътрешната ъглополовяща CL , разделя страната AB .



Решение: Търсим AL и BL . Знаем, че $\frac{AL}{BL} = \frac{AC}{BC}$. Тогава $AL = bx$, $BL = ax$ и

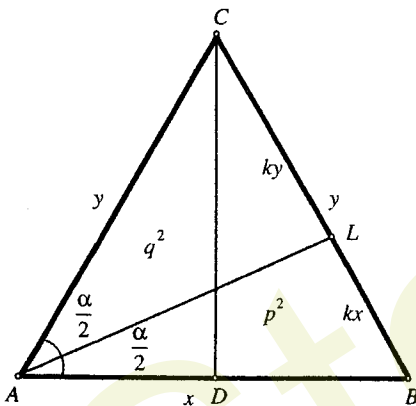
$$(a+b)x = c, \text{ т.е. } x = \frac{c}{a+b}. \text{ Оттук}$$

$$AL = \frac{bc}{a+b} \text{ и } BL = \frac{ac}{a+b}.$$

5.1.2. В равнобедрения $\triangle ABC$ основата $AB = a$, а $BC = b$. Ъглополовящите CD и AL се пресичат в точка J . Намерете $AJ:JL$.

Отг. $(a+b)/b$.

5.1.3. Ъглополовящата AL разделя равнобедрения $\triangle ABC$ ($CA = CB$) на $\triangle ABL$ и $\triangle ACL$ с лица съответно равни на p^2 и q^2 . Намерете AB .



Решение: Означаваме $AB = x$,

$$AC = y. \text{ Ясно е, че } \frac{S_{ABL}}{S_{ACL}} = \frac{BL}{CL}, \text{ но}$$

$$\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{y}. \text{ Получихме, че } \frac{x}{y} = \frac{p^2}{q^2} \text{ или}$$

$$y = \frac{q^2}{p^2}x. \text{ Изразяваме височината } CD:$$

$$CD^2 = y^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \text{ или } CD = \frac{x}{2p^2} \sqrt{4q^4 - p^4}.$$

За лицето на $\triangle ABC$ имаме:

$$S_{ABC} = \frac{x \cdot CD}{2} = p^2 + q^2. \text{ Заместваме } CD \text{ и}$$

$$\text{получаваме } x = \frac{2p\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{4q^4 - p^4}}.$$

5.1.4. В $\triangle ABC$ $AB = 4$, $BC = 6$ и $\angle CBA = 30^\circ$. Ако BD е ъглополовяща, пресметнете лицето на $\triangle ABD$.

Отг. $12/5$.

5.1.5. В равнобедрен $\triangle ABC$ ($CA = CB$), ъглополовящите AM и BK се пресичат в точка J . Лицата на $\triangle CJM$ и $\triangle BJM$ са 25 и 30. Намерете лицето на $\triangle ABC$ и проекцията на отсечката JM върху правата BC .

Отг. 176, $2\sqrt{\frac{3}{11}}$.

5.1.6. В $\triangle ABC$ $\angle BAC = 2\angle CBA$, $a-b=2$, $c=5$. Намерете лицето на триъгълника.

Отг. $15\sqrt{7}/4$.

5.1.7. Дължините на страните на $\triangle ABC$ са a , b и c . Ако AL , BM и CN са ъглополовящи, намерете лицето на $\triangle LMN$.

$$\text{Отг. } \frac{2abc\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{(a+b)(b+c)(a+c)}.$$

5.1.8. Каква е зависимостта между ъглите α и β , ако ъглополовящите AL и BM са еднакво наклонени към страните BC и AC .

Отг. $\alpha = \beta$ или $\alpha + \beta = 120^\circ$.

5.1.9. В $\triangle ABC$ ъглополовящите AL и BK се пресичат в точка J . Намерете ъглите на $\triangle LKJ$, ако C лежи на описаната около $\triangle LKJ$ окръжност.

Решение: За всеки триъгълник имаме:

$$\angle AJB = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}. \text{ Понеже } KJLC$$

е вписан в окръжност, $\angle LJK = 180^\circ - \gamma$, но

$$\angle KJL = \angle AJB \text{ или } 180^\circ - \gamma = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}. \text{ Получаваме, че } \gamma = 60^\circ.$$

Разбира се CJ също е ъглополовяща и тогава $\widehat{JK} = \widehat{JL} = 60^\circ$, т.е. $\angle LKJ = \angle KLJ = 30^\circ$, а $\angle LJK = 120^\circ$.

5.1.10 (УАСГ) В $\triangle KLM$ ъглополовящите KN и LP се пресичат в точка Q и $PN = 1$. Намерете страните на $\triangle PNQ$, ако M лежи на окръжността, определена от точките N , P и Q .

Отг. $PQ = NQ = 1/\sqrt{3}$.

5.1.11. Ъглополовящите AM и CN на $\triangle ABC$ се пресичат в точка J . Ако $AJ = \sqrt{3}MJ$, $NJ = (\sqrt{3}-1)CJ$, намерете ъглите на $\triangle ABC$.

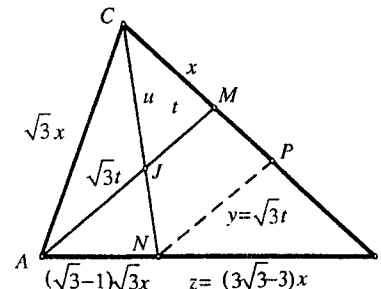
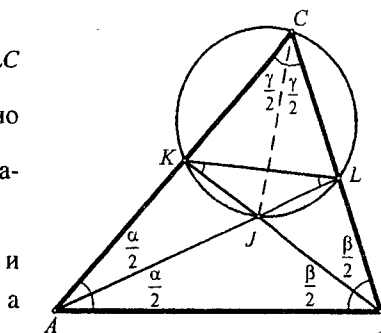
Решение: Означаваме $MJ = t$ и $CJ = u$, тогава $AJ = \sqrt{3}t$, $NJ = (\sqrt{3}-1)u$.

Понеже CJ е ъглополовяща в $\triangle ACM$, $CM = x$ и $CA = \sqrt{3}x$. Аналогично AJ е ъглополовяща в $\triangle ACN$, следователно $AN = (\sqrt{3}-1)\sqrt{3}x$.

Построяваме $NP \parallel AM$. Имаме:

$$\frac{NP}{JM} = \frac{CN}{CJ} \text{ или } \frac{NP}{t} = \frac{u + (\sqrt{3}-1)u}{u}, \text{ т.е.}$$

$$NP = \sqrt{3}t. \text{ От } \frac{BN}{BA} = \frac{NP}{AM} \text{ или}$$



$$\frac{BN}{BN + (\sqrt{3}-1)\sqrt{3}x} = \frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{3}t+t} \text{ намираме: } BN = (3\sqrt{3}-3)x \text{ и}$$

$$AB = (\sqrt{3}-1)\sqrt{3}x + (3\sqrt{3}-3)x = 2\sqrt{3}x.$$

$$CN \text{ е ъглополовяща в } \triangle ABC, \text{ т.е. } \frac{CB}{CA} = \frac{BN}{AN}, \frac{CB}{\sqrt{3}x} = \frac{(3\sqrt{3}-3)x}{(\sqrt{3}-1)\sqrt{3}x} \text{ или } CB=3x.$$

$$\text{От косинусова теорема } (2\sqrt{3}x)^2 = (\sqrt{3}x)^2 + (3x)^2 - 2\sqrt{3}x \cdot 3x \cos \gamma, \text{ т.е.}$$

$$12 = 3 + 9 - 6\sqrt{3} \cos \gamma. \text{ Тогава } \cos \gamma = 0 \text{ или } \angle C = 90^\circ; \angle B = 30^\circ; \angle A = 60^\circ.$$

5.1.12. (ТУ) Ъглополовящите AM и CL на $\triangle ABC$ се пресичат в точка O .
Намерете ъглите на $\triangle ABC$, ако $\frac{MO}{AO} = (\sqrt{2}-1)$ и $\frac{LO}{CO} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Отг. $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

5.1.13. В $\triangle ABC$ ъглополовящите AD и BE се пресичат в точка J . Намерете отношението на лицето на четириъгълника $DJEC$ към лицето на $\triangle ABC$, ако $AB:BC:CA = 3:2:4$.

Отг. $32:105$.

5.2. НАМИРАНЕ НА ЪГЛОПОЛОВЯЩАТА

Дължината на вътрешна ъглополовяща в триъгълник можем да пресметнем по формулата: $l_c^2 = ab - mn$.

5.2.1. Намерете ъглополовящата към бедрото на равнобедрен триъгълник с основа a и бедро b .

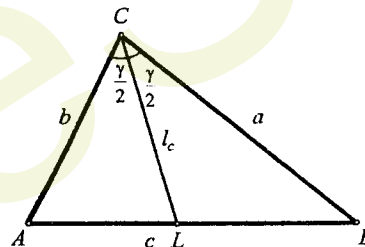
Отг. $\frac{ab}{a+b} \sqrt{\frac{a+2b}{b}}$.

5.2.2. Докажете, че във всеки триъгълник $l_c^2 = ab - \frac{c^2 ab}{(a+b)^2}$ и

$$l_c = \frac{2}{a+b} \sqrt{p(p-c)ab}.$$

5.2.3. (ВТУЗ) Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако са дадени a, b и l_c .

Решение: Пресмятаме



$$S_{ABC} = S_{ACL} + S_{BCL} = \frac{1}{2} b l_c \sin \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{2} a l_c \sin \frac{\gamma}{2} \text{ или}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} l_c (a+b) \sin \frac{\gamma}{2}, \text{ но от друга страна}$$

$$S_{ABC} = \frac{ab}{2} \sin \gamma = ab \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}. \text{ Като приравним}$$

двата израза получаваме нова формула за ъглополовящата:

$$l_c = \frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{a+b}. \text{ Изразяваме } \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{l_c(a+b)}{2ab}. \text{ Тогава } \sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{1 - \frac{l_c^2(a+b)^2}{4a^2b^2}}. \text{ Заме-}$$

$$\text{стваме и получаваме: } S_{ABC} = \frac{1}{2} l_c (a+b) \sqrt{\frac{4a^2b^2 - l_c^2(a+b)^2}{4a^2b^2}}.$$

5.2.4. Намерете ъглополовящата AL и радиуса на окръжността, вписана в триъгълника $\triangle ABC$ със страни $BC = 7, CA = 5, AB = \sqrt{39}$.

Решение: От косинусова теорема

$$\cos \gamma = \frac{25 + 49 - 39}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{2}, \text{ т.е. } \gamma = 60^\circ \text{ и}$$

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Тогава } S_{ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{35\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Пресмятаме } r = \frac{S}{p} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Знаем, че } \frac{CL}{BL} = \frac{AC}{AB}.$$

$$\text{Получаваме } BL = \sqrt{39}x, CL = 5x, \text{ но } \sqrt{39}x + 5x = BC = 7 \text{ и следователно}$$

$$x = \frac{\sqrt{39} - 5}{2}. AL \text{ пресмятаме по формулата } AL^2 = AC \cdot AB - CL \cdot BL;$$

$$AL^2 = 5\sqrt{39}(1-x^2). \text{ Получаваме } AL = \frac{5}{2} \sqrt{78 - 12\sqrt{39}}.$$

5.2.5. Докажете, че ако в триъгълник две ъглополовящи са равни, то той е равнобедрен.

5.2.6. В $\triangle ABC$ $AC = 2, BC = 8, AB = c$, а CL е ъглополовяща.

а) Намерете c и $\cos \gamma$, ако $CL = AL$.

б) Съществува ли стойност на c , за която $CL = BL$.

Отг. а) $4\sqrt{5}, -3/8$; б) не.

5.2.7. В $\triangle ABC$ ъглополовящата $CL = 5\sqrt{3}$, а $\angle \gamma = 60^\circ$. Ако $CA : CB = 5 : 2$, намерете BC и $\text{tg } \alpha$.

Отг. $7, \sqrt{3}/4$.

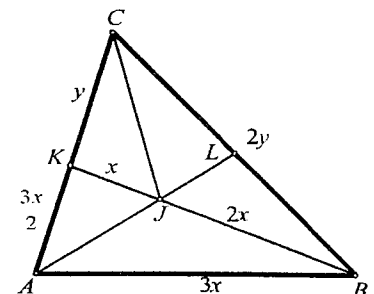
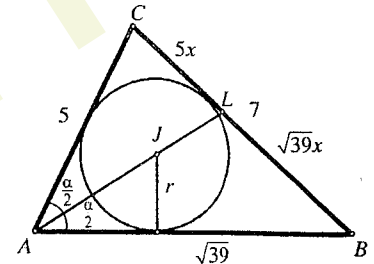
5.2.8. В $\triangle ABC$ ъглополовящите BK и AL се пресичат в точка J . Ако $AB = BK$, периметърът на триъгълника е 28 и $BJ = 2JK$. Намерете AB .

Решение: Нека $KJ = x$. Тогава $BJ = 2x$, $BK = BA = 3x$. AJ е ъглополовяща в $\triangle ABK$, т.е.

$$\frac{AK}{AB} = \frac{KJ}{BJ} = \frac{1}{2} \text{ или } AK = \frac{3x}{2}. \text{ Аналогично } CJ \text{ е}$$

$$\text{ъглополовяща в } \triangle CKB, \frac{CK}{CB} = \frac{KJ}{JB} = \frac{1}{2}. \text{ Нека}$$

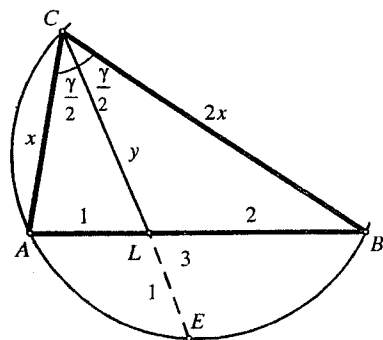
$$CK = y, \text{ тогава } CB = 2y. \text{ За периметъра}$$



на $\triangle ABC$ получаваме $28 = 3x + \frac{3x}{2} + y + 2y$ или $9x + 6y = 56$. От формулата за ъглополовящата $BK^2 = 6xy - \frac{3xy}{2} = 9x^2$. Решаваме системата и получаваме $x = \frac{8}{3}$ и $AB = 8$.

5.2.9. (УНСС) В $\triangle ABC$ ъглополовящата CD дели $\triangle ABC$ на два триъгълника ADC и BDC с периметри $10(1 + \sqrt{3})$ и $\frac{20}{3}(3 + 2\sqrt{3})$. Ако $S_{BDC} = 2S_{ADC}$ намерете лицето на $\triangle ABC$.

Отг. $50\sqrt{3}$.



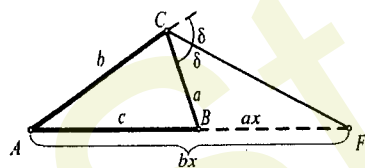
5.2.10. В $\triangle ABC$ $AB = 3$, $BC = 2AC$, а E е пресечната точка на продължението на ъглополовящата CL с описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Намерете дължината на AC , ако $EL = 1$.

Решение: Знаем, че $\frac{LA}{LB} = \frac{CA}{CB} = \frac{1}{2}$,

т.е. $LA = 1$, $LB = 2$. От теоремата за хордите $CL \cdot LE = AL \cdot LB$ пресмятаме $CL = 2$. Тогава $CL^2 = 4 = 2x \cdot x - 2 \cdot 1$. Получаваме $AC = \sqrt{3}$.

5.3. ВЪНШНИ ЪГЛОПОЛОВЯЩИ

5.3.1. Даден е $\triangle ABC$ със страни a , b и c . Намерете дължините на отсечките, на които външната ъглополовяща на ъгъл C дели страната AB .



Решение: Знаем че, външната ъглополовяща CF разделя външно AB и че $\frac{FA}{FB} = \frac{CA}{CB} = \frac{b}{a}$. Нека за определеност $b > a$.

Означаваме $FA = bx$, $FB = ax$. Тогава

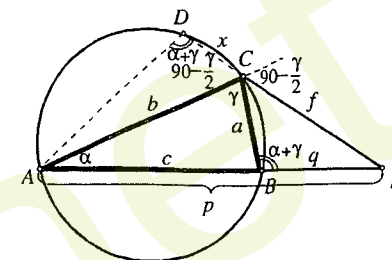
$$AB = bx - ax = c \text{ или } x = \frac{c}{b-a}. \text{ Получаваме } FA = \frac{bc}{b-a}, FB = \frac{ac}{b-a}.$$

В общия случай са валидни формулите: $FA = \frac{bc}{|b-a|}$, $FB = \frac{ac}{|b-a|}$.

5.3.2. Докажете, че ако CF е външната ъглополовяща на $\angle C$, е в сила $CF^2 = FA \cdot FB - CA \cdot CB$.

Доказателство: Нека D е пресечната точка на CF с описаната около $\triangle ABC$ окръжност. От теоремата за секущите FD и FA имаме $(f+x)f = pq$.

От подобие $\triangle ACD \sim \triangle FCB$ ($\angle ACD = \angle FCB = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$; $\angle ADC = \alpha + \gamma$ като вписан, $\angle FBC = \alpha + \gamma$ външен) получаваме, че $\frac{x}{b} = \frac{a}{f}$ или $x = \frac{ab}{f}$. Сега от $\frac{ab}{f} \cdot f + f^2 = pq$ намираме $f^2 = pq - ab$.



5.3.3. Вътрешната и външната ъглополовяща при върха C на $\triangle ABC$ пресичат правата AB съответно в точките L и F , като $LA:FA = 3:5$. Намерете отношението $CA:CB$.

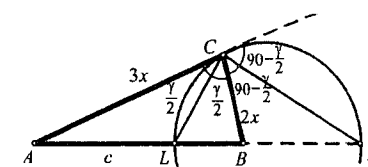
Отг. 4:1.

5.3.4. В $\triangle ABC$, $CA:CB = 3:2$ и $AB = c$. Вътрешната и външната ъглополовяща при върха C пресичат AB съответно в точките L и F . Намерете радиуса на описаната около $\triangle LFC$ окръжност.

Решение: Понеже $CA:CB = 3:2$ определяме, че $LA = \frac{3c}{5}$, $LB = \frac{2c}{5}$ и

$FA = 3c$, $FB = 2c$. $\angle LCB + \angle FCB = 90^\circ$, следователно LF е диаметър на описаната около $\triangle LFC$ окръжност. Тогава

$$2R = LF = FA - LA = \frac{12c}{5} \text{ или } R = \frac{6c}{5}.$$



5.3.5. В $\triangle ABC$ CL е вътрешна ъглополовяща и $AL = m$ и $BL = n$. Окръжност с център върху правата AB , минава през C и L . Намерете радиуса й.

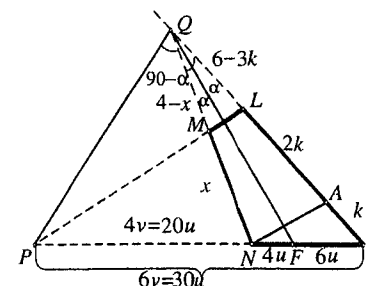
Отг. $\frac{mn}{|m-n|}$.

5.3.6. Намерете ъгъла ACB на $\triangle ABC$, ако върхът A е равноотдалечен от центровете O_a и O_c на окръжностите, външновписани за триъгълника и допиращи се до BC и AB .

Отг. 90° .

5.3.7. Продълженията на страните KN и LM от изпъкналия четириъгълник $KLMN$ се пресичат в точка P , а продълженията на KL и MN – в точка Q , като PQ е перпендикулярна на ъглополовящата на $\angle KQN$. Намерете MN , ако $KQ = 6$, $NQ = 4$, а лицата на $\triangle LQM$ и четириъгълника $KLMN$ са равни.

Решение: QF е вътрешна ъглополовяща в $\triangle NKQ$, а PQ е перпендикулярна на QF . Следователно QP е външна ъглополовяща на $\angle Q$. Поради това, можем да означим: $FN = 4u$, $FK = 6u$, $PK = 6v$, $PN = 4v$. Тогава $KN = 6v - 4v = 2u$. Получихме, че $v = 5u$, т.е. $PK = 30u$ и $PN = 20u$.



Построяваме $NA \parallel ML$ и по Талес определяме $\frac{KN}{NP} = \frac{KA}{AL} = \frac{10u}{20u} = \frac{1}{2}$.

Означаваме $KA = k$, тогава $AL = 2k$, а $QL = 6 - 3k$.

Пак по Талес $\frac{AL}{LQ} = \frac{NM}{MQ}$ или $\frac{2k}{6-3k} = \frac{x}{4-x}$, т.е. $x = \frac{8k}{6-k}$. Триъгълниците

QML и QNK имат общ ъгъл. Тогава $\frac{S_{QML}}{S_{QNK}} = \frac{QM}{QN} \cdot \frac{QL}{QK} = \frac{(4-x) \cdot (6-3k)}{4 \cdot 6} = \frac{1}{2}$ или

$\left(4 - \frac{8k}{6-k}\right)(6-3k) = 12$. Корените на това уравнение са $k_1 = 3$ и $k_2 = \frac{2}{3}$. Знаем,

че $AL = 2k < 6$. Следователно решение е само k_2 . Сега пресмятаме

$$MN = x = \frac{8k}{6-k} = 1.$$

5.4. ЪГЛОПОЛОВЯЩИ В УСПОРЕДНИК И ТРАПЕЦ

При решаването на задачи, свързани с успоредник или трапец често използваме, че ъглополовящата на ъгъл в успоредник или в трапец отсича равнобедрен триъгълник.

5.4.1. Даден е успоредник $ABCD$ със страни $AB = a$ и $BC = b$ ($a > b$). Ъглополовящата на $\angle A$ пресича CD в E и продължението на BC в M . Ъглополовящата на $\angle B$ пресича CD в K и продължението на AD в N .

а) Намерете дължината на отсечката KE .

б) Намерете радиуса на описаната окръжност около BMP , където P е пресечната точка на AM и BN .

Решение: а) Понеже $AB \parallel CD$, $\angle BAE = \angle DEA = \frac{\alpha}{2}$ (вътрешно кръстни),

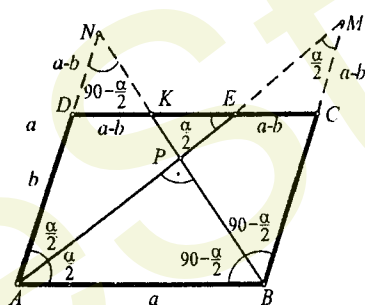
т.е. $\triangle AED$ е равнобедрен ($AD = ED = b$) и $CE = CD - ED = a - b$. Аналогично и

$\triangle BCK$ е равнобедрен с ъгъл $(90^\circ - \frac{\alpha}{2})$ и $DK =$

$= a - b$. Ще разгледаме случая, когато P е вътрешна за $ABCD$. (Това е така, когато $2b > a$.) Тогава $KE = KC - EC = b - (a - b) = 2b - a$.

Разгледайте сами другите случаи и се убедете, че винаги $KE = |2b - a|$.

б) Ясно е, че $\triangle BMP$ е правоъгълен, следователно $R = \frac{BM}{2} = \frac{a}{2}$.



5.4.2. В успоредника $ABCD$ ъглополовящата на $\angle BAD$ пресича CD в средата E . Определете вида на четириъгълника, заграден от четирите ъглополовящи на успоредника и намерете дължините на диагоналите му, ако $AB = a$.

Отг. Правоъгълник, $a/2$.

5.4.3. Върху страната CD на успоредника $ABCD$ са взети точки K и M така, че AK и BM са ъглополовящи на ъглите A и B , и $DM = MK = KC$. Намерете лицето на успоредника, ако $AD = 12$ и $BK = 6\sqrt{3}$.

Отг. $108\sqrt{3}$.

5.4.4. Ъглополовящите на ъглите B и C в успоредника $ABCD$ се пресичат в точка O . Намерете лицето на успоредника, ако $\sin \angle A = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $OA = 2\sqrt{10}$,

$OD = 5$.

Отг. 24 или 72.

5.4.5. В правоъгълник със страни a и b са построени ъглополовящите на всичките му ъгли до взаимното им пресичане. Намерете лицето на четириъгълника, образуван от ъглополовящите.

Отг. $(a-b)^2/2$.

5.4.6. В равнобедрения трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) $\angle ADC = \alpha$. Ъглополовящата на $\angle ADC$ дели най-голямата страна с дължина a в отношение 1:2. Намерете лицето на трапеца.

Решение: Тъй като в условието на задачата не е посочено коя е най-голямата страна и как е разделена тя в отношение 1:2, трябва да се разгледат четири възможни случая:

I случай: Най-голямата страна е AB и тя е разделена в отношение 1:2 считано от

A към B , т.е. $AL = \frac{a}{3}$, а $LB = \frac{2a}{3}$. $\angle ADL =$

$= \angle ALD = \frac{\alpha}{2}$ като вътрешни кръстни и

$AL = AD = BC = \frac{a}{3}$. От правоъгълния три-

ъгълник BEC имаме $\frac{a-y}{2} = \frac{a}{3} \cos(180^\circ - \alpha)$ или $CD = y = a \left(\frac{2 \cos \alpha}{3} + 1 \right)$ и

$h = \frac{a}{3} \sin \alpha$. За лицето на трапеца получаваме $S = \frac{AB+CD}{2} \cdot h = \frac{a^2}{9} (3 + \cos \alpha) \sin \alpha$.

Определете останалите три случая и пресметнете лицето на трапеца.

Отг. $\frac{2a^2}{9} (3 + \cos \alpha) \sin \alpha$; $\frac{a^2}{3} (1 - \cos \alpha) \sin \alpha$; $\frac{a^2}{3} (2 + \cos \alpha) \sin \alpha$.

5.4.7. В равнобедрения трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) диагоналят AC дели $\angle BAD$ на две равни части. Намерете страните на трапеца, ако лицето му е $27\sqrt{3}$ и $AB = 2CD$.

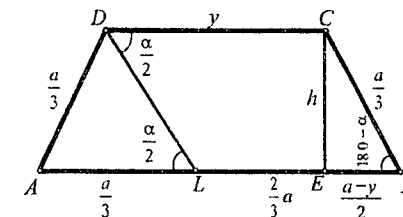
Отг. 6, 6, 6, 12.

5.4.8. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AD = 2$. Ъглополовящата на $\angle ADC$ пресича AB в точка E . В $\triangle AED$ е вписана окръжност, допираща се до AB в точка H и до AD в M , като $MH = 1$. Намерете $\angle ABC$.

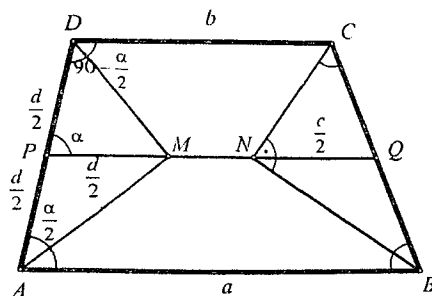
Отг. 120° .

5.4.9. Трапец има основи 4 и 3, и диагонал 6. Диагоналът разполюва един от ъглите. Може ли трапецът да е равнобедрен?

Отг. Не.



5.4.10. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ъглополовящите на ъглите A и D се пресичат в точка M , а на ъглите B и C – в точка N . Ако a и b са дължините на основите, а c и d – на бедрата, докажете, че $2MN = |(a+b) - (c+d)|$.



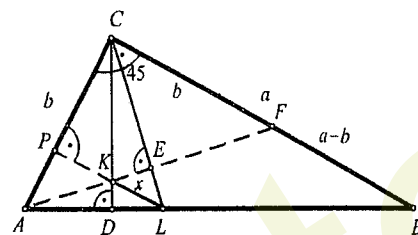
Доказателство: Нека P и Q са средите на AD и BC . $\triangle AMD$ е правоъгълен и медианата му $PM = \frac{d}{2}$, $\angle MPD = \alpha$, т.е. $PM \parallel AB$. Аналогично от $\triangle BNC$ $NQ = \frac{c}{2}$ и $NQ \parallel AB$.

Ако M и N са вътрешни за трапеца, то $MN = PQ - MP - NQ = \frac{a+b}{2} - \left(\frac{d}{2} + \frac{c}{2}\right)$.

Ако M и N са външни – $MN = MP + NQ - PQ = \frac{d}{2} + \frac{c}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)$.

5.5. ЪГЛОПОЛОВЯЩА И ДРУГИ ЕЛЕМЕНТИ В ТРИЪГЪЛНИК

5.5.1. В $\triangle ABC$ CD е височина, а CL ъглополовяща. От A е спуснат перпендикуляр към CL , който пресича CD в K . Намерете KL , ако катетите са a и b ($a > b$).



Решение: Ъглополовящата CL е и ос на симетрия за раменете CA и CB , т.е. $CA = CF = b$, а $BF = a - b$.

За $\triangle ALC$ CD и AE са височини и пресечната им точка K е ортоцентър. Следователно LP е също височина, т.е. $LP \perp AC$ и $LP \parallel BC$.

$\triangle ALK \sim \triangle ABF$ и следователно $\frac{LK}{BF} = \frac{AL}{AB}$, т.е. $\frac{x}{a-b} = \frac{AL}{AB}$.

Понеже CL е ъглополовяща, $\frac{AL}{BL} = \frac{b}{a}$ и $\frac{AL}{AB} = \frac{b}{a+b}$. Тогава $\frac{x}{a-b} = \frac{b}{a+b}$ или

$$KL = \frac{b(a-b)}{a+b}.$$

5.5.2. В $\triangle ABC$ CD е височина, а CL – ъглополовяща. Намерете лицето на $\triangle CDL$, ако $AB = 14$, $BC = 15$, $CA = 13$. **Отг.** 9.

5.5.3. Ъглополовящата AL и височината CD на остроъгълен $\triangle ABC$ се пресичат в точка E . Окръжност с радиус R и център E минава през A , средата на AB и пресича AC в K така, че $AK:KC = 1:3$. Намерете BC . **Отг.** $9\sqrt{2}R/2$.

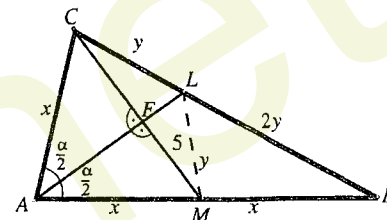
5.5.4. В $\triangle ABC$ медианата CM и ъглополовящата AL са взаимноперпендикулярни и се пресичат в точка F . Ако $S_{MLF} = 5$, намерете лицето на $\triangle ABC$.

Решение: Ясно е, че $\triangle ACF \cong \triangle MAF$ и $\triangle CFL \cong \triangle MFL$. Означаваме $AM = BM = x$ и $CL = ML = y$. AL е ъглополовящата, т.е.

$$\frac{LC}{LB} = \frac{CA}{AB} = \frac{1}{2} \text{ или } LB = 2y; \frac{S_{BLM}}{S_{CLM}} = \frac{BL}{CL} = \frac{2}{1}.$$

Получаваме, че $S_{BLM} = 2S_{CLM} = 20$ и

$$S_{MCB} = 30. \text{ CM е медиана, следователно } S_{ABC} = 2S_{BCM} = 60.$$



5.5.5. В $\triangle ABC$ ъглополовящата BL и медианата AM са перпендикулярни и $AM = BL = 4$. Намерете страните на триъгълника. **Отг.** $\sqrt{13}$; $2\sqrt{13}$; $3\sqrt{5}$.

5.5.6. В $\triangle ABC$ ъглополовящата AL дели медианата CM в отношение $CK:KM = 2$, а $\angle ABC$ е равен на 45° . Намерете отношението на лицето на $\triangle ACM$ и на описания около този триъгълник кръг. **Отг.** $2/5\pi$.

5.5.7. В равнобедрен триъгълник разстоянието между медицентъра и центъра на вписаната окръжност е 2. Намерете периметъра на триъгълника, ако радиусът на вписаната окръжност е 10. **Отг.** 108 или $48\sqrt{6}$.

5.5.8. В $\triangle ABC$ AL е ъглополовяща. Намерете AC , ако $CL = 16$, $BL = 20$ и центърът на окръжността, описана около $\triangle ACL$, лежи на AB .

Решение: $\angle MAL = \frac{\widehat{ML}}{2} = \frac{\alpha}{2}$, като вписан, а като централен $\angle MOL = \alpha$.

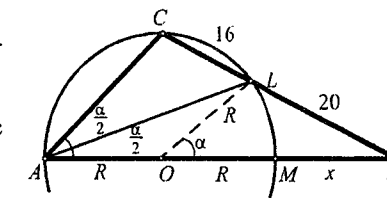
Получаваме, че $OL \parallel AC$. Тогава по Талес

$$\frac{R}{R+x} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \text{ или } R = 4x.$$

От теоремата за секущите: $x(x+2R) = 20 \cdot 36$ или $9x^2 = 720$, $x = 4\sqrt{5}$.

От подобие на $\triangle ACB$ и $\triangle OLB$ имаме: $\frac{AC}{OL} = \frac{AB}{OB}$ или $\frac{AC}{R} = \frac{2R+x}{R+x}$. Сега

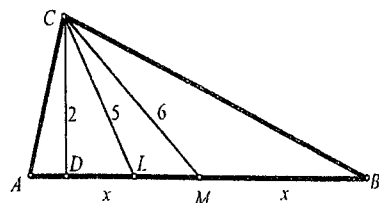
$$\frac{AC}{4x} = \frac{8x+x}{4x+x}, \text{ т.е. } AC = \frac{36x}{5} = \frac{144\sqrt{5}}{5}.$$



5.5.9. В $\triangle ABC$ CL е ъглополовяща, CH – височина, а O – център на описаната окръжност. Докажете, че $\angle HCL = \angle OCL$.

5.5.10. В $\triangle ABC$ ъглополовящата AD на $\angle BAC$ е равна на l . Окръжност с диаметър AD разделя AB и AC в отношение 2:1 и 1:1 считано от върха A . Намерете лицето на $\triangle ABC$. **Отг.** $\frac{7l^2\sqrt{35}}{48}$.

5.5.11. В $\triangle ABC$ медиана, ъглополовяща и височина, спуснати от върха C , са равни съответно на 6, 5 и 2. Намерете страната AB .



Решение: Пресмятаме

$$DL = \sqrt{CL^2 - CD^2} = \sqrt{21} \text{ и}$$

$$DM = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}. \text{ Нека } AB = 2x. \text{ Тогава}$$

$$CA^2 = 2^2 + (x - 4\sqrt{2})^2 \text{ и } CB^2 = 2^2 + (x + 4\sqrt{2})^2.$$

Понеже CL е ъглополовяща, $\frac{AL^2}{BL^2} = \frac{CA^2}{CB^2}$ или

$$\frac{(x - 4\sqrt{2} + \sqrt{21})^2}{(x + 4\sqrt{2} - \sqrt{21})^2} = \frac{4 + (x - 4\sqrt{2})^2}{4 + (x + 4\sqrt{2})^2}. \text{ Като опростим това уравнение, получаваме:}$$

$$x^2 = 28 - 68\sqrt{\frac{2}{21}} \text{ или } AB = 4\sqrt{7 - \frac{17}{21}\sqrt{42}}.$$

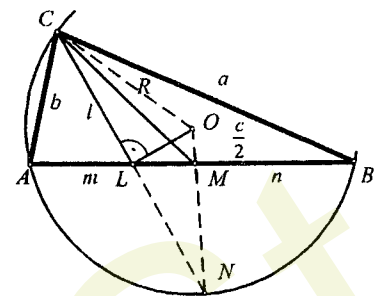
5.5.12. В остроъгълен $\triangle ABC$ височината AH , медианата BM и ъглополовящата CL се пресичат в точка T .

а) Докажете, че $LH \parallel AC$.

б) Намерете $\cos \angle ACB$, ако $TM = 2TC$.

Отг. 1/7.

5.5.13. (СУ) В $\triangle ABC$ CL е ъглополовяща, O е център на описаната около $\triangle ABC$ окръжност и $\angle OLC = 90^\circ$. Докажете, че:



а) $\sqrt{2}AB = AC + BC$;

б) $CM = R\sqrt{1 + 2\cos \gamma - 3\cos^2 \gamma}$, където M е средата на страната AB , R е радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност, а $\gamma = \angle ACB$;

в) ако $R = 1$, $CM \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Решение: а) Ясно е, че $CL = LN$ и

$\gamma < 90^\circ$. От формулата за дължината на ъглополовящата CL имаме:

$$l^2 = ab - mn, \text{ а от теоремата за хордите получаваме: } CL \cdot LN = AL \cdot LB \text{ или}$$

$$l^2 = mn. \text{ От тези две уравнения достигаем до } 2mn = ab \text{ и } 2l^2 = mn.$$

Знаем [5.1.1.], че $m = \frac{bc}{a+b}$ и $n = \frac{ac}{a+b}$. Тогава $\frac{2abc^2}{(a+b)^2} = ab$ или

$$2c^2 = (a+b)^2, \text{ т.е. } \sqrt{2}c = a+b.$$

б) От косинусова теорема $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab - c^2}{2ab}$. Като се

възползваме от резултата, получен в а), имаме: $\cos \gamma = \frac{c^2 - 4l^2}{4l^2}$. Тогава

$$4l^2 = \frac{c^2}{1 + \cos \gamma}. \text{ По формулата за медианата } 4CM^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 =$$

$$= 2(a+b)^2 - 2ab - c^2 \text{ или } 4CM^2 = 3c^2 - 8l^2. \text{ Като заместим достигаем до}$$

$$4CM^2 = 3c^2 - 2 \frac{c^2}{1 + \cos \gamma}, \text{ но } c = 2R \sin \gamma \text{ и като преобразуваме получаваме:}$$

$$CM = R\sqrt{1 + 2\cos \gamma - 3\cos^2 \gamma}.$$

в) Ще намерим най-голямата стойност на $1 + 2\cos \gamma - 3\cos^2 \gamma$ за $\gamma \in (0, 90^\circ)$. Полагаме $\cos \gamma = t \in (0, 1)$. Квадратната функция $f(t) = -3t^2 + 2t + 1$ достига най-голямата си стойност за $t = \frac{1}{3}$ или $f(t) \leq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$. Тогава при $R = 1$

$$CM \leq \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

5.6. ЗАДАЧИ С ИЗПОЛЗВАНЕ НА ТРИГОНОМЕТРИЯ

5.6.1. В $\triangle ABC$ $\angle ACB = 120^\circ$, а ъглополовящата $CL = 3$. Намерете $\tan \alpha$ и BC , ако $AC : BC = 3 : 2$.

Решение: По синусова теорема за

$$\triangle ABC: \frac{AC}{BC} = \frac{\sin(60^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{3}{2} \text{ или}$$

$$\frac{\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{3}{2}. \text{ Разделяме на}$$

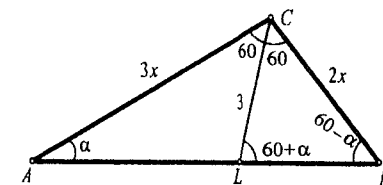
$$\sin \alpha \text{ и достигаем до } \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}. \text{ Пак по си-}$$

нусова теорема за $\triangle BCL$: $\frac{BC}{CL} = \frac{\sin(\alpha + 60^\circ)}{\sin(60^\circ - \alpha)}$, но $CL = 3$, тогава

$$BC = \frac{3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha\right)}. \text{ Разделяме на } \sin \alpha \text{ и заместваме } \tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}. \text{ Получа-}$$

ваме $BC = 5$.

5.6.2. В $\triangle ABC$ $AC = b$, $AB = c$ и $\angle CAB = 2\angle CBA$. Намерете BC .

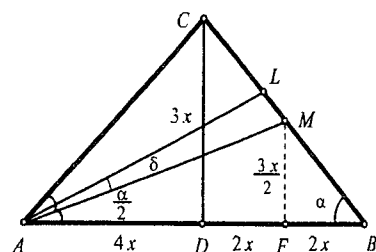


Отг. $\sqrt{b(b+c)}$.

5.6.3. В тъпоъгълния $\triangle ABC$ $AB = 14$. На AB е взета точка L , която е равноотдалечена от AC и BC , а на AL – точка K , равноотдалечена от A и B . Намерете $\sin \angle ACB$, ако $KL = 1$ и $\angle CAB = 45^\circ$.

Отг. $(4 - \sqrt{2})/6$.

5.6.4. Тангенсът на ъгъла при основата в равнобедрен триъгълник е равен на $\frac{3}{4}$. Намерете тангенса на ъгъла между медианата и ъглополовящата, прекарани към бедрото.



Решение: Понеже $\operatorname{tg} \alpha = \frac{CD}{AD} = \frac{3}{4}$, означаваме $CD = 3x$ и $AD = 4x$. Тогава $AC = BC = 5x$ и $\cos \alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{4}{5}$. От формулата

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \text{ получаваме, че } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}.$$

Построяваме $MF \parallel CD$. MF е средна отсечка и $\operatorname{tg} \angle MAF = \frac{MF}{AF} = \frac{1}{4}$. Нека $\angle LAM = \delta$. Имаме: $\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} - \delta \right) = \frac{\frac{1}{3} - \operatorname{tg} \delta}{1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \delta} = \frac{1}{4}$. Оттук получаваме $\operatorname{tg} \delta = \frac{1}{13}$.

5.6.5. В равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) AL е ъглополовяща. Намерете $\cos \angle ACB$, ако $\operatorname{tg} \angle LAB = \frac{1}{2}$.

Отг. $\frac{7}{25}$

5.6.6. В равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) ъглополовящите AM и CK се пресичат в точка J . $S_{BJK} = 3$, а $\cos \angle CBA = \frac{5}{13}$. Намерете лицето на $\triangle CJM$ и дължината на проекцията на AM върху правата BC .

Отг. $78/23$; $324/299$.

5.6.7. В остроъгълния триъгълник $\triangle ABC$ CD е височина, а CL е ъглополовяща и $\angle DCL = 30^\circ$. Ако H е ортоцентър на $\triangle ABC$ и $\cos \angle ACB = \frac{1}{10}$, намерете $CH:DH$.

Отг. 1:2.

5.6.8. (СУ) Точката H е петата на височината през върха C на $\triangle ABC$, CL е ъглополовяща, а $\cos \gamma = 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$ и $\alpha > \beta$.

а) Докажете, че $\angle LCH = 45^\circ$.

б) Ако $CB = a$ и $CA = b$, изразете CL чрез a и b .

в) Ако $BC = \sqrt{\sqrt{5} + 1}$, докажете, че $S_{ABC} \leq \sqrt{\sqrt{5} - 2}$.

Отг. б) $\frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

5.6.9. (ВУЗ) Един от ъглите на триъгълник е три пъти по-голям от друг, а ъглополовящата на третия ъгъл дели триъгълника на части, лицата на които се отнасят както 2:1. Намерете ъглите на триъгълника.

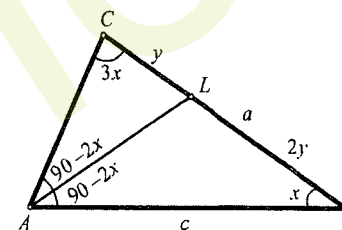
Решение: Имаме $\frac{S_{ABL}}{S_{ACL}} = \frac{BL}{CL} = \frac{2}{1}$, но

$\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC}$. Прилагаме синусова теорема за

$\triangle ABC$: $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{2}{1}$ и получаваме, че

$$2 \sin x = \sin 3x \text{ или } 2 \sin x = \sin x (3 - 4 \sin^2 x).$$

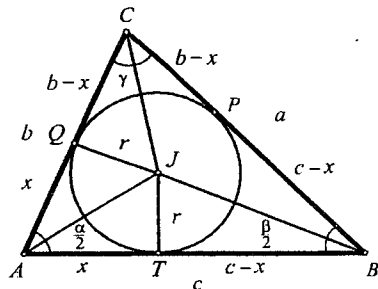
Понеже $\sin x > 0$, единственото решение на това уравнение е $\sin x = \frac{1}{2}$ и следователно $x = 30^\circ$.



6. ПОЛУПЕРИМЕТЪР, РАДИУС НА ВПИСАНА И ОПИСАНА ОКРЪЖНОСТ

6.1. ПОЛУПЕРИМЕТЪР

6.1.1. Намерете дължините на отсечките, на които се разделя всяка страна на $\triangle ABC$ от допирните точки на вписаната окръжност, ако са дадени страните.



Решение: Ясно е, че $AT = AQ$, $BT = BP$ и $CQ = CP$. Нека $AT = x$, тогава $CQ = b - x$ и $BT = c - x$. Имаме $BC = BP + CP = BT + CQ$

$$\text{или } a = b - x + c - x, \text{ т.е. } x = \frac{b + c - a}{2} \text{ и}$$

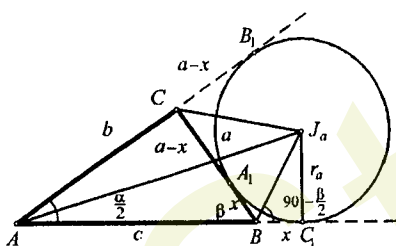
$$AT = \frac{b + c + a - 2a}{2} = p - a.$$

Аналогично $BT = p - b$, $CP = p - c$.

Да отбележим, още че $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{JT}{AT} = \frac{r}{p - a}$, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{r}{p - b}$, $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p - c}$ и

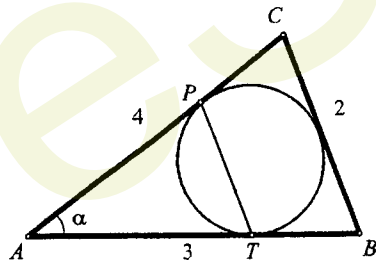
$$\angle AJB = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

6.1.2. Докажете, че ако A_1 , B_1 и C_1 са съответно допирните точки на външновписаната откъм BC окръжност с център J_a и радиус r_a :



- 1) $BC_1 = p - c$, $CB_1 = p - b$, $AC_1 = p - a$;
- 2) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r_a}{p}$, $\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = \frac{r_a}{p - c}$, $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{r_a}{p - b}$;
- 3) $\angle BJ_a C = \frac{\beta + \gamma}{2}$;
- 4) $S_{ABC} = r_a (p - a)$.

6.1.3. В равнобедрения $\triangle ABC$, вписаната окръжност се допира до бедрата AC и BC в M и N . Намерете MN , ако $AB = 12$, $AC = 10$. **Отг.** 24/5.



6.1.4. В $\triangle ABC$ $AB = 3$, $BC = 2$, $AC = 4$. Намерете лицето на $\triangle ATP$, където T и P са допирните точки на вписаната окръжност със страните AB и AC .

Решение: Знаем, че

$$AT = AP = p - a = \frac{5}{2}. \text{ Пресмятаме}$$

$$\cos \alpha = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}, \text{ тогава } \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{8}. \text{ За лицето получаваме:}$$

$$S_{ATP} = \frac{AT \cdot AP \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{25}{64} \sqrt{15}.$$

6.1.5. В $\triangle ABC$ точка D е на BC и $\angle CAD = \angle ACD$. Периметрите на $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ са съответно 37 и 24. Намерете AC . **Отг.** 13.

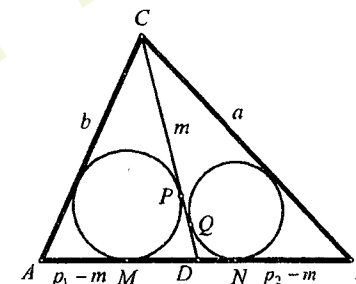
6.1.6. В $\triangle ABC$ ($AC \neq BC$) медианата CD се допира до окръжностите, вписани в $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ съответно в P и Q . Докажете, че $PQ = \frac{1}{2} |AC - BC|$.

Решение: Нека полупериметрите $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ са p_1 и p_2 . Тогава

$AM = p_1 - m$ и $BN = p_2 - m$. Понеже D е среда на AB , $DM = DP = DA - AM = \frac{c}{2} - (p_1 - m)$.

Аналогично $DN = DQ = \frac{c}{2} - (p_2 - m)$. Тогава

$$PQ = |DP - DQ|, \text{ получаваме } PQ = \frac{|a - b|}{2}.$$



6.1.7. В равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) M лежи на основата AB и $AM = m$, $BM = n$. Вписаните в $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$ окръжности се допират до CM в точки P и Q . Докажете, че $PQ = \frac{1}{2} |m - n|$.

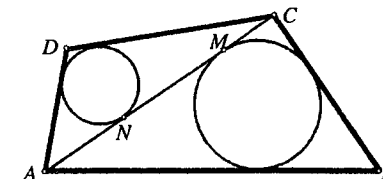
6.1.8 В $\triangle ABC$ AD е ъглополовяща и $\angle CAB = \alpha$. Намерете отношението на радиусите на окръжностите, вписани в $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$.

$$\text{Отг. } \frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right)}{2 \sin \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

6.1.9. В четириъгълника $ABCD$ е построен диагонален AC . В $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ са вписани окръжности, които се допират до диагонала AC в точките M и N . Докажете, че $MN = \frac{1}{2} |(AB + CD) - (AD + BC)|$.

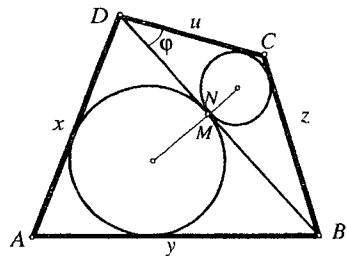
Доказателство: Нека полупериметрите на $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ са p_1 и p_2 . Имаме: $AM = p_1 - BC$, $AN = p_2 - CD$. Тогава $MN = |AM - AN|$. Като заместим AN и AM с техните равни ще получим търсеното равенство.

Забележка: от тази задача става ясно, че ако в четириъгълника $ABCD$ може да се впише окръжност, то окръжностите, вписани в триъгълниците ABC и ADC , се допират.



6.1.10. Даден е успоредникът $ABCD$. Във всеки от $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$ и $\triangle DAB$ е вписана окръжност. Докажете, че допирните точки на тези окръжности с диагоналите AC и BD са върхове на правоъгълник.

6.1.11. Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност. В $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$ са вписани окръжности с радиуси 1 и $\frac{\sqrt{15}}{5}$. Намерете страните на четириъгълника и диагонала AC , ако лицата на $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$ са 6 и $\sqrt{15}$.



Решение: От $S_{ABD} = 6 = p_1 \cdot 1$ и $S_{BCD} = \sqrt{15} = p_2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{5}$ имаме: $p_1 = 6$ и $p_2 = 5$. Означаваме $AD = x$, $AB = y$, $CD = u$, $BC = z$.

Прилагаме Херонова формула:
 $S_{ABD}^2 = p_1(p_1 - x)(p_1 - y)(p_1 - BD) = 36$
 и $S_{BCD}^2 = 5(5 - z)(5 - u)(5 - BD) = 15$. Като разделим тези две равенства получаваме $\frac{(6 - BD)(6 - x)(6 - y)}{(5 - BD)(5 - z)(5 - u)} = \frac{6}{3}$. От задача [6.1.9.] знаем, че $BM = BN$, т.е. $6 - x = 5 - u$ и $DM = DN$ или $6 - y = 5 - z$. От $\frac{6 - BD}{5 - BD} = 2$ определяме $BD = 4$.

От равенството $x + y + 4 = 2p_1 = 12$ изразяваме $y = 8 - x$. Тогава $6(6 - x)(6 - 8 + x)(6 - 4) = 36$. Получаваме, че $x = 5$ и $y = 3$ или $x = 3$ и $y = 5$. По същия начин намираме $z = 2$ и $u = 4$ или $z = 4$ и $u = 2$.

Следващите пресмятания не зависят от избора на x , y , z и u .

Ясно е, че $\angle DAB = 90^\circ$. Пресмятаме $\cos \varphi = \frac{4^2 + 2^2 - 4^2}{2 \cdot 4 \cdot 2} = \frac{1}{4}$ и $\sin \varphi = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Тогава $AC^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos(90^\circ + \varphi) = 13 + 12 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 13 + 3\sqrt{15}$.

6.1.12. Четириъгълникът $ABCD$ е описан около окръжност с $r = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$ и се разделя от диагонала AC на $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$ с радиуси на вписаните окръжности $\frac{2}{\sqrt{5}}$ и 1. Намерете AC и страните на $ABCD$, ако разстоянието от центъра на вписаната в $\triangle ACB$ окръжност до B е $2\sqrt{\frac{6}{5}}$. **Отг.** $AC = 3, 3, 4, 5, 4$.

6.1.13. Изразете чрез страните на $\triangle ABC$ отсечката, съединяваща допирните точки на c и b с вписаната окръжност. **Отг.** $2(p - a)\sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}$.

6.1.14. Към вписаната в $\triangle ABC$ окръжност е построена допирателна MN ($M \in AC, N \in BC$). Ако $MN = m$ изразете лицето на $\triangle MNC$ чрез страните, периметъра и лицето на $\triangle ABC$.

Решение: Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност е външновписана за $\triangle MNC$. От [6.1.2.] знаем, че

$$S_{MNC} = \frac{1}{2}r(CM + CN - MN), \text{ но}$$

$$MN = MT + NT = MP + NQ. \text{ Тогава}$$

$$S_{MNC} = \frac{r}{2}(CM + CN + MP + NQ - 2m) =$$

$$= \frac{r}{2}(CP + CQ - 2m), \text{ но } CP = CQ = p - c \text{ или}$$

$$S_{MNC} = r(p - c - m) = \frac{S}{p}(p - c - m).$$

Забележка: Ако допирателната MN е успоредна на AB , $\triangle MNC \sim \triangle ABC$ и $\frac{MN}{AB} = \frac{p_{MNC}}{p_{ABC}} = \frac{2(p - c)}{2p}$.

6.1.15. Към вписаната в $\triangle ABC$ окръжност е построена успоредна на AB допирателна, която пресича AC и BC в точки P и Q . Намерете периметъра на $\triangle ABC$, ако $AB = c$ и $PQ = q$. **Отг.** $2c^2/(c - q)$.

6.1.16. Вписаната в равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) окръжност се допира до AC в точка M , като $CM = m$, $CN = n$. Към окръжността са построени допирателни $A_1B_1 \parallel AB$ и $PQ \parallel BC$. Намерете A_1B_1 и PQ . **Отг.** $\frac{(m + n)n}{2n + m}, \frac{2mn}{2n + m}$.

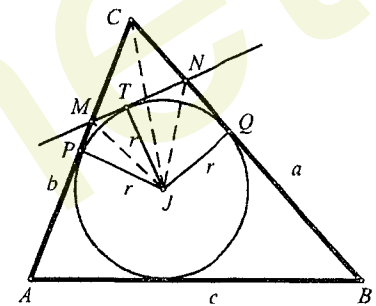
6.1.17. (УНСС) Периметърът на $\triangle ABC$ е $2p$. На AB и AC са взети точки D и E така, че $DE \parallel BC$ и DE се допира до вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Намерете страната BC , за която DE има най-голяма дължина и пресметнете максималната дължина на DE . **Отг.** $p/2, p/4$.

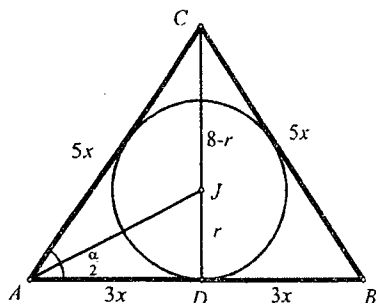
6.1.18. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност с радиус r . Към тази окръжност са построени допирателни, съответно успоредни на страните на $\triangle ABC$. В образуваните нови три триъгълника са вписани окръжности с радиуси r_1, r_2, r_3 . Докажете, че $r = r_1 + r_2 + r_3$.

6.1.19. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност с радиус 1, която се допира и до средната отсечка MN ($MN \parallel AC$). Ако $\cos \angle ABC = \frac{4}{5}$, намерете AC . **Отг.** 3.

6.2. РАДИУС НА ВПИСАНА ОКРЪЖНОСТ

6.2.1. В равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) $AB = 12$, а радиусът на вписаната окръжност е 3. Намерете лицето на триъгълника. **Отг.** 48.



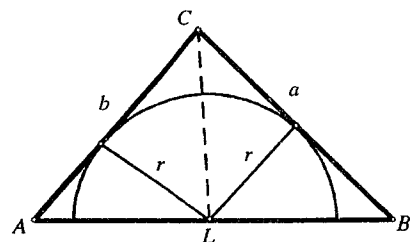


6.2.2. В равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) височината CD е 8, а $AB:AC = 6:5$. Намерете радиуса на вписаната окръжност.

Решение: Понеже AJ е ъглополовящата, имаме: $\frac{r}{8-r} = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$. Тогава $5r = 24 - 3r$ или $r = 3$.

6.2.3. Вписаната в равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) окръжност се допира до BC в точка P и пресича ъглополовящата на ъгъл C в точка Q . Ако центърът на окръжността е J , докажете, че QP и JB са успоредни.

6.2.4. В триъгълник със страни a , b и c е вписана полуокръжност с център, лежащ на страната c . Намерете радиуса ѝ.



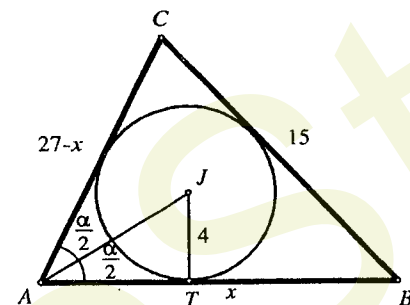
Решение: Ясно е, че

$$S_{ABC} = S_{ACJ} + S_{BCJ}, \text{ т.е. } S_{ABC} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2}.$$

$$\text{Тогава } r = \frac{2S_{ABC}}{a+b} \text{ или}$$

$$r = \frac{2}{a+b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

6.2.5. В $\triangle ABC$ $a=15$, а $b+c=27$. Намерете $\cos \angle BAC$ и страните на триъгълника, ако радиусът на вписаната окръжност е равен на 4.



Решение: Имаме $p = \frac{15+27}{2} = 21$ и

$$AT = p - a = 6. \text{ Тогава } \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{JT}{AT} = \frac{2}{3}. \text{ От}$$

формулата $\cos 2\varphi = \frac{1 - \tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}$ пресмятаме

$$\cos \alpha = \frac{5}{13}, \text{ а оттам } \sin \alpha = \frac{12}{13}. \text{ За лицето на}$$

$\triangle ABC$ имаме $S = pr = 84$. Нека $AB = x$,

$$\text{тогава } AC = 27 - x \text{ и } S = 84 = \frac{x(27-x)}{2} \cdot \frac{12}{13}$$

или $x^2 - 27x + 182 = 0$ с корени $x = 13$ и $x = 14$. Страните на $\triangle ABC$ са 15, 13, 14.

6.2.6. В триъгълник е вписана окръжност с радиус 3. Намерете страните на триъгълника, ако една от тях се дели на отсечки с дължини 4 и 3.

Отг. 7, 25, 24.

6.2.7. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност се допира до AB в точката D , като $AD = 2$, $DB = 3$. Намерете:

а) дължините на катетите на $\triangle ABC$;

б) дължината на отсечката CD ;

в) лицето на $\triangle BCD$.

Отг. а) 3, 4; б) $\sqrt{\frac{29}{5}}$; в) $\frac{18}{5}$.

6.2.8. В правоъгълен триъгълник е вписана окръжност. Допирната точка с хипотенузата я дели в отношение 2:3. Намерете страните на триъгълника, ако центърът на вписаната окръжност е отдалечен от върха на правия ъгъл на разстояние $\sqrt{8}$.

Отг. 10; 8; 6.

6.2.9. В равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) $\angle ACB = 120^\circ$, $AC = b$. Намерете диаметъра на вписаната окръжност.

Отг. $b(2\sqrt{3} - 3)$.

6.2.10. (СУ) Разстоянията от центъра J на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност до A и B са $\sqrt{7}$ и $\sqrt{21}$. Намерете страните на $\triangle ABC$, ако $\angle ACB = 120^\circ$.

Решение: Знаем, че

$$\angle AJB = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = 150^\circ. \text{ От косинусова теорема пресмятаме:}$$

$$AB^2 = 21 + 7 - 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{21} \cos 150^\circ \text{ или } AB = 7.$$

За лицето на $\triangle AJB$ получаваме:

$$S_{AJB} = \frac{1}{2} \sqrt{7} \cdot \sqrt{21} \sin 150^\circ = \frac{7\sqrt{3}}{4}, \text{ но } S_{ABJ} = \frac{AB \cdot r}{2},$$

$$\text{тогава } r = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Сега } AT^2 = AJ^2 - JT^2 = \frac{25}{4} \text{ или } AT = AP = \frac{5}{2} \text{ и } BT = BK = \frac{9}{2}.$$

Пресмятаме $CP = PJ \cdot \cotg 60^\circ = \frac{1}{2}$. Получаваме $BC = 5$ и $AC = 3$.

6.2.11. (УНСС) В $\triangle ABC$ $c = 2\sqrt{7}$, $\gamma = 60^\circ$ и $AJ:JB = 1:2$, където J е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Намерете лицето му.

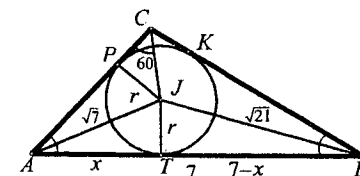
Отг. $40\sqrt{3}/7$.

6.2.12. В $\triangle ABC$ $c = 48$, а $h_c = \frac{17}{2}$. Намерете разстоянието от центъра на окръжността, вписана в триъгълника, до върха C , ако радиусът на вписаната окръжност е 4.

Отг. 5.

6.2.13. В $\triangle ABC$ на хипотенузата $AB = c$ са нанесени отсечките $AD = AC = b$ и $BE = BC = a$. Докажете, че диаметърът на описаната около $\triangle CDE$ окръжност е равен на $\sqrt{2}(a+b-c)$.

6.2.14. В $\triangle ABC$ вписаната окръжност има радиус 3 и се допира до BC в точка D . Външно вписаната откъм BC окръжност е с радиус 4 и се допира до



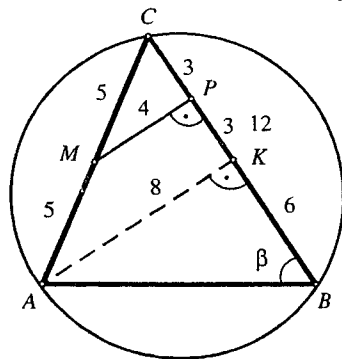
BC в точка E . Ако $\angle BCA = 120^\circ$, намерете отсечката ED и централата на двете окръжности. **Отг.** $3\sqrt{3}$, $2\sqrt{39}$.

6.2.15. В равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) $AB = c$ и $\angle BAC = \alpha$. В него е вписана окръжност. Намерете радиуса на окръжността, допираща се до вписаната окръжност и до бедрата на триъгълника. **Отг.** $\frac{c}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$.

6.2.16. Докажете, че центърът на окръжност, вписана в триъгълник, е ортоцентър на триъгълника, чийто върхове са центровете на външнописаните окръжности.

6.3. РАДИУС НА ОПИСАНА ОКРЪЖНОСТ

6.3.1. В $\triangle ABC$ $CA=10$, $CB=12$. Намерете радиуса на описаната окръжност, ако разстоянието от средата M на AC до страната BC е 4.



Решение: Поотделно разглеждаме случаите $\angle ACB < 90^\circ$ и $\angle ACB > 90^\circ$.

I случай: Нека $\angle ACB < 90^\circ$. Построяваме $AK \parallel MP$. Ясно е, че $AK = 2MP = 8$, тогава $CK^2 = 10^2 - 8^2$ или $CK = 6$. Виждаме, че височината AK е и медиана, т.е. $AB = AC = 10$.

Пресмятаме $\sin \gamma = \frac{AK}{AC} = \frac{4}{5}$ и по синусова теорема определяме $R = \frac{AB}{2 \sin \gamma} = \frac{25}{4}$.

II случай: Нека $\angle ACB > 90^\circ$ (направете чертеж сами). Както по-горе $CK = 6$, но K е външна. Сега $AB^2 = BK^2 + AK^2$ или $AB = 2\sqrt{97}$. Пресмятаме $\sin \beta = \frac{AK}{AB} = \frac{4}{\sqrt{97}}$ и $R = \frac{AC}{2 \sin \beta} = \frac{5\sqrt{97}}{4}$.

6.3.2. През точка от окръжност са построени две хорди с дължини 9 и 17. Намерете радиуса на окръжността, ако разстоянието между средите на хордите е 5. **Отг.** $85/8$.

6.3.3. Намерете лицето на триъгълник, вписан в окръжност с радиус 2, ако два от ъглите му са 60° и 45° . **Отг.** $3 + \sqrt{3}$.

6.3.4. Радиусът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност е равен на 2, а $\angle ABC = 30^\circ$. Симетралата на AB пресича страната BC във вътрешна точка D , като $CD = k \cdot BD$.

а) Докажете, че за лицето S на $\triangle ABC$ е изпълнено $S = \frac{\sqrt{3}(k+1)}{k^2 - k + 1}$.

б) Намерете за коя стойност на k лицето S е най-голямо. **Отг.** б) $\sqrt{3} - 1$.

6.3.5. (ВТУЗ) В окръжност k е вписан $\triangle ABC$ такъв, че $\angle ACB = 30^\circ$. Окръжност k_1 с център O_1 , лежащ върху k , минава през A и C и пресича правата AB в точка Q такава, че $QB = \sqrt{3} AB$ (A е между Q и B). Намерете:

а) мерките на ъглите на $\triangle ABC$;

б) лицето на $\triangle ABC$, ако ъглополовящата на $\angle ACB$ е l .

Решение: а) Понеже O_1 е от симетралата на AC , $\widehat{AO_1} = \widehat{CO_1}$, т.е. BO_1 е ъглополовяща. Построяваме $O_1M \perp AB$ и $O_1N \perp BC$. Ясно е, че $MO_1 = NO_1$ и $BM = BN$. Тогава $\triangle QMO_1 \cong \triangle CNO_1$, $MQ = NC$ и $BQ = MQ + MB = NC + NB = BC$. От синусова теорема $\frac{AB}{BC} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin \alpha}$ или $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $\alpha = 60^\circ$ или $\alpha = 120^\circ$.

б) Ако $\alpha = 60^\circ$, ъглите са 60° , 90° и 30° . Тогава $BC = l \cos 15^\circ$, $AB = BC \cot 60^\circ = l \cos 15^\circ \cot 60^\circ$

и $S = \frac{l^2 \cos^2 15^\circ \cot 60^\circ}{2}$, но $\cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$. Тогава $S = \frac{l^2 (3 + 2\sqrt{3})}{24}$.

Ако $\alpha = 120^\circ$, ъглите са 120° , 30° и 30° . Имаме: $\frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{l}{\sin 120^\circ}$ или $AC = l \sqrt{\frac{2}{3}}$, но $AC = AB$ и $S = \frac{1}{2} AC^2 \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2l^2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{6}$.

6.3.6. В $\triangle ABC$ $BC = 8$, $\angle ABC = 60^\circ$ и $R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

а) Намерете останалите страни на триъгълника, ако той е остроъгълен.

б) Намерете страните на правоъгълника, който има най-голямо лице и е вписан в $\triangle ABC$, като два от върховете му лежат на AB .

Отг. а) 5 и 7; б) $5/2$ и $2\sqrt{3}$.

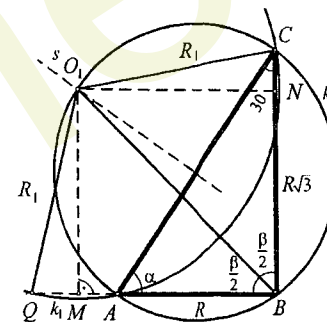
6.3.7. Намерете радиуса на описаната около равнобедрения остроъгълен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) окръжност, ако разстоянията от центъра на окръжността до AC и до AB са съответно 15 и 7. **Отг.** 18.

6.3.8. (УАСГ) Нека R и h са радиусът на описаната окръжност и височината към основата AB на равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$). Нека $h/R = x$.

а) Изразете посредством x косинуса на ъгъл ACB .

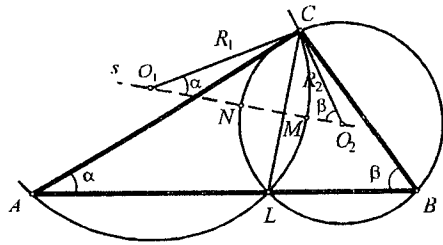
б) Ако d е сумата от разстоянията от центъра на описаната около триъгълника окръжност до страните му, изразете отношението d/R като функция на x .

в) Намерете ъглите на триъгълника за онези стойности на x , за които d/R има локален екстремум.



Отг. а) $x - 1$; б) $\begin{cases} \sqrt{4-2x}+1-x, & x \in (0;1) \\ \sqrt{4-2x}+x-1, & x \in [1;2) \end{cases}$; в) $60^\circ, 90^\circ$.

6.3.9. (ТУ) В $\triangle ABC$ $AC=3$, $BC=4$, а CL е ъглополовяща. Нека O_1 и O_2 са центровете на окръжностите, описани около $\triangle ACL$ и $\triangle BCL$. Намерете дължината на централата O_1O_2 .



Решение: Дъгата $\widehat{CL} = 2\alpha$ и $\angle LO_1C = 2\alpha$. O_1 и O_2 лежат на симетралата на CL , следователно $\angle O_2O_1C = \alpha$. Аналогично $\angle O_1O_2C = \beta$. Тогава $\angle O_1CO_2 = 90^\circ$ и $O_1O_2 = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$.

$$\text{Пресмятаме } CL = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b} = \frac{12\sqrt{2}}{7}.$$

По синусова теорема $R_1 = \frac{CL}{2\sin\alpha} = \frac{10\sqrt{2}}{7}$ и $R_2 = \frac{15\sqrt{2}}{14}$. Получаваме $O_1O_2 = \frac{25\sqrt{2}}{14}$.

6.3.10. (СУ) В $\triangle ABC$ $AB = 10$, $BC = 16$, $CA = 14$. Точките M и N лежат на страните BC и CA и са такива, че в четириъгълника $ABMN$ може да се впише окръжност и около него може да се опише окръжност. Намерете страните и лицето на четириъгълника $ABMN$.

Отг. 6, 9, 5, $30\sqrt{3}$.

6.3.11. В $\triangle ABC$ окръжност минава през върха B , средите M и N на AC и BC и се допира до AC . Намерете радиуса ѝ, ако $AB = \sqrt{2}$, а $\sin \angle ABC = 1/3$.

Отг. $3/2$.

6.3.12. Точката O е център на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Докажете, че ако O_1 , O_2 и O_3 са симетричните на O относно страните на $\triangle ABC$, то $\triangle ABC \cong \triangle O_1O_2O_3$ и имат обща окръжност на деветте точки [4.2.16].

6.4. ВПИСАНА И ОПИСАНА ОКРЪЖНОСТ

6.4.1. В равнобедрен $\triangle ABC$ ($CA = CB$) $\angle ACB = \varphi$. Намерете отношението на радиусите на вписаната и на описаната окръжност.

Решение: (Вж. фигурата към задача 6.4.3.) От синусова теорема $R = \frac{AB}{2\sin\varphi}$. От $\triangle AJD$ изразяваме радиуса на вписаната окръжност:

$$\frac{JD}{AD} = \tan \angle JAD \text{ или } r = AD \tan \left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right). \text{ Тогава } \frac{r}{R} = \sin \varphi \tan \left(45^\circ - \frac{\varphi}{4}\right).$$

6.4.2. Отношението на радиуса на вписаната към радиуса на описаната окръжност в равнобедрен триъгълник е m . Намерете косинуса на ъгъла при основата му.

Отг. $(1 \pm \sqrt{1-2m})/2$.

6.4.3. В равнобедрен $\triangle ABC$ ($CA = CB$) $r = \frac{3}{2}$, $R = \frac{25}{8}$. Намерете дължините на страните му, ако те са цели числа.

Решение: Построяваме диаметъра CE .

Ако $\angle CAB = \alpha$, то $\angle AJD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$,

$\angle CAE = 90^\circ$ и следователно $\angle EAJ = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, т.е. $\triangle AJE$ е равнобедрен и $EA = EJ$ (вж. зад. [6.4.7.]).

От правоъгълния $\triangle CAE$ $AE^2 = ED \cdot EC$ или $AE^2 = 2R(EJ - r)$. Получаваме уравнението $y^2 = 2 \cdot \frac{25}{8} \left(y - \frac{3}{2}\right)$ с корени $y_1 = \frac{5}{2}$, $y_2 = \frac{15}{4}$.

Ако $AE = \frac{15}{4}$, $DE = \frac{15}{4} - \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ и $AD^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = 3^2$, то $AB = 6$ и

$$AC = \sqrt{CE^2 - AE^2} = 5.$$

Със същите пресмятания се убеждаваме, че при $AE = \frac{5}{2}$ страните на $\triangle ABC$ не са цели числа.

6.4.4. В равнобедрен $\triangle ABC$ ($CA = CB$) вписаната окръжност се допира до AC и BC в точки M и N , а CD е височина. Ако $P_{ABC} = 14$ и $7r = 2CD$, намерете MN и R .

Решение: AJ е ъглополовяща, т.е.

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DJ}{JC} = \frac{2}{5}. \text{ По условие } 14 = AB + 2AC$$

или $AD + AC = 7$. Тогава $AD = 2$, $AC = 5$ и

$$CD = \sqrt{21}. \text{ Пресмятаме}$$

$$CM = CA - AM = CA - AD = 3 \text{ и от}$$

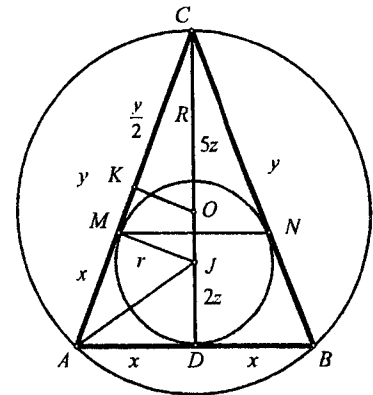
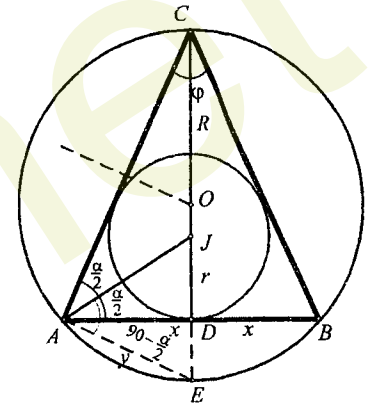
$$\triangle MNC \sim \triangle ABC \text{ имаме: } \frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CA} = \frac{3}{5}, \text{ т.е.}$$

$$MN = \frac{12}{5}. \text{ Понеже } \triangle OCK \sim \triangle ACD, \frac{R}{CK} = \frac{AC}{CD}.$$

$$\text{Тогава } R = \frac{CK \cdot AC}{CD} = \frac{25}{2\sqrt{21}}.$$

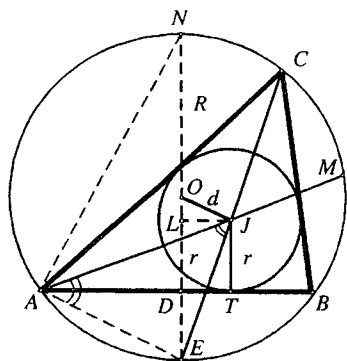
6.4.5. В равнобедрен $\triangle ABC$ ($CA = CB$) вписаната окръжност се допира до AC и BC в точки M и N . Намерете радиуса ѝ, ако $AB = a$ и $MN = b$.

Отг. $\frac{a}{2} \sqrt{\frac{b}{2a-b}}$.



6.4.6. В равнобедрен $\triangle ABC$ ($CA = CB$) $AB = 24$, $AC = 15$. Ако O е центърът на описаната около триъгълника окръжност, а J е центърът на вписаната окръжност, намерете лицето на четириъгълника $AOBJ$. **Отг.** 90.

6.4.7. Докажете, че за всеки триъгълник е в сила $d^2 = R^2 - 2Rr$, където d е разстоянието между центъра на описаната и центъра на вписаната окръжности (формула на Ойлер).



Доказателство: Ще разгледаме случая на остроъгълнен триъгълник. Нека NE е симетралата на AB . От косинусова теорема за $\triangle OJE$ имаме $OJ^2 = OE^2 + EJ^2 - 2OE \cdot EJ \cos \angle OEJ$ или $d^2 = R^2 + EJ^2 - 2R \cdot EL$.

$\angle EAM = \frac{1}{2}(\widehat{BE} + \widehat{BM})$ като вписан, а $\angle AJE$ е с връх в окръжността, т.е.

$$\angle AJE = \frac{1}{2}(\widehat{EA} + \widehat{MC}) = \frac{1}{2}(\widehat{BE} + \widehat{BM}).$$

Докажем, че $\triangle AEJ$ е равнобедрен и $JE = AE$ (запомнете този факт!). От правоъгълния $\triangle EAN$ имаме

$$AE^2 = EN \cdot ED = 2R \cdot ED. \text{ Тогава } d^2 = R^2 + AE^2 - 2R \cdot EL, \\ d^2 = R^2 + 2R \cdot ED - 2R \cdot EL = R^2 - 2R(EL - ED); d^2 = R^2 - 2Rr.$$

6.4.8. Даден е $\triangle ABC$, около който е описана окръжност $k(O; R)$ и е вписана окръжност $k_1(J; r)$. Ако F е средата на $\widehat{AB}$, която не съдържа C , докажете, че окръжността $k_0(F; FB)$ минава през точките A, B, J и през центъра J_a на окръжността, външно вписана за триъгълника откъм страната AB .

6.4.9. (УНСС) В $\triangle ABC$ $a = 21$, $b = 13$, $c = 20$. Точките O и J са центровете на описаната и на вписаната окръжност. Пресметнете разстоянията от O и J до страната AB , и дължината на OJ . **Отг.** $14/3$, $25/6$, $\sqrt{65}/2$.

6.4.10. (СУ) В $\triangle ABC$ $\beta = 120^\circ$, $r = \sqrt{3}$ и $R = \frac{14}{\sqrt{3}}$. Намерете a, b и c .

Решение: По синусова теорема $b = 2R \sin 120^\circ$, т.е. $b = 14$.

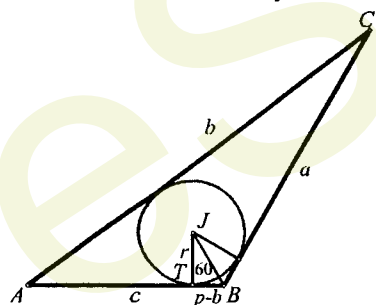
От $BT = p - b = r \cdot \cotg 60^\circ = 1$ получаваме $p = 15$.

За лицето на $\triangle ABC$ имаме:

$$S = p \cdot r = 15\sqrt{3}, \text{ но } S = \frac{abc}{4R} \text{ и следователно}$$

$ac = 60$. По косинусова теорема

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$ или $a^2 + c^2 = 136$. От тези две уравнения за a и c намираме, че $a = 6$, $b = 10$ или $a = 10$, $c = 6$.



6.4.11. В $\triangle ABC$ CD е ъглополовяща. През D е построена права f , успоредна на допирателната към описаната около триъгълника окръжност в точка C .

а) Докажете, че f е допирателна за вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

б) Ако $P_{ABC} = 2p$, $BC = a$ и $N = AC \cap f$, намерете P_{AND} .

в) Ако $M = BC \cap f$, докажете, че $\triangle ADN \cong \triangle BDM$. **Отг.** б) $2(p - a)$.

6.4.12. В $\triangle ABC$ е вписана окръжност с радиус r и $|AC - BC| = k$.

а) Изразете разстоянието между центровете на вписаната и на описаната окръжност чрез r и k .

б) Намерете S_{ABC} , ако $r = k = 1$. **Отг.** $\sqrt{4r^2 + k^2}/2$; $3r^2 + r\sqrt{8r^2 + k^2}$.

6.4.13. Четириъгълникът $ABCD$ е такъв, че около него може да се опише и в него да се впише окръжност. Ако $AD - BC = AB - CD$, докажете, че диагонален AC е диаметър на описаната окръжност.

6.4.14. Докажете, че за всеки триъгълник е в сила равенството:

$$\frac{p}{p-a} + \frac{p}{p-b} + \frac{p}{p-c} = 1 + 4 \frac{R}{r}.$$

Доказателство: Равенството е равносилно с $\frac{pr}{p-a} + \frac{pr}{p-b} + \frac{pr}{p-c} = r + 4R$

$$\text{или с } S \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right) = \frac{S^2 + abcp}{pS}.$$

Привеждаме лявата страна под общ знаменател и като разкрием скобите достигаем до $p(-p^2 + ab + bc + ca) = \frac{S^2 + abcp}{p}$. Представяме дясната страна

$$\frac{S^2 + abcp}{p} \text{ като } \frac{p(p-a)(p-b)(p-c) + abcp}{p} \text{ и като разкрием скобите се убеждаваме, че равенството е изпълнено.}$$

Забележка: Понеже $\frac{p}{p-a} = \frac{r_a}{r}$, $\frac{p}{p-b} = \frac{r_b}{r}$ и $\frac{p}{p-c} = \frac{r_c}{r}$ от доказаното равенство получаваме **теоремата на Щайнер**: $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

6.5. КОМБИНИРАНИ ЗАДАЧИ

6.5.1. В остроъгълния $\triangle ABC$ ($AC > BC$) CM е медиана, а CD е височина. Ако вписаната окръжност се допира до AB в точка T и $TD = TM$, докажете, че $2AB = AC + BC$.

Решение: От косинусова теорема: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$ или

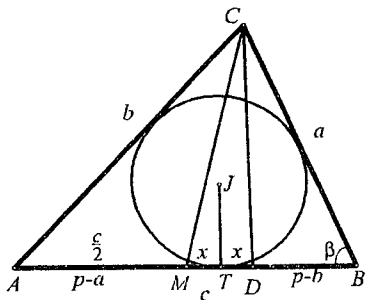
$$BD = a \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}. \text{ Пресмятаме}$$

$$TD = BT - BD = p - b - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c} \text{ и}$$

$$TM = AT - AM = p - a - \frac{c}{2}. \text{ По условие}$$

$$TD=TM \text{ или } p-b-\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}=p-a-\frac{c}{2}, \text{ от-}$$

където намираме $a - b = \frac{a^2 - b^2}{2c}$ и понеже

$$a \neq b, \text{ то } 2c = a + b.$$


6.5.2. В остроъгълния $\triangle ABC$ са построени височините AD и BE . Намерете лицето на $\triangle CDE$, ако $\angle ACB = \gamma$, $AB = c$, а радиусът на вписаната в $\triangle CDE$ окръжност е r_1 .

Отг. $r_1^2 \cotg \frac{\gamma}{2} + cr_1 \cos \gamma$.

Отг. $r_1^2 \cotg \frac{\gamma}{2} + cr_1 \cos \gamma$.

6.5.3. В равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) към окръжността с диаметър височината CD ($CD < AB$) са построени допирателните AM и BN . Ако AM и BN се пресичат в точка F и $FM : AB = k$, намерете $AC : AB$.

Решение: Съобразяваме, че щом $CD < AB$ точките F и C са от една полуправнина спрямо AB .

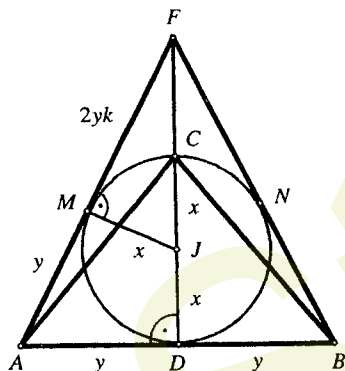
Означаваме $JD = JC = JM = x$ и $AD = AM = BD = y$. От условието $FM =$

2ky, а от $\triangle JMF \sim \triangle ADF$ имаме $\frac{JM}{AD} = \frac{MF}{DF}$

или $\frac{x}{y} = \frac{2yk}{\sqrt{(2yk+y)^2 - y^2}}$. Тогава

$$x = \frac{ky}{\sqrt{k^2 + k}}, AC = \sqrt{(2x)^2 + y^2} = y\sqrt{\frac{5k+1}{k+1}}$$

$$\text{и } \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5k+1}{k+1}}.$$



6.5.4. Дадени са страните на $\triangle ABC$ $BC = 6$, $AC = 8$ и лицето му $S = 3\sqrt{15}$. Ако $c < 2m_c$ намерете r . **Отг.** $\sqrt{15}/3$.

6.5.5. (ТУ) Медицентърът на равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) лежи на вписаната окръжност. Ако $AB = a$, $BC = b$ докажете, че $5a^2 + 4b^2 = 180r^2$.

6.5.6. Страните на $\triangle ABC$ са 13, 14, и 15. Окръжност отсича от страните на триъгълника равни хорди с дължина 6. Намерете радиуса ѝ. Отг. 5.

6.5.7. Даден е ромб с остър ъгъл α . Намерете отношението на лицето на окръжността, вписана в ромба и лицето на ромба. **Отг.** $\frac{\pi}{2} \sin \alpha$.

Отг. $\frac{\pi}{4} \sin \alpha$.

6.5.8. В ромб е вписана окръжност с радиус r . Намерете лицето на ромба, ако големият му диагонал е $4r$. Отг. $\frac{8r^2\sqrt{3}}{3}$

Отг. $\frac{8r^2\sqrt{3}}{3}$.

6.6. ЗАДАЧИ С ИЗПОЛЗВАНЕ НА ТРИГОНОМЕТРИЯ

6.6.1. Докажете, че за произволен триъгълник са в сила равенствата:

$$\text{a) } r = \frac{a \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}; \quad \text{б) } r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}; \quad \text{в) } r = p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2};$$

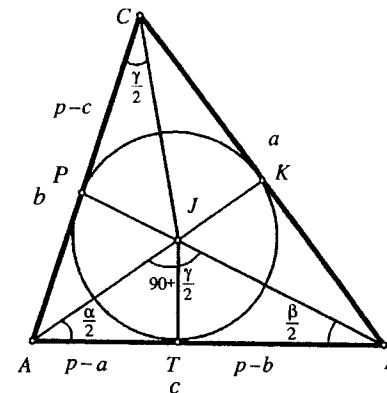
г) $p = 4R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$; д) $S = p^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$.

Доказательство:

a) Имаме: $S_{ABJ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \left(90^\circ + \frac{\gamma}{2} \right)} = \frac{cr}{2},$

откъдето получаваме: $r = \frac{c \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}}$ и

$$c = \frac{r \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}.$$



б) От синусова теорема $c = 2R \sin \gamma = 4R \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\lambda}{2}$. Заместваме c с полученото в а) и достигаме до $r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$

в) **Упътване:** Умножете равенствата $r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, $r = (p-b) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ и

$$r = (p - c) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Останалите равенства докажете сами.

6.6.2. Докажете, че за всеки триъгълник $h_a \cos \frac{\alpha}{2} = 2p \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$.

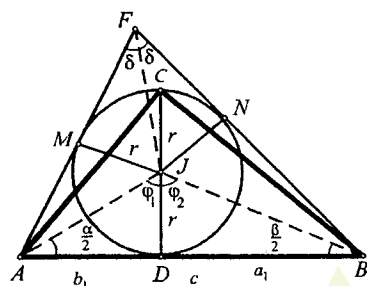
6.6.3. Намерете страните на $\triangle ABC$, ако $r = \frac{10}{3}$, $\cos \gamma = \frac{5}{13}$ и лицето на триъгълника е 60. **Отг.** 10; 13; 13.

6.6.4. В равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) височината $CD = h$ и $\angle ACD = \varphi$ ($\varphi > 30^\circ$). Намерете разстоянието между центровете на вписаната и на описаната окръжност.

Отг. $\frac{h \sin \left(45^\circ - \frac{3\alpha}{2} \right)}{2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}$.

6.6.5. Нека d_a , d_b и d_c са разстоянията от центъра на описаната около остроъгълния триъгълник окръжност до страните му. Докажете, че $4 \left(\frac{a}{d_a} + \frac{b}{d_b} + \frac{c}{d_c} \right) = \frac{abc}{d_a d_b d_c}$.

6.6.6. Към окръжност с диаметър височината CD на $\triangle ABC$ са построени допирателните AM и BN , които се пресичат в точка F . Намерете FM , ако $AB = c$.



Решение: Означаваме ъгъл AFB с 2δ . Окръжността е вписана в $\triangle ABF$, тогава $\angle AIB = 90 + \delta$. Имаме $\operatorname{tg} \angle AID = \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{b_1}{r}$ и

$\operatorname{tg} \angle BJD = \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{a_1}{r}$. От формулата

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2}{1 - \operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2} \text{ получаваме:}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{(a_1 + b_1)r}{r^2 - a_1 b_1} = \operatorname{tg}(90 + \delta) = -\operatorname{cotg} \delta.$$

Понеже $(2r)^2 = a_1 b_1$ имаме $\operatorname{cotg} \delta = \frac{c}{3r}$, но $MF = r \operatorname{cotg} \delta$, т.е. $MF = \frac{c}{3}$.

6.6.7. Даден е изпъкналият четириъгълник $ABCD$ с $\angle ADB = 90^\circ$, $\angle BCA = 90^\circ$ и страна $AB = 2$. Разстоянието между центровете на вписаните в $\triangle ADC$ и $\triangle BCA$ окръжности е $\sqrt{2}$. Намерете DC . **Отг.** $\sqrt{3}$.

6.6.8. На страната AB на $\triangle ABC$ е избрана точка M . В $\triangle ACM$, $\triangle BCM$ и $\triangle ABC$ са вписани окръжности с радиуси r_1 , r_2 и r и външно са вписани окръжности откъм AM , BM и AB с радиуси ρ_1 , ρ_2 и ρ . Докажете, че $\frac{r_1}{\rho_1} = \frac{r_2}{\rho_2} = \frac{r}{\rho}$.

6.6.9. Три окръжности с центрове в точките A , B и C се допират две по две външно в точките P , Q и L . Дадено е, че $\sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}$, а сумата от радиусите на тези окръжности е $12\sqrt{2}$. Намерете най-голямата дължина, която може да има окръжността през P , Q , L . **Отг.** 6π .

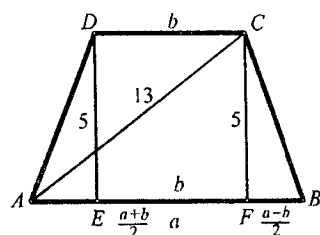
$$\begin{aligned} \frac{CS}{2} &= \frac{\sqrt{AZ \cdot BZ}}{2} \\ \parallel \\ r &= \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}} = \frac{\sqrt{AZ \cdot BZ \cdot FM}}{\sqrt{AB + FM}} = \frac{\sqrt{AD \cdot BD}}{2} \\ \Rightarrow 4FM &= AB + FM \end{aligned}$$

7. ТРАПЕЦ

7.1. РЕШАВАНЕ НА ТРАПЕЦ ЧРЕЗ КОНСТРУКТИВНО СВЪРЗАН С НЕГО ТРИЪГЪЛНИК

7.1.1. Височината и диагоналят на равнобедрен трапец са 5 и 13. Намерете лицето на трапеца.

Решение: Понеже трапецът е равнобедрен, височината CF разделя основата AB на отсечки с дължини $BF = \frac{a-b}{2}$ и



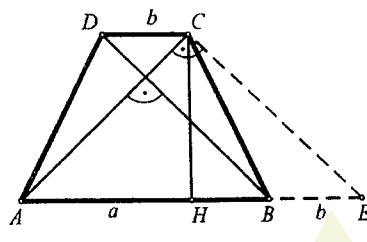
$AF = \frac{a+b}{2}$. От правоъгълния $\triangle AFC$ имаме

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 13^2 - 5^2 = 12^2$. За лицето получаваме

$$S = \frac{a+b}{2} h = 60.$$

7.1.2. Диагоналят на равнобедрен трапец е равен на 10, а лицето му е 48. Намерете височината на трапеца. **Отг.** 8 или 6.

7.1.3. Диагоналите на равнобедрен трапец са взаимноперпендикулярни. Докажете, че височината му е равна на средната отсечка на трапеца.



Доказателство: Построяваме CE , успоредна и равна на BD . Тогава $BE = DC = b$, $AE = a + b$.

Височината CH е и медиана в правоъгълния $\triangle AEC$, следователно $CH = \frac{AE}{2}$, т.е.

$$h = \frac{a+b}{2}.$$

7.1.4. Даден е трапец, чиито ъгли при голямата основа са 15° и 75° . Дължината на средната му отсечка е 4, а отсечката, съединяваща средите на основите е 2. Намерете страните на трапеца.

Решение: През средата N на CD построяваме отсечките NP и NQ , успоредни съответно на DA и CB . Тогава $\angle NPQ = 15^\circ$, $\angle NQP = 75^\circ$ и $\angle PNQ = 90^\circ$, но NM е медиана в $\triangle PNQ$, следователно $PQ = 2MN$. По условие $a + b = 8$ и

$$PQ = a - b = 4, \text{ т.е. } a = 6, b = 2. \text{ Имаме: } BC = QN = PQ \cdot \sin 15^\circ \text{ и } AD = PN = PQ \cdot \cos 15^\circ. \text{ Пресметнете сами } \sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) \text{ и } \cos 15^\circ \text{ и покажете, че } BC = \sqrt{6} - \sqrt{2}, AD = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

7.1.5. Намерете лицето на трапец с основи 11 и 6 и бедро 4, ако сумата от ъглите при голямата основа е 90° . **Отг.** 102/5.

7.1.6. В равнобедрения трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AC \perp BC$, $AB = a$ и $CD + AD = \frac{3a}{4}$. Намерете CD . **Отг.** $\frac{2 - \sqrt{3}}{4} a$.

7.1.7. Основите на трапец са 30 и 20, а дължините на бедрата 8 и 6. Намерете лицето на трапеца. **Отг.** 120.

7.1.8. В равнобедрения трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AC \perp BC$. Намерете CD и AD , ако $AB = a$ и $AD^2 + CD^2 = \frac{11}{16} a^2$. **Отг.** $\frac{3}{4} a, \frac{\sqrt{2}}{4} a$.

7.1.9. В правоъгълен трапец малката основа е равна на $\sqrt{2}$, наклоненото бедро е 4, а острият ъгъл при основата е равен на 45° . Намерете лицето на трапеца. **Отг.** 8.

7.1.10. Бедро на трапец е $\sqrt{108}$ и сключва с малката основа ъгъл 120° . Намерете лицето на трапеца, ако основите му са 3 и 11. **Отг.** 63.

7.1.11. В равнобедрен трапец бедрото е равно на средната отсечка, а периметърът му е равен на 48. Намерете бедрото. **Отг.** 12.

7.1.12. Голямата основа на трапец е равна на 24. Намерете малката основа, ако разстоянието между средите на диагоналите му е 4. **Отг.** 16.

7.1.13. Лицето на правоъгълен трапец е S , а острият му ъгъл е α . Намерете височината на трапеца, ако по-малкият му диагонал е равен на голямата основа. **Отг.** $\sqrt{2S \cot \alpha}$.

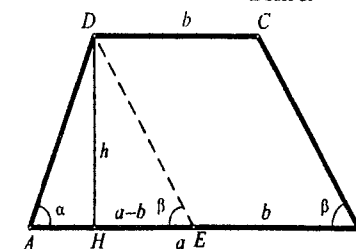
7.1.14. Малката основа на равнобедрен трапец е равна на височината му h . Острият ъгъл на трапеца е 2α . Намерете периметъра на трапеца. **Отг.** $2h(\cot \alpha + 1)$.

7.1.15. Периметърът на равнобедрен трапец с остър ъгъл α е p , а височината му е h . Намерете лицето на трапеца. **Отг.** $\frac{h(p \sin \alpha - 2h)}{2 \sin \alpha}$.

7.1.16. Намерете лицето на трапец с основи a и b ($a > b$) и остри ъгли α и β при голямата основа.

Решение: Построяваме DE , успоредна и равна на BC . $\triangle AED$ има основа $AE = a - b$ и прилежащи ъгли α и β .

Лицето на $\triangle AED$ е:



$S_{AED} = \frac{1}{2}(a-b)^2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{1}{2}(a-b)h$, тогава $h = \frac{(a-b)\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. Лицето на

трапеца е $S_{ABCD} = \frac{(a^2 - b^2) \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha+\beta)}$.

7.1.17. Ъглите при основата AB на трапеца $ABCD$ са 60° и 45° . Намерете лицето на трапеца, ако $AB^2 - CD^2 = 100$. **Отг.** $25(3 - \sqrt{3})$.

7.1.18. Намерете лицето на трапец с диагонали 7 и 8 и основи 3 и 6.

Отг. $12\sqrt{5}$.

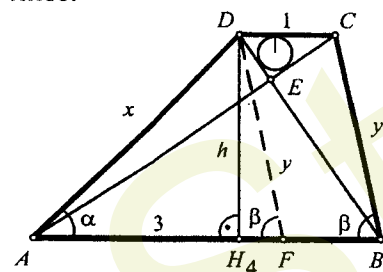
7.1.19. Острият ъгъл между диагоналите на равнобедрен трапец е φ . Намерете височината му, ако лицето му е S . **Отг.** $\sqrt{S \operatorname{tg} \varphi}$.

7.1.20. (УНСС) В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) диагоналите му AC и BD се пресичат в точка O така, че ъгъл $BOC = 60^\circ$. Средната отсечка на трапеца е $\frac{7}{2}$, а височината му е $\frac{15\sqrt{3}}{14}$. Намерете AC и BD . **Отг.** 3 и 5 или 5 и 3.

7.1.21. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AD = p$, $BC = q$, $AB = a$ и $AB > CD$. Намерете CD , ако $\angle DAB = 2\angle CBA$. **Отг.** $\frac{p^2 + ap - q^2}{p}$.

7.1.22. (НПМГ) Даден е трапец $ABCD$ с основи AB и CD , за които $\angle ACD = 2\angle ABD$. Ако $AC = CD = 5$ и $AB = 6$, намерете лицето на трапеца. **Отг.** 22.

7.1.23. В трапеца $ABCD$ $AB = 4$, $CD = 1$, $\operatorname{tg} \alpha = 2$, $\operatorname{tg} \beta = 3$. Намерете радиуса на окръжността, вписана в $\triangle CDE$, където E е пресечната точка на диагоналите.



Решение: Построяваме DF , успоредна и равна на BC . По синусова теорема за $\triangle AFD$

имаме: $\frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{3}{\sin(\alpha+\beta)}$ или

$$BC = \frac{3 \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}.$$

Пресмятаме $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и

$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Аналогично $\sin \beta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ и $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Тогава $BC = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. Пак от

синусова теорема $\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{3}{\sin(\alpha+\beta)}$ или $AD = \frac{9}{\sqrt{5}}$.

Пресмятаме AC по косинусова теорема за $\triangle ABC$:

$$AC^2 = 16 + \frac{72}{5} - 2 \cdot 4 \cdot \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{104}{5}. \text{ По същия начин от } \triangle ABD \text{ } BD^2 = \frac{89}{5}.$$

За височината на трапеца имаме $DH = AD \sin \alpha$ или $DH = \frac{9}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{18}{5}$.

Понеже $\triangle CDE \sim \triangle ABE$ с коефициент на подобие $k = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{4}$, височината на

$\triangle CDE$ към CD е $\frac{h}{5}$. Тогава $S_{CDE} = \frac{1}{2} CD \frac{h}{5} = \frac{9}{25}$ и $EC = \frac{AC}{5} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{104}{5}}$,

$ED = \frac{BD}{5} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{89}{5}}$. Радиуса на вписаната в $\triangle CDE$ окръжност пресмятаме по формулата $r = \frac{S}{p}$. Получаваме $r = \frac{18}{25 + 2\sqrt{130} + \sqrt{445}}$.

7.1.24. В равнобедрен трапец $ABCD$ $AB:CD$ е 5:1. Перпендикулярът от върха A към BC пресича BC в точка M , която е между B и C и $BC = AM$.

а) Пресметнете $\sin \angle BAD$.

б) Намерете S_{ABCD} , ако $BC = a$.

Отг. а) $2/\sqrt{5}$; б) $3a^2/5$.

7.2. ПОДОБНИ ТРИЪГЪЛНИЦИ В ТРАПЕЦ

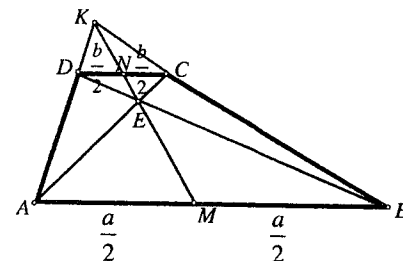
7.2.1. Средите на основите, пресечната точка на диагоналите и пресечната точка на продълженията на бедрата на трапец лежат на една права (**теорема на Шайнер**).

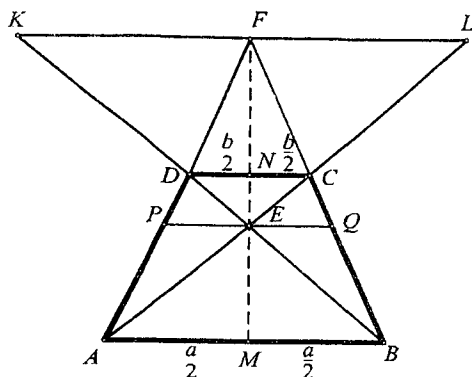
Доказателство: Триъгълниците ABE и CDE са централно подобни с център E . Средите на основите M и N са съответни точки и затова правата MN минава през центъра на централното подобие (хомотетия) точката E .

Аналогично, триъгълниците ABK и DCK са централно подобни с център K . Отново средите M и N са съответни и правата MN минава през центъра на новата хомотетия K .

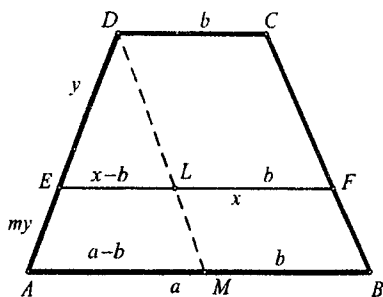
7.2.2. На основите AB и CD на трапец са построени квадрати (външни за трапеца). Докажете, че правата, съединяваща центровете на квадратите, минава през пресечната точка на диагоналите на трапеца.

7.2.3. Трапецът $ABCD$ има основи $AB = a$ и $CD = b$. Пресечната точка на AC и BD е E , а на продълженията на AD и BC е F . През E и F са построени прави, успоредни на AB , пресичащи бедрата в точките P и Q , а продълженията на диагоналите в K и L . Намерете отсечките PQ и KL .



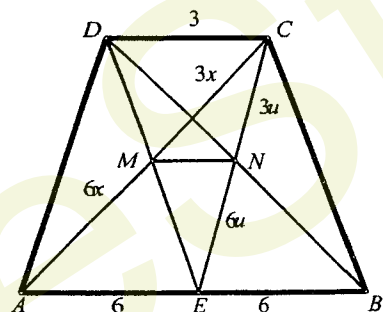


7.2.4. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AB = a$, $CD = b$. Отсечката EF ($E \in AD$, $F \in BC$) е успоредна на AB и $AE:ED = m$. Намерете EF .



7.2.5. През пресечната точка E на диагоналите на трапец е построена права, успоредна на основите му. Определете отсечката от тази права между бедрата, ако средната отсечка е $4/3$, а E дели диагонала на части, които се отнасят както $1:3$.

Отг. 1.



от обратната теорема на Талес разбираме, че $MN \parallel AB$. Тогава $\triangle CMN \sim \triangle CAE$

Решение: $\triangle PED \sim \triangle ABD$, т.е.

$$\frac{PE}{AB} = \frac{DE}{DB}, \text{ но } \frac{DE}{EB} = \frac{b}{a} \text{ и следователно}$$

$$\text{но } \frac{DE}{DB} = \frac{b}{a+b}. \text{ Тогава } PE = \frac{ab}{a+b}.$$

$$\text{По същия начин и } QE = \frac{ab}{a+b}.$$

$$\text{Получаваме } PQ = \frac{2ab}{a+b}.$$

По подобен начин $\triangle KFD \sim \triangle BAD$,

$$\frac{KF}{AB} = \frac{FD}{AD}, \frac{FD}{FA} = \frac{b}{a}, \text{ т.е. } \frac{FD}{AD} = \frac{b}{a-b} \text{ и}$$

$$KL = \frac{2ab}{a-b}.$$

Решение: Построяваме DM , успоредна и равна на BC . Нека $EF = x$. Понеже $\triangle ELD \sim \triangle AMD$ имаме:

$$\frac{EL}{AM} = \frac{DE}{DA} = \frac{DE}{DE+EA} \text{ или } \frac{x-b}{a-b} = \frac{1}{1+m}.$$

От това равенство получаваме

$$EF = x = \frac{bm+a}{m+1}.$$

7.2.6. Трапецът $ABCD$ има основни $AB=12$ и $CD=3$. Правите CE и DE през средата E на AB , пресичат AC и BD в точките M и N . Намерете MN .

Решение: Понеже $\triangle MCD \sim \triangle MAE$ и

$$\triangle NCD \sim \triangle NEB \text{ имаме: } \frac{CM}{MA} = \frac{CD}{AE} = \frac{1}{2} \text{ и}$$

$$\frac{CN}{NE} = \frac{CD}{EB} = \frac{1}{2}. \text{ Виждаме, че } \frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NE} \text{ и}$$

$$\text{и } \frac{MN}{AE} = \frac{CN}{CE} = \frac{1}{3}, \text{ т.е. } MN = 2.$$

7.2.7. (ВТУЗ) Една от основите на равнобедрен трапец е 15. Правите, съединяващи средата M с краищата на другата основа пресичат диагоналите на трапеца в точките K и P така, че $KP = 3$. Намерете другата основа на трапеца.

Отг. 5.

7.2.8. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) AC и BD се пресичат в точка E . Правата CK е успоредна на AD и пресича BD в точка P , така че $DE = BP$. Намерете отношението $AB:CD$.

Отг. $(1+\sqrt{5})/2$.

7.2.9. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AB = a$ и $CD = b$. Окръжност минава през B , C и D и се допира до страната AD . Намерете BD .

Отг. $\sqrt{ab}$.

7.2.10. Равнобедрен трапец $ABCD$ има основни $AB = a$ и $CD = b$ $a > b$. Продълженията на AD и BC се пресичат под прав ъгъл в точка M . Да се намерят разстоянията от пресечната точка O на AC и BD до основите на трапеца и до точката M .

$$\text{Отг. } \frac{a(a-b)}{(a+b)}, \frac{b(a-b)}{2(a+b)}, \frac{ab}{a+b}.$$

7.2.11. В трапеца $ABCD$ с основни AB и CD през A е построена права, която пресича BD в точка E и BC в точка K , като $BE:ED = 1:2$ и $CK:KB = 1:4$. Намерете $CD:AB$.

Отг. $1:4$.

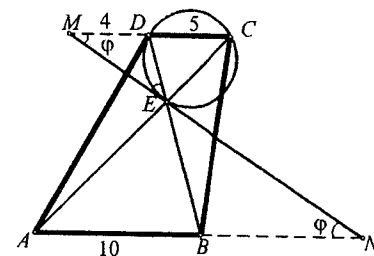
7.2.12. (УАСГ) Диагоналите AC и BD на трапеца $ABCD$ се пресичат в точка E . Около $\triangle DCE$ е описана окръжност и към нея е построена допирателна в точка F , която пресича правата CD в точка M , като D е между M и C и $MD = 4$, а $DC = 5$. Ако $\cos \angle EMC = \frac{3}{4}$, а $AB = 10$, намерете DE и радиуса на описаната около $\triangle ABE$ окръжност.

Решение: От теоремата за допирателна и секуща имаме: $ME^2 = MD \cdot MC$, получаваме $ME = 6$. Означаваме $\angle EMC = \varphi$. По косинусова теорема $EC^2 = MC^2 + ME^2 - 2MC \cdot ME \cos \varphi$ или $EC = 6$.

$\triangle CEM$ се оказва равнобедрен и затова $\angle ECM = \varphi$. Тогава пак по косинусова теорема пресмятаме, че $DE = 4$.

$\triangle ABE \sim \triangle CDE$ с коефициент на пропорционалност $k = \frac{AB}{CD} = 2$, т.е. $BE = 8$ и радиусът на описаната около $\triangle ABE$ окръжност е два пъти по-голям от този на описаната около $\triangle CDE$.

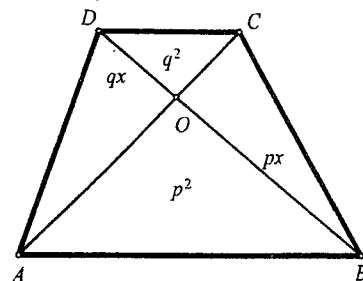
Понеже $\sin \varphi = \frac{\sqrt{7}}{4}$, за радиуса на описаната около $\triangle CDE$ окръжност



имаме: $R_1 = \frac{ED}{2 \sin \varphi} = \frac{8}{\sqrt{7}}$. Тогава $R_{ABE} = \frac{16}{\sqrt{7}}$.

7.2.13. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) AC и BD се пресичат в точка E . Около $\triangle ECD$ е описана окръжност, а допирателната ѝ в точка E пресича AB в точка M (B е между A и M). Ако $AM = a$, $AB = b$, намерете EM . **Отг.** $\sqrt{a(a-b)}$.

7.2.14. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) лицата на триъгълниците ABO и CDO , където O е пресечната точка на AC и BD , са съответно p^2 и q^2 . Намерете лицето на трапеца.



Решение: $\triangle ABO \sim \triangle CDO$ и

$$\frac{S_{ABO}}{S_{CDO}} = \frac{p^2}{q^2} = \frac{BO^2}{DO^2}, \text{ т.е. } \frac{BO}{DO} = \frac{p}{q}. \triangle BOC \text{ и } \triangle DOC$$

имат обща височина (от върха C), тогава

$$\frac{S_{BOC}}{S_{DOC}} = \frac{BO}{DO} = \frac{p}{q} \text{ и } S_{BOC} = pq. \triangle ADC \text{ и } \triangle BDC$$

имат равни лица (защо?). Тогава и $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ са равнолицеви ($S_{AOD} = S_{ACD} - S_{COD}$);

$$S_{ABCD} = p^2 + q^2 + 2pq = (p+q)^2.$$

7.2.15. Разстоянията от пресечната точка на диагоналите в равнобедрен трапец до основите и до бедрото са 1, 5 и 2. Намерете лицето му. **Отг.** 72.

7.2.16. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AB = 30$, $CD = 24$, $AD = 3$, $\angle DAB = 60^\circ$. Ако E е пресечната точка на диагоналите, намерете S_{BCE} . **Отг.** $10\sqrt{3}$.

7.2.17. В трапеца $ABCD$ с лице 36 през върха A е построена права, която пресича диагонала BD в точката K , а основата DC в точка P , като $DK:KB = 1:3$ и $DP:PC = 2:1$. Намерете лицето на $BKPC$.

Решение: Означаваме: $DK = x$, $PC = y$. Тогава $BK = 3x$, $DP = 2y$.

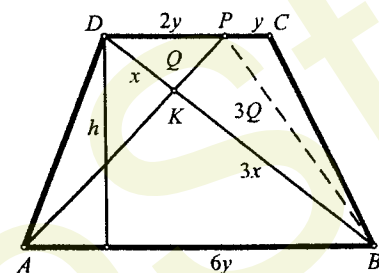
$$\triangle ABK \sim \triangle PDK \text{ и } \frac{AB}{PD} = \frac{BK}{DK} = 3, \text{ получаваме}$$

$$AB = 6y. \text{ Пресмятаме } \frac{2S_{PCB}}{2S_{ABCD}} = \frac{yh}{(6y+3y)h} = \frac{1}{9},$$

$$\text{т.е. } S_{PCB} = 4. \text{ Тогава } \frac{S_{DPB}}{S_{PCB}} = \frac{DP}{PC} = 2 \text{ или}$$

$$S_{DPB} = 8, \text{ но } \frac{S_{BKP}}{S_{BDP}} = \frac{BK}{BD} = \frac{3}{4}. \text{ Разбираме, че}$$

$$\text{или } S_{BKP} = 6; S_{BKPC} = 10.$$



7.2.18. Даден е трапец с дължини на основите a и b . Намерете дължината на отсечката, която е успоредна на основите и дели трапеца на две части чиито лица се отнасят както $k:1$.

Решение: Нека $MN = x$, по условие

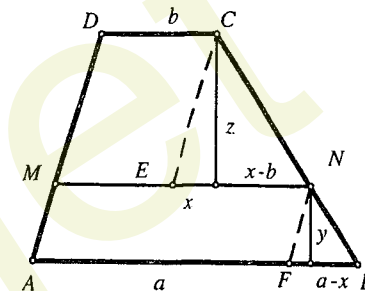
$$S_{ABNM} : S_{MNCD} = k \text{ или } \frac{\frac{a+x}{2}y}{\frac{x+b}{2}z} = k;$$

$$\frac{a+x}{x+b} = k \frac{z}{y}. \text{ Построяваме } CE \text{ и } NF \text{ успоредни на } DA.$$

Понеже $\triangle ENC \sim \triangle FBN$, имаме:

$$\frac{z}{y} = \frac{x-b}{a-x}. \text{ Тогава } \frac{a+x}{x+b} = k \frac{x-b}{a-x}.$$

$$\text{Получаваме } MN^2 = \frac{a^2 + b^2 k}{1+k}.$$



7.2.19. (ВТУЗ) Даден е трапец с основи a и b . Намерете дължината на отсечката, която бедрата на трапеца отсичат от права, успоредна на основите му, ако: а) правата го дели на два подобни трапеца;

б) правата го дели на две равнолицеви части.

$$\text{Отг. а) } \sqrt{ab}; \text{ б) } \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

7.2.20. В трапеца $ABCD$ с основи AB и CD , $\angle ACB = \angle ADC$, $BC = 12$ и $AD = 27$. Намерете диагонала AC .

Отг. 18.

7.2.21. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $\angle BCD = 90^\circ$. Права, перпендикулярна на AD , пресича AD в точка M , а BC в точка N . Ако $AN = p$, $MB = q$, а разстоянието от точка D до правата AN е d , намерете разстоянието от C до BM .

Решение: Около четириъгълниците $ABMN$ и $MNCD$ могат да се опишат окръжности с диаметри AN и DN (може да не ги рисуваме, а само да си ги представяме – така по-лесно ще откриваме равни ъгли).

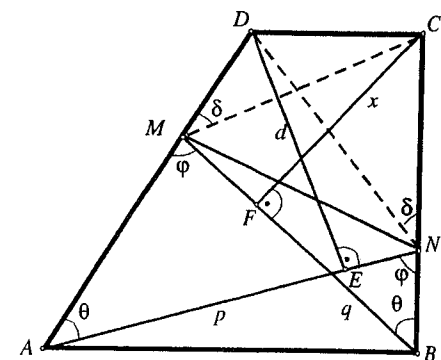
Виждаме, че $\angle NAM = \angle MBN$ (като вписани), равни са и $\angle AMB = \angle ANB$, и $\angle CND = \angle CMD$. Тогава $\angle AND = 180^\circ - \angle ANB - \angle CND = 180^\circ - \angle AMB - \angle CMD = \angle BMC$.

Докажем, че $\triangle AND \sim \triangle BMC$ и $\triangle END \sim \triangle FMC$.

$$\text{От първото подобие имаме: } \frac{AN}{BM} = \frac{ND}{MC},$$

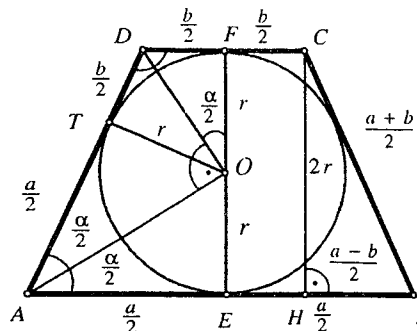
$$\text{а от второто } \frac{ND}{MC} = \frac{DE}{CF}. \text{ Получихме}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{d}{CF} \text{ или } CF = \frac{qd}{p}.$$



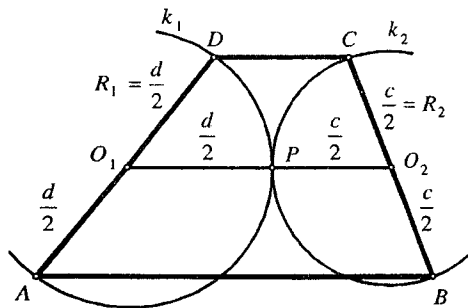
7.3. ТРАПЕЦ, ОПИСАН ОКОЛО ОКРЪЖНОСТ

7.3.1. Равнобедрен трапец е описан около окръжност. Докажете, че диаметърът на окръжността е средногеометрично на основите на трапеца.



Доказателство: В правоъгълния $\triangle AOD$ $r = OT$ е височина, $AT = AE = \frac{a}{2}$ и $DT = DF = \frac{b}{2}$. Тогава $r^2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}$ или $2r = \sqrt{ab}$. Други начини да докажете това равенство е да използвате, че $\triangle AEO \sim \triangle OFD$ или да изразите CH от правоъгълния $\triangle BHC$.

7.3.2. Докажете, че в трапец може да се впише окръжност тогава и само тогава, когато окръжностите с диаметри бедрата на трапеца се допират.



Доказателство: Нека k_1 и k_2 са окръжностите с диаметри AD и BC , а P е допирната им точка. Понеже O_1O_2 е средна отсечка $O_1O_2 = \frac{a+b}{2}$. Знаем, че две окръжности се допират в точка от централата им, т.е. $P \in O_1O_2$ и $O_1O_2 = O_1P + PO_2 = \frac{d}{2} + \frac{c}{2}$. Тогава

$$\frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2} \text{ и следователно в трапе-}$$

ца може да се впише окръжност.

Нека в $ABCD$ може да се впише окръжност, т.е. $a+b=c+d$. Тогава $R_1 + R_2 = \frac{d}{2} + \frac{c}{2} = \frac{a+b}{2} = O_1O_2$. От $O_1O_2 = R_1 + R_2$ следва, че двете окръжности се допират.

7.3.3. Намерете лицето на трапеца $ABCD$, ако основите са $AB = 2a$, $CD = a$, $\angle BAD = 45^\circ$ и окръжностите с диаметри бедрата, се допират. **Отг.** $\frac{6a^2}{3\sqrt{2}-1}$.

7.3.4. В равнобедрен трапец е вписана окръжност с радиус r . Малката основа на трапеца е два пъти по-малка от височината му. Намерете лицето на трапеца. **Отг.** $5r^2$.

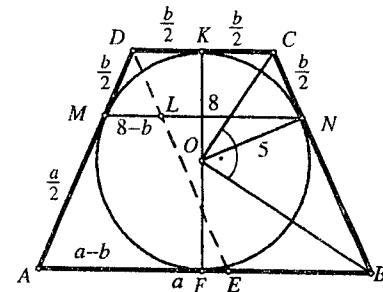
7.3.5. В равнобедрен трапец $ABCD$ е вписана окръжност с радиус r . Отношението между дължините на бедрото и на голямата основа е k . Намерете дължината на малката основа. **Отг.** $2r\sqrt{2k-1}$.

7.3.6. В равнобедрен трапец $ABCD$ с основите $AB = 16$ и $CD = 9$ е вписана окръжност. Ако Q е пресечната точка на правите AD и BC , намерете периметъра и лицето на трапеца, и лицето на $\triangle DCQ$. **Отг.** 50, 150, $486/7$.

7.3.7. В равнобедрения трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB > CD$) може да се впише окръжност. Ако $AB : CD = k$, намерете $\sin \angle DAB$. **Отг.** $(k-1)/k$.

7.3.8. Периметърът на равнобедрен трапец е два пъти по-голям от дължината на вписаната в него окръжност. Намерете синуса на ъгъла при основата. **Отг.** $2/\pi$.

7.3.9. Вписаната в равнобедрен трапец окръжност има $r = 5$ и се допира до бедрата в точки M и N . Ако $MN = 8$, намерете дължините на основите.



Решение: Построяваме DE успоредна на BC . От $\triangle MLD \sim \triangle AED$ с коефициент

$$k = \frac{DM}{DA} = \frac{b}{a+b} \text{ имаме:}$$

$$\frac{ML}{AE} = \frac{MN-b}{a-b} = \frac{b}{a+b}, \text{ т.е. } \frac{2ab}{a+b} = 8 = MN.$$

Знаем, че $2r = \sqrt{ab}$, т.е. $ab = 100$. Тогава $a+b = 25$. Оттук $a = 20, b = 5$.

7.3.10. Около окръжност е описан равнобедрен трапец с остър ъгъл 60° . Намерете отношението на лицата на фигурите, на които го разделя правата, определена от допирните точки на бедрата с вписаната окръжност. **Отг.** $5/27$.

7.3.11. В равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) е вписана окръжност с радиус r . AD и BC се допират до окръжността в точките M и N . Намерете лицето на $ABNM$, ако $\angle DAB = 60^\circ$. **Отг.** $9r^2\sqrt{3}/4$.

7.3.12. Бедрата на трапец са 1 и 15, а средната му отсечка го дели на две части, чиито лица се отнасят, както 5:11. Ако в трапеца може да се впише окръжност, намерете основите му. **Отг.** 14 и 2.

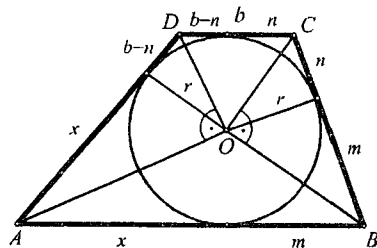
7.3.13. Средната отсечка на равнобедрен трапец $ABCD$ има дължина 5 и го разделя на части, чиито лица се отнасят както 7:13. Ако в трапеца може да се впише окръжност, намерете лицето на равнобедрения триъгълник, получен при пресичането на средната отсечка и диагоналите на трапеца. **Отг.** $9/5$.

7.3.14. (СУ) В равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB > CD$) е вписана окръжност, която се допира до страните AB, BC, CD, DA в точките K, L, M и N . Нека $S_{KLMN} : S_{ABCD} = 3:8$.

а) Намерете мярката на $\angle BAD$.

б) Нека O_1 и O_2 са центровете на окръжностите, вписани в $\triangle ABC$ и $\triangle ACD$. Намерете O_1O_2 , ако $BC = 2$.
 Отг. а) 60° ; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}(7-2\sqrt{7})$.

7.3.15. (ВУЗ) В трапец, малката основа на който е b , е вписана окръжност. Едно от бедрата на трапеца се дели от точката на допиране на отсечки с дължини m и n , считано от голямата основа. Намерете лицето на трапеца.



Решение: От правоъгълния $\triangle BOC$ имаме $r^2 = mn$, а от правоъгълния $\triangle AOD$ намираме $r^2 = x(b-n)$. Получаваме, че $r = \sqrt{mn}$

и $x = \frac{mn}{b-n}$. За лицето на трапеца имаме:

$$S = \frac{AB+CD}{2}h = (AD+DC)r \text{ или}$$

$$S = \left(m + \frac{mn}{b-n} + b\right)\sqrt{mn} = \frac{b\sqrt{mn}}{b-n}(b+m-n).$$

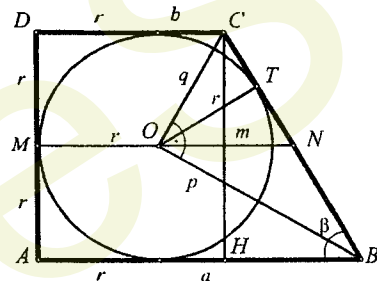
7.3.16. Даден е равнобедрен трапец $ABCD$, в който е вписана окръжност. Двата му диагонала са равни на основата AB . Намерете косинуса на ъгъла при основата.
 Отг. $(\sqrt{3}-1)/2$.

7.3.17. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AB = 6$, $CD = 2$, $AD = 3$. В трапеца може да бъде вписана окръжност. Намерете $\sin \angle(AC, BD)$.
 Отг. $8/\sqrt{65}$.

7.3.18. (ВУЗ) В трапец $ABCD$ е вписана окръжност, която се допира до бедрото AD в точка P . Намерете лицето на трапеца, ако $AP = 18$, $PD = 2$ и $AB = 30$.
 Отг. 70.

7.3.19. В равнобедрен трапец е вписана окръжност. Разстоянието от центъра на окръжността до пресечната точка на диагоналите му се отнася към радиуса както 3:5. Намерете отношението на периметъра на трапеца към дължината на окръжността.
 Отг. $5/\pi$.

7.3.20. В правоъгълен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), $AB \perp AD$ е вписана окръжност. Разстоянията от B и C до центъра на окръжността са p и q . Намерете лицето на трапеца и синуса на острия му ъгъл.



Решение: От правоъгълния $\triangle BOC$ имаме:

$$r = \frac{pq}{\sqrt{p^2+q^2}}, \text{ а медианата му } ON = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{2}.$$

$$\text{Тогава } MN = OM + ON = \frac{pq}{\sqrt{p^2+q^2}} + \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{2} =$$

$$= \frac{(p+q)^2}{\sqrt{p^2+q^2}}. \text{ За лицето на трапеца получаваме } S = MN \cdot 2r = \frac{pq(p+q)^2}{p^2+q^2}.$$

$$\text{Построяваме височината } CH. \text{ Намираме } \sin \beta = \frac{CH}{BC} = \frac{2r}{\sqrt{p^2+q^2}} = \frac{2pq}{p^2+q^2}.$$

7.3.21. (ВУЗ) В правоъгълен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AB \perp AD$. Дължините на страните AB , CD и BC са a , b и $a+b$.

а) Намерете лицето на $ABCD$, ако $a = 36$ и $b = 25$.

б) Ако M е средата на AD , докажете, че $\triangle BMC$ е правоъгълен.

Отг. а) 1830.

7.3.22. В правоъгълен трапец е вписана окръжност с радиус r . Намерете страните на трапеца, ако по-малката му основа е $\frac{4r}{3}$.
 Отг. $4r, \frac{10r}{3}, 2r$.

7.3.23. (СУ) В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) е вписана окръжност с център O и $OA = 2\sqrt{2}$, $OB = 2\sqrt{5}$ и $OC = \sqrt{5}$. Намерете страните на трапеца.

Отг. 6, 5, 3, 4.

7.3.24. Ъглополовящите на $\angle A$ и $\angle D$ в трапеца $ABCD$ се пресичат в точка O . Намерете бедрото AD и малката основа CD , ако $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{5}{6}}$, $OC = \sqrt{7}$, $OB = 3\sqrt{15}$ и $AB = 5BC$.
 Отг. $5/\sqrt{3}, 2\sqrt{3}$.

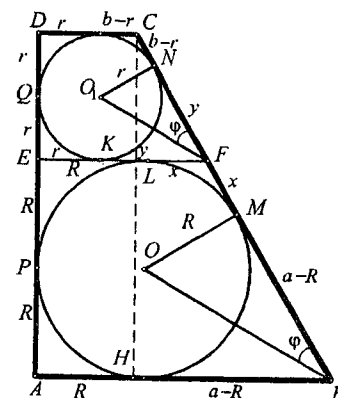
7.3.25. (ТУ) Окръжност с радиус r е вписана в трапеца $ABCD$. Основата му AB сключва с бедрата $\angle BAD = 2\alpha$ и $\angle BAC = 2\beta$.

а) Намерете страните и диагоналите, ако $\tan \alpha = 1$, $\tan \beta = 1/2$ и $r = 2$.

б) Докажете, че при $2\alpha = 30^\circ$, $2\beta = 45^\circ$ и $r = 1/2$ лицето на трапеца е $S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$.
 Отг. а) 6, 5, 3, 4, 5 и $2\sqrt{13}$.

7.3.26. Даден е правоъгълен трапец с основи a и b . Известно е, че права успоредна на основите го дели на два трапеца, в които могат да се впишат окръжности. Намерете радиусите им.

Решение: На фигурата с еднакви букви са означени допирателните, които са равни. Получаваме, че $EF = r + y = R + x$. Понеже общите външни допирателни MN и PQ също са равни, $MN = x + y = PQ = R + r$. От горните две равенства получаваме $x = r$ и $y = R$. Пресмятаме $BC = a - R + x + y + b - r = a + b$.



От $\triangle OBM \sim \triangle OFN$ намираме $\frac{R}{a-R} = \frac{r}{R}$, т.е. $r = \frac{R^2}{a-R}$.

От правоъгълния $\triangle BHC$ $BC^2 = BH^2 + CH^2$ или $(2R+2r)^2 = (a+b)^2 - (a-b)^2$, т.е. $4(r+R)^2 = 4ab$. От $R+r = \sqrt{ab}$ като заместим r с неговото равно получаваме $R = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ и $r = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

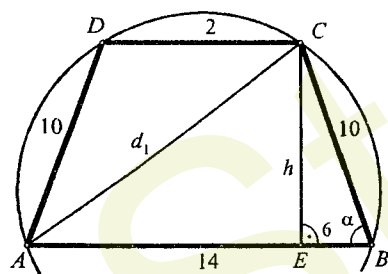
7.3.27. (УНСС) В правоъгълен трапец $ABCD$ ($\angle A = 90^\circ$) бедрата са $AD = m$ и $BC = n$. Права, успоредна на основите го дели на два трапеца, в които могат да се впишат окръжности. Намерете лицето на трапеца. **Отг.** $mn/2$.

7.3.28. (ТУ) В равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) съществува отсечка MN , успоредна на основите, която го разделя на два трапеца, във всеки от които може да се впише окръжност. Ако радиусите на тези окръжности са R и r , намерете лицето на трапеца. **Отг.** $\frac{2(R+r)(R^2+r^2)}{\sqrt{Rr}}$.

7.3.29. (СУ) Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ с основа $AB = 3$ и $\angle BAD = 60^\circ$. Окръжностите, вписани в триъгълниците ABC и ACD се допират помежду си. Намерете лицето на трапеца. **Отг.** $2\sqrt{3}$.

7.4. ТРАПЕЦ, ВПИСАН В ОКРЪЖНОСТ

7.4.1. Намерете радиуса на описаната окръжност около трапец с бедро 10 и основи 14 и 2.



Решение: Понеже трапецът е вписан в окръжност, той е равнобедрен.

Имаме [7.1.1] $AE = 8$, $BE = 6$. Тогава $CE^2 = BC^2 - BE^2$, $CE = 8$ и от $AC^2 = AE^2 + CE^2$ намираме $AC = 8\sqrt{2}$.

Пресмятаме $\sin \alpha = \frac{CE}{EB} = \frac{4}{5}$ и по синусова

теорема намираме $R = \frac{AC}{2\sin \alpha} = 5\sqrt{2}$.

7.4.2. Височината на равнобедрен трапец е равна на 14, а основите са 16 и 12. Намерете лицето на описания около трапеца кръг. **Отг.** 100π.

7.4.3. Центърът на окръжността, описана около равнобедрен трапец, дели височината му в отношение 3:4. Намерете основите на трапеца, ако радиусът на окръжността е 10 и средната му отсечка е равна на височината.

Решение: От това, че $h = \frac{a+b}{2} = BH$ разбираме, че $\angle ABD = 45^\circ$. $\angle ABD$ е вписан, а $\angle AOD$ е централен, т.е. $\angle AOD = 90^\circ$. Нека $\angle AOE = \alpha$, тогава $\angle DOF = 90^\circ - \alpha$. Имаме $\cos \alpha = \frac{OE}{OA}$, $\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{OF}{OD} = \sin \alpha$. Получаваме $\tan \alpha = \frac{OF}{OE} = \frac{4}{3}$. Тогава

$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1+\tan^2 \alpha}} = \frac{4}{5}$ и $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. Пресмятаме

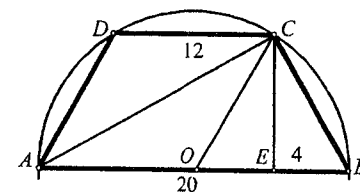
$\frac{a}{2} = R \sin \alpha = 8$ и $\frac{b}{2} = R \cos \alpha = 6$. Получаваме $a = 16$, $b = 12$.

7.4.4. В кръг е вписан трапец. Голямата основа склучва с бедрото ъгъл α , а с диагонала му ъгъл β . Намерете отношението на лицето на кръга към лицето на трапеца. **Отг.** $\frac{\pi}{2\sin 2\beta \cdot \sin^2 \alpha}$.

7.4.5. Намерете диагонала и бедрото на равнобедрен трапец с основи 20 и 12, ако центърът на описаната окръжност лежи върху голямата основа.

Решение: Понеже AB е диаметър на описаната окръжност, $\triangle ACB$ е правоъгълен и $CE^2 = AE \cdot EB = 16 \cdot 4$, т.е. $CE = 8$.

Пресмятаме $AD = BC = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$ и $BD = AC = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5}$.

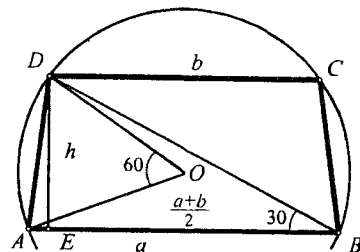


7.4.6. Бедрото и малката основа на равнобедрен трапец са равни на радиуса на описаната окръжност. Намерете височината му, ако средната отсечка е равна на $6\sqrt{3}$. **Отг.** 6.

7.4.7. Около трапец е описана окръжност с диаметър голямата му основа. В какво отношение пресечната точка на диагоналите на трапеца дели височината му, ако ъглите при основата са α ? **Отг.** $-\cos 2\alpha$.

7.4.8. Намерете лицето на равнобедрен трапец с височина h , ако бедрото се вижда от центъра на описаната окръжност под ъгъл от 60° .

Решение: $\angle AOD = \widehat{AD} = 60^\circ$ като централен, а $\angle ABD = \frac{1}{2} \widehat{AD} = 30^\circ$ като вписан в окръжността. Тогава $BE = \frac{a+b}{2} = h \cotg 30^\circ = h\sqrt{3}$ и $S = \frac{a+b}{2} h = h^2 \sqrt{3}$.

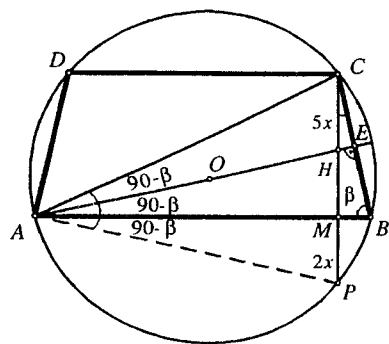


7.4.9. (ВУЗ) Около трапец с височина h е описана окръжност. Основите на трапеца се виждат от центъра на окръжността под ъгли 2α и 2β . Намерете радиуса на окръжността и лицето на трапеца.

Отг. $\frac{h}{\cos \beta \pm \cos \alpha}, \frac{h^2 (\sin \beta + \sin \alpha)}{\cos \beta \pm \cos \alpha}$.

7.4.10. В трапец $ABCD$ малката основа $CD = 7$. През A , C и B е построена окръжност, която пресича продължението на CD в точка M . Дължината на $MB = 7\sqrt{3}$, а $\angle MBA = 30^\circ$. Намерете дължината на AD . **Отг.** 7.

7.4.11. В окръжност е вписан трапец $ABCD$. Диаметърът ѝ през върха A е перпендикулярен на бедрото BC . През върха C е спуснат перпендикуляр към AB , който я пресича в точка M , а окръжността – в точка P така, че $CM:MP = 5:2$. Намерете тангенс на ъгъла при основата на трапеца.



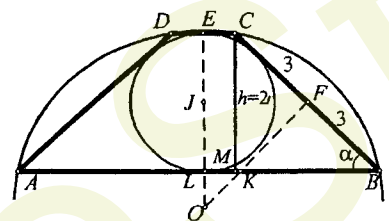
Решение: Щом диаметърът AE е перпендикулярен на хордата BC , той минава през средата ѝ и следователно $\triangle ACB$ е равнобедрен. Нека $\angle ABC = \beta$. Тогава $\angle BAE = \angle BCP = 90^\circ - \beta$, но $\angle PAB = \angle BCP$ (като вписани) и следователно $\angle PAB = 90^\circ - \beta$.

Имаме: $\operatorname{tg} \angle CAM = \operatorname{tg}(180^\circ - 2\beta) = \frac{CM}{AM}$,

$\operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \frac{MP}{AM}$ или $\frac{-\operatorname{tg} 2\beta}{\cot \beta} = \frac{5}{2}$. От

$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}$ получаваме $\frac{2 \operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg}^2 \beta - 1} = \frac{5}{2}$, т.е. $\operatorname{tg}^2 \beta = 5$ и $\operatorname{tg} \beta = \sqrt{5}$.

7.4.12. Трапецът $ABCD$ с основи 2 и 10 е такъв, че в него може да се впише окръжност и около него може да се опише окръжност. Намерете разстоянието между центровете на двете окръжности.



Решение: Трапецът е равнобедрен и $AD + BC = AB + CD$. Тогава $AD = BC = 6$. Построяваме височината CM . Пресмятаме $MB = \frac{AB - CD}{2} = 4$. $CM^2 = BC^2 - BM^2 = 20$ или $CM = 2r = 2\sqrt{5}$, $r = \sqrt{5}$.

Ако центърът на описаната окръжност O е вътре в трапеца, търсеното разстояние $d = JL - OL$, но ако е отвън $d = JL + OL$.

O е от симетралата FK на BC и от симетралата EL на CD . Според това дали BK е по-голяма или по-малка от BL центърът O ще е вътрешна или външна точка за трапеца. Понеже $\triangle KFB \sim \triangle CMB$, имаме:

$\frac{BK}{FB} = \frac{BC}{MB}$, т.е. $BK = \frac{18}{4} < BL$. O е извън трапеца. (Друг начин е да покажете, че $\angle ACB > 90^\circ$.)

Пресмятаме $\sin \alpha = \frac{CM}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $AC^2 = AM^2 + MC^2 = 56$ и по синусова теорема

$R = \frac{AC}{2 \sin \alpha} = \frac{3\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$. Тогава $OL^2 = R^2 - BL^2 = \frac{126}{5} - 25 = \frac{1}{5}$. $d = \sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}$.

7.4.13. (ВТУЗ) Даден е трапец с основи a и b , в който може да се впише окръжност и около който може да се опише окръжност. Намерете лицето на трапеца и радиуса на описаната около трапеца окръжност.

Отг. $(a+b)\sqrt{ab}$; $\frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2+18ab}}{8\sqrt{ab}}$.

7.4.14. В трапец диагоналите са $2\sqrt{61}$ и $3\sqrt{41}$, а основите 15 и 10. Намерете лицето на трапеца. Може ли в този трапец да се впише окръжност? Може ли около този трапец да се опише окръжност? **Отг.** 150, да, не.

7.4.15. Даден е равнобедрен трапец, в който е вписана окръжност и около който е описана окръжност. Ако отношението на височината към радиуса на описаната окръжност е $\frac{\sqrt{2}}{3}$, намерете ъглите му. **Отг.** 45° .

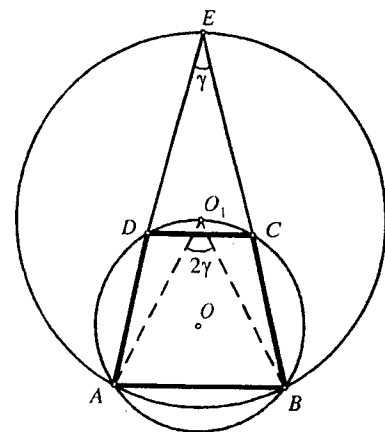
7.4.16. В равнобедрен трапец е вписана окръжност с радиус r . Бедрото на трапеца сключва с малката основа ъгъл α . Намерете радиуса на описаната около трапеца окръжност.

Отг. $\frac{r}{\sin^2 \alpha} \sqrt{1 + \sin^2 \alpha}$.

7.4.17. Бедрата AD и BC на трапец са продължени до пресичането им в точка E . Точката O_1 е център на описаната около $\triangle ABE$ окръжност. Намерете ъгъла при върха A , ако точките A , B , C , D и O_1 лежат на една окръжност с радиус $\sqrt{3}$ пъти по-малък от радиуса на описаната около $\triangle ABE$ окръжност.

Решение: Трапецът е равнобедрен, следователно и $\triangle ABE$ е равнобедрен. Ако означим $\angle AEB$ с γ , то като централен $\angle AO_1B = 2\gamma$. По синусова теорема имаме: $AB = 2R_1 \sin \gamma$ и $AB = 2R \sin 2\gamma$. Получихме, че $2\sqrt{3}R \sin \gamma = 2R \cdot 2 \sin \gamma \cos \gamma$ или

$\cos \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\gamma = 30^\circ$ и $\angle BAD = 75^\circ$.



7.4.18. Даден е равнобедрен трапец $ABCD$ с пресечна точка E на продълженията на бедрата AD и BC . Докажете, че окръжностите, описани около

$\triangle ACE$ и $\triangle BDE$ минават през центъра O на описаната около дадения трапец окръжност.

7.4.19. Даден е трапец $ABCD$ с основи AB и CD . Точката P лежи на бедното AD . Да се докаже, че ако k_1 и k_2 са описаните около $\triangle ABP$ и $\triangle CDP$ окръжности, то втората им пресечна точка е от правата BC .

7.4.20. Голямата основа AB на трапеца $ABCD$ е 6, а $\angle BCD = 120^\circ$. Правите CB и CD са допирателни към окръжността, описана около $\triangle ABD$.

а) Намерете лицето на $\triangle ABD$.

б) Намерете лицето на трапеца.

Отг. а) $3\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{3}$.

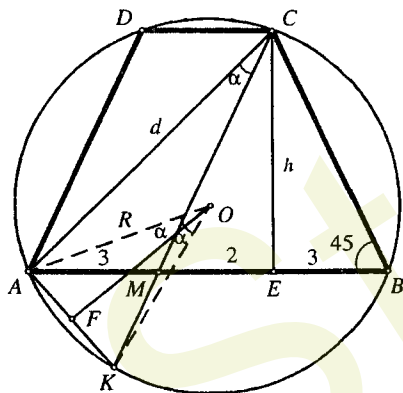
7.4.21. Основата AB на трапеца $ABCD$ е диаметър на окръжност, която се допира до BC в B и пресича AD в E така, че $AD = \frac{4}{\sqrt{3}} AE$. Радиусът на окръжността е R и $\angle CAB = 45^\circ$. Намерете лицето на трапеца.

Отг. $\frac{2}{3} R^2 (6 - \sqrt{3})$.

7.4.22. Върху диагонала BD на правоъгълния трапец $ABCD$ ($\angle B = 90^\circ$, $AB \parallel CD$) е взета точка E , така че $DE:EB = 1:3$. Окръжност с център E се допира до AB и пресича правата DC в точките P и M . Намерете дължината на страната AD , ако $DC = 9$, $AB = 8$ и $PM = 4$.

Отг. 3.

7.4.23. В окръжност с център O е вписан трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$), като $AB = 8$, $CD = 2$ и $\angle BAD = 45^\circ$. Хордата CK пресича отсечката AB в точка M така, че $AM = 3$. Намерете разстоянието от O до AK .



Решение: Правоъгълният $\triangle BEC$ е равнобедрен и следователно

$$h = BE = \frac{a-b}{2} = 3. \quad AC = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \text{ и}$$

$$ME = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}. \text{ По косинусова теорема за } \triangle AMC \cos \alpha = \frac{34 + 13 - 9}{2\sqrt{34} \cdot \sqrt{13}} = \frac{19}{\sqrt{34 \cdot 13}}.$$

$$\text{Радиусът на описаната около трапеца окръжност е } R = \frac{AC}{2 \sin 45^\circ} = \sqrt{17} \text{ и}$$

$$OF = R \cos \alpha = \frac{19}{\sqrt{26}}.$$

7.4.24. В окръжност с център O е вписан трапец $ABCD$, в който $AB \parallel CD$, $AB = 5$, $CD = 1$ и $\angle ABC = 60^\circ$. Точката K лежи на отсечката AB , като $AK = 2$. Правата CK пресича окръжността в точка E , различна от C . Намерете лицето на $\triangle OEC$.

Отг. $19\sqrt{3}/52$.

7.5. ЪГЪЛ МЕЖДУ ДИАГОНАЛИТЕ НА ТРАПЕЦ

7.5.1. (ВТУЗ) Даден е трапец, диагоналите на който са перпендикулярни. Ако основите му имат дължини a и b ($a > b$), а големината на ъгъла между бедрата е α , намерете лицето му.

Решение: Построяваме $DE \parallel BC$, тогава

$$S_{AED} = \frac{1}{2}(a-b)h = \frac{1}{2}cd \sin \alpha. \text{ Получаваме, че}$$

$$h = \frac{cd \sin \alpha}{a-b}.$$

Лесно се доказва, че ако четириъгълник $ABCD$ има взаимноперпендикулярни диагонали, то $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$ (приложете Питагорова теорема за всеки един от $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$ и $\triangle DOA$). Вярно е и обратното (докажете го като означите $\angle AOB = \varphi$ и напишете косинусови теореми за четирите триъгълника).

По косинусова теорема за $\triangle AED$ имаме:

$$AE^2 = AD^2 + DE^2 - 2AE \cdot ED \cos \alpha \text{ или } a^2 - 2ab + b^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \alpha, \text{ но}$$

$$c^2 + d^2 = a^2 + b^2, \text{ т.е. } cd = \frac{ab}{\cos \alpha}. \text{ Разбираме, че } h = \frac{ab \sin \alpha}{(a-b) \cos \alpha}. \text{ За лицето на}$$

$$\text{трапеца получаваме } S = \frac{1}{2}(a+b) \frac{ab \sin \alpha}{(a-b) \cos \alpha} = \frac{ab(a+b) \tan \alpha}{2(a-b)}.$$

7.5.2. В трапеца $ABCD$ точките K и M са среди на основите AB и CD . Намерете лицето на трапеца, ако височината му е 1, $AM \perp DK$, $CK \perp BM$ и $\angle CKD = 60^\circ$.

Отг. $4/\sqrt{3}$.

7.5.3. В равнобедрения трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) AC и BD се пресичат в точка O под прав ъгъл. През O е построена права $MN \perp BC$ ($M \in BC$, $N \in AD$). Ако $AB = a$ и $CD = b$, намерете MN .

Отг. $\frac{(a+b)^2}{2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}$.

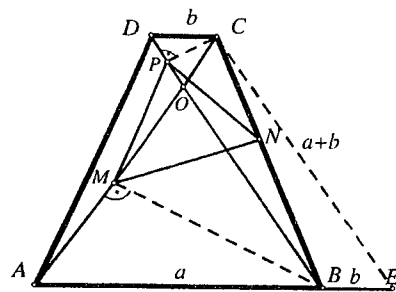
7.5.4. (СУ) В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) AC и BD се пресичат в точка O и $AC \perp BD$. Права през O и средата M на BC пресича AD в точка N , като $MN \perp AD$.

а) Докажете, че трапецът $ABCD$ е равнобедрен.

б) Ако $MN = \frac{9}{\sqrt{10}}$ и $S_{ABCD} = 9$, намерете дължините на AB и CD .

Отг. б) 4; 2.

7.5.5. В равнобедрения трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) диагоналът $AC = AB + CD$. Ако O е пресечна точка на диагоналите, докажете, че средите на отсечките AO , BC и DO са върхове на равностранен триъгълник.



Доказателство: Построяваме отсечката CE успоредна на DB . Тогава $\triangle AEC$ е равнобедрен със страни $a+b$. Ъглите му са по 60° , както и на $\triangle ABO$ и $\triangle CDO$.

$$MP = \frac{AD}{2} \text{ като средна отсечка в } \triangle AOD.$$

$\triangle BMC$ е правоъгълен и като медиана

$$MN = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2}. \text{ Аналогично от } \triangle BPC$$

$$PN = \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2}. \text{ Следователно } \triangle MNP \text{ е равнобедрен.}$$

7.5.6. (ВТУЗ) Даден е равнобедрен трапец с основи $AB = 10$, $CD = 6$ и диагонал $AC = 16$. Ако O е пресечна точка на диагоналите му, а M , N и P са средите на AO , BC и DO , пресметнете лицето на триъгълника MNP .

$$\text{Отг. } 49\sqrt{3}/4.$$

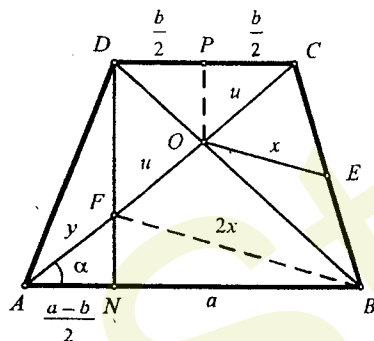
7.5.7. В трапеца $ABCD$ диагоналите AC и BD се пресичат в точка O . Намерете лицето на $\triangle BCO$, ако той е равнобедрен и $AB = 5$, $CD = 3$.

$$\text{Отг. } 225\sqrt{3}/4.$$

7.5.8. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) $CD = 2$, $\angle ADC = \angle BCD = 130^\circ$. Ако $\angle(AC, BD) = 30^\circ$, намерете лицето на трапеца.

$$\text{Отг. } 2.$$

7.5.9. В равнобедрения трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AB = a$, $CD = b$ и $\angle CAB = \alpha$. Ако $AC \cap BD = O$, а E е средата на BC , намерете OE .



Решение: Построяваме отсечката BF , успоредна на OE . Ясно е, че OE е средна отсечка, т.е. $CO = OF$ и $BF = 2OE$. Ако P е средата на CD , от $\frac{CP}{PD} = \frac{CO}{OF}$ по обратната теорема на Талес следва, че $PO \parallel DF$ и $F \in DN$.

$$\text{Тогава от } \triangle AFN \text{ } AF = \frac{AN}{\cos \alpha}, \text{ т.е.}$$

$$AF = \frac{a-b}{2\cos \alpha}. \text{ От косинусова теорема за}$$

$\triangle AFB$ $BF^2 = a^2 + AF^2 - 2a \cdot AF \cos \alpha$. Заместваме AF и получаваме

$$BF^2 = ab + \frac{(a-b)^2}{4\cos^2 \alpha}. \text{ Тогава } OE = \frac{1}{2} \sqrt{ab + \frac{(a-b)^2}{4\cos^2 \alpha}}$$

7.5.10. Големите основи AB и AC на два трапеца $ABCD$ и $ACBE$, вписани в една окръжност, са равни. Намерете радиуса на тази окръжност, ако ъгълът между диагоналите на трапеца е 60° , а $S_{ABE} = 1 + \sqrt{3}$.

$$\text{Отг. } 2.$$

7.5.11. (СУ) В окръжност с радиус 1 е вписан трапец с основа $AB = 2$.

а) Докажете, че лицето на трапеца е $S = \sin \alpha (1 + \cos \alpha)$, където α е острият ъгъл между диагоналите AC и BD .

б) Намерете α , за който лицето на трапеца е най-голямо.

$$\text{Отг. } 60^\circ.$$

7.5.12. (СУ) В окръжност с радиус 1 е вписан трапец $ABCD$ с малка основа $CD = 1$. Докажете, че $S_{ABCD} = 2\sin^2 \alpha \cdot \sin(2\alpha - 60^\circ)$, където $\alpha = \angle BAD$ и намерете α , за който лицето на трапеца е най-голямо.

$$\text{Отг. } 80^\circ.$$

7.6. ЪГЛОПОЛОВЯЩИ В ТРАПЕЦ

7.6.1. (ВТУЗ) Равнобедреният трапец $ABCD$ е с периметър 90 и малка основа $CD = 18$. Диагоналът BD разполюва ъгъла ADC . Намерете радиуса на описаната около трапеца окръжност и лицето му.

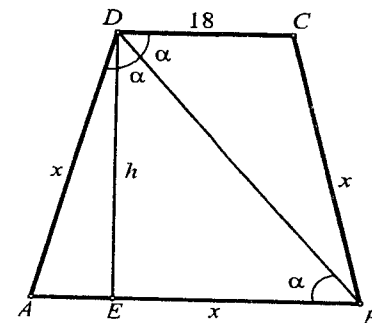
Решение: Знаем, че $AB = AD$. От $P_{ABCD} = 90$ и $CD = 18$, следва че $AB = 24$.

Имаме $h = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{24^2 - 3^2} = 9\sqrt{7}$ и $BD = \sqrt{h^2 + BE^2} = 12\sqrt{7}$. Тогава

$$\sin \alpha = \frac{h}{BD} = \frac{3\sqrt{63}}{12\sqrt{7}} = \frac{3}{4}. \text{ По синусова теорема}$$

$$R = \frac{AD}{2\sin \alpha} = 16. \text{ Лицето на трапеца е}$$

$$S = \frac{24+18}{2} \cdot 3\sqrt{63} = 63\sqrt{63}.$$



7.6.2. В правоъгълен трапец средната отсечка е $27/2$. Малкият диагонал е ъглополовяща на тупия ъгъл и е 12. Намерете страните.

$$\text{Отг. } 3, 3\sqrt{15}, 24, 24.$$

7.6.3. Острият ъгъл на равнобедрен трапец е α , а по-малката основа е равна на бедрото a . Намерете лицето на трапеца.

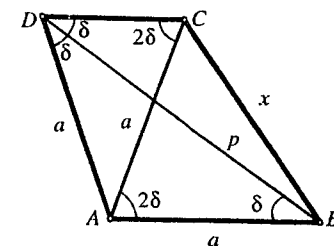
$$\text{Отг. } a^2 \sin \alpha (1 + \cos \alpha).$$

7.6.4. В равнобедрен трапец $ABCD$ точката M е среда на малката основа CD и MA е ъглополовяща на $\angle BAD$. Намерете лицето на трапеца, ако $AB = 16$ и височината му е 6.

$$\text{Отг. } 171/2.$$

7.6.5. В равнобедрен трапец $ABCD$ дължините на основата AB , диагонала AC и бедрото AD са равни на a , а дължината на BD е p . Намерете дължината на бедрото BC .

Решение: В равнобедрения $\triangle BAD$ означаваме $\angle ABD = \angle ADB = \delta$. Ясно е, че и $\angle BDC = \delta$. Понеже $\triangle CAD$ е равнобедрен $\angle ACD = 2\delta$. Тогава и $\angle CAB = 2\delta$. Нека M е



средата на BC . Тогава $\sin \delta = \frac{CM}{CA}$, $CM = a \sin \delta$ и $BC = 2a \sin \delta$. Аналогично ако N е средата на BD , $\cos \delta = \frac{BN}{BA} = \frac{p}{2a}$. Пресмятаме $\sin^2 \delta = 1 - \frac{p^2}{4a^2}$ и $BC = \sqrt{4a^2 - p^2}$.

7.6.6. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ъглополовящата на $\angle BAD$ минава през средата M на BC . Ако $AD = 5$, $AM = 4$, намерете дължината на DM . **Отг.** 3.

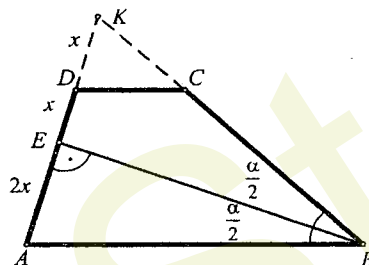
7.6.7. В правоъгълния трапец $ABCD$ ($\angle BAD = \angle CDA = 90^\circ$) $AC = d$ и е ъглополовяща на $\angle BAD$. Намерете лицето на трапеца, ако продължението на BC пресича AD в точка E и $AE = d$. **Отг.** $\frac{d^2}{4}(3 + \sqrt{2})$.

7.6.8. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ъглополовящата на $\angle ADC$ пресича правата AB в точка E . В $\triangle ADE$ е вписана окръжност с център O и допира се до AB в точка M и до AD в P . Намерете $\angle MOP$, ако $MP = 2$ и $AD = 4$. **Отг.** 120° .

7.6.9. В равнобедрен трапец $ABCD$ бедрата и малката основа CD са равни на 2, а $BD \perp AD$. Намерете лицето на трапеца. **Отг.** $3\sqrt{3}$.

7.6.10. Дължината на голямата основа AB на трапеца $ABCD$ е 50, а бедрото AD е 30. Диагоналът AC е ъглополовяща на $\angle BAD$, а $BD \perp AD$. Намерете лицето на трапеца и разстоянието от пресечната точка на продължението на бедрата до AB . **Отг.** 960, 60.

7.6.11. В трапеца $ABCD$, ъглополовящата BE на $\angle ABC$ е перпендикулярна на AD ($E \in AD$). Ако $AE = 2ED$, намерете $S_{BCDE} : S_{ABE}$.



Решение: Нека K е пресечната точка на продълженията на AD и BC . В $\triangle ABK$ ъглополовящата BE е и височина, т.е. $EA = EK$.

$$\text{Тогава } \frac{S_{KDC}}{S_{KAB}} = \left(\frac{KD}{KA}\right)^2 = \frac{1}{16}, \quad S_{AEB} = \frac{S_{ABK}}{2},$$

$$S_{ABCD} = \frac{15}{16} S_{KAB}, \quad \text{следователно } S_{BCDE} = \frac{7}{16} S_{KAB}.$$

$$\text{Получаваме } \frac{S_{BCDE}}{S_{ABE}} = \frac{7}{8}.$$

7.6.12. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $CD = AD$ и $AB = 2CD$. Ако $AC = d$, $BC = b$ намерете лицето на трапеца. **Отг.** $3bd/4$.

7.6.13. Дължините на бедрата AD и BC на трапеца $ABCD$ са 8 и 10, а CD е 2. Њглополовящата на $\angle ABC$ разполюва AD . Намерете S_{ABCD} . **Отг.** 40.

7.6.14. Равнобедреният трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) има лице 28, $AB = 10$, $CD = 4$. Намерете лицата на частите, на които ъглополовящата на $\angle BAD$

разделя трапеца.

Отг. 200/11, 108/11.

7.6.15. В равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$) с лице $(2 + \sqrt{3})$ $\angle BAC = \angle CAD = 15^\circ$. Њглополовящата на $\angle BCD$ пресича AB в точка M , а отсечката DM пресича AC в P . Намерете лицето на $\triangle APM$. **Отг.** $3(\sqrt{3} - 1)/2$.

7.6.16. Њглополовящите на $\angle BCD$ и $\angle CDA$ на трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) се пресичат в точката K от AB . Намерете страните на трапеца, ако височината му е 12, $DK = 15$ и $CK = 13$. **Отг.** 147/5, 169/10, 14, 25/2.

7.6.17. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) точката K е среда на AB , а M е среда на CD . Намерете лицето на трапеца, ако DK е ъглополовяща на $\angle ADC$, BM е ъглополовяща на $\angle ABC$, по-големият от ъглите при долната основа е 60° , а периметърът на трапеца е 30.

Решение: Њглополовящите DK и BM отсичат равнобедрените $\triangle AKD$ и $\triangle BCM$, т.е. $AB = 2AD$ и $CD = 2BC$. Тогава $P_{ABCD} = 3(AD + BC)$ или

$AD + BC = 10$. Означаваме $AD = x$, $BC = y$. Имаме $x + y = 10$.

Построяваме $CE \parallel DA$. В $\triangle BEC$ $CE > CB$ ($AB > CD$), следва че $\angle EBC = 60^\circ$. По косинусова теорема $EC^2 = BE^2 + BC^2 - 2BE \cdot BC \cdot \cos 60^\circ$, но $EB = AB - CD$, т.е. $x^2 = y^2 + (2x - 2y)^2 - 2y(2x - 2y) \cos 60^\circ$. Заместваме $x = 10 - y$ и след като опростим достигаем до $5y^2 - 40y + 75 = 0$ с корени $y_1 = 3$ и $y_2 = 5$. Ако $y = 5$, $x = 5$, така че $y = 3$. Тогава $CD = 6$, $AB = 14$.

$$\text{Пресмятаме } h = BC \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ и } S_{ABCD} = \frac{14 + 6}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}.$$

7.6.18. В равнобедрен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) $AD = kCD$ ($k > 1$). Њглополовящите на $\angle ADC$ и $\angle BCD$ се пресичат в точка M , лежаща на AB . Намерете $S_{ABCD} : S_{CMD}$. **Отг.** $2k + 1$.

7.6.19. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AB = 9$, $CD = 3$. Точката E е среда на AD , а точка M на BC . Њглополовящата на $\angle ABC$ пресича EM в точка K , а ъглополовящата на $\angle BAD$ – в точката P . Отсечките EK , KP и PM са равни. Намерете лицето на $ABCD$. **Отг.** $6\sqrt{55}$.

7.6.20. Окръжността k минава през B , C и центъра на описаната около трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) окръжност и пресича голямата основа AB в точката M . Ако $\angle BAC = \alpha$ и $\angle ACB = 2\alpha$, докажете, че $\angle BOC = \angle BMC = 2\alpha$ и $BM : BA = 1 : 4 \cos^2 \alpha$.

7.7. ЛИЦА НА ЧАСТИ ОТ ТРАПЕЦ

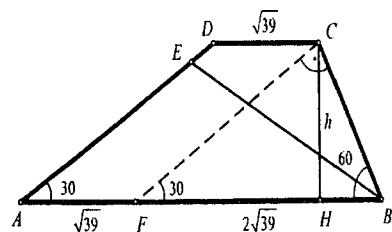
7.7.1. Средната отсечка в трапец е 20 и го разделя на части, чиито лица се отнасят както 3:5. Намерете основите. **Отг.** 30, 10.

7.7.2. Основите на трапеца $ABCD$ са $AB = a$, $CD = b$ ($a > b$). Правата MN ($M \in CD$, $N \in AB$) го разделя на две равнолицеви части. Намерете AN , ако $CM = m$.

Решение: През M и средите на бедрата P и K построяваме прави до пресичането им с AB в точките E и F . Ясно е, че $\triangle EAP \cong \triangle MPD$, еднакви са и $\triangle KMC$ и $\triangle KBF$. Тогава $S_{EMN} = S_{FMN}$ и следователно MN е медиана, т.е. N е среда на EF . Ако $AN = x$ имаме:
 $EN = b - m + x = FN = a - x + m$.

Получаваме, че $AN = x = \frac{a - b + 2m}{2}$.

7.7.3. Трапецът $ABCD$ има основи $AB = 3\sqrt{39}$ и $CD = \sqrt{39}$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\angle BAD = 30^\circ$. Отсечката BE ($E \in AD$) го разделя на две равнолицеви части. Намерете дължината на BE .



Решение: Построяваме $CF \parallel AD$. От правоъгълния $\triangle FCB$ $BC = \frac{BF}{2} = \sqrt{39}$.

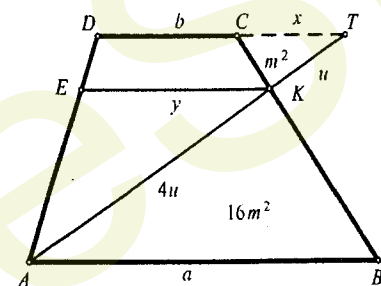
$$S_{FBC} = BF \cdot BC \sin 60^\circ = \frac{39\sqrt{3}}{2}, S_{AFCD} = S_{BFC} \text{ и}$$

$$S_{ABCD} = 39\sqrt{3}. \text{ По условие}$$

$$S_{ABE} = \frac{AB \cdot BE \cdot \sin 30^\circ}{2} = \frac{S_{ABCD}}{2} \text{ или}$$

$$\frac{3\sqrt{39} \cdot AE}{4} = \frac{39\sqrt{3}}{2}, \text{ т.е. } AE = 2\sqrt{13}. \text{ По косинусова теорема}$$

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AE \cdot \cos 30^\circ, BE = 13.$$



7.7.4. Даден е трапец $ABCD$ с основи $AB = a$, $CD = b$. През A е построена права, която пресича BC в точка K и продължението на CD в T . Точка E е от AD и $EK \parallel AB$. Ако $S_{ABK} = 16S_{TCK}$, намерете $S_{AKE} : S_{ATD}$ и дължината на EK .

Решение: $\triangle TCK \sim \triangle AKB$. Следователно $\frac{TK}{AK} = \frac{TC}{AB} = \frac{1}{4}$ и $\frac{AK}{AT} = \frac{4}{5}$. Понеже

$$\triangle AKE \sim \triangle ATD \quad \frac{S_{AKE}}{S_{ATD}} = \left(\frac{AK}{AT}\right)^2 = \frac{16}{25} \quad \text{и} \quad \frac{EK}{DT} = \frac{EK}{CD+CT} = \frac{EK}{b+\frac{a}{4}} = \frac{4}{5}. \quad \text{Оттук}$$

$$\text{пресмятаме } EK = \frac{a+4b}{5}.$$

7.7.5. Даден е трапец $ABCD$ с основи $AB = a$, $CD = b$. През A е построена права, която пресича продължението на CD в точка T . Ако тази права разделя трапеца на части, чиито лица се отнасят както 3:1, намерете дължината на CT .

$$\text{Отг. } \frac{a(a-3b)}{3(a+b)} \text{ или } \frac{a(3a-b)}{a+b}.$$

7.7.6. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) ъглополовящата на $\angle BAD$ пресича BC в точка E . Намерете лицето на $\triangle ADE$, ако $AB = 2CD$, $AB = AD$ и лицето на $ABCD$ е 18.

Отг. 8.

7.7.7. През върховете C и D на трапеца $ABCD$ са построени две успоредни прави, които пресичат диагоналите AC и BD в точки P и Q , и голямата основа AB в точки M и N . Ако AC и BD се пресичат в точка O , докажете че $S_{MPOQN} = S_{APD} + S_{DOC} + S_{BQC}$.

7.7.8. Средната отсечка на трапец се дели от единия диагонал на части, чието отношение е k , и дели трапеца на две части, по-малката от които има лице S . Намерете лицето на трапеца.

$$\text{Отг. } \frac{4(k+1)}{k+3} S.$$

7.7.9. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) $AB : CD = 5 : 1$, а лицето му е 32. M и N са средите съответно на AD и BC . AN и BM се пресичат в точка K , а CM и DN в точка E . Намерете лицето на четириъгълника $MKNE$.

Решение: Нека $CD = x$, тогава $AB = 5x$ и $MN = 3x$.

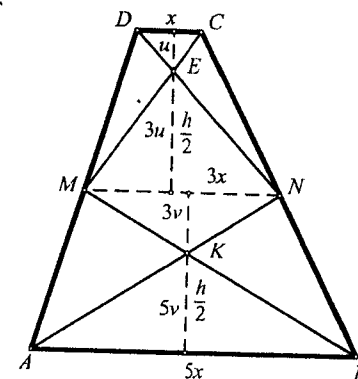
От подобие между триъгълниците CDE с MNE и MNK с ABK , следва че височините им h_1, h_2, h_3 и h_4 се отнасят както основите им, т.е. $h_1 : h_2 = 1 : 3$ и $h_3 : h_4 = 3 : 5$.

Ясно е, че $h_1 + h_2 = h_3 + h_4 = \frac{h}{2}$. Тогава

$$h_2 = \frac{3h}{8} \text{ и } h_3 = \frac{3h}{16}. S_{MKNE} = S_{MNE} + S_{MNK} =$$

$$= \frac{MN(h_2 + h_3)}{2} = MN \cdot \frac{9h}{32} = \frac{9}{32} S_{ABCD} \text{ или}$$

$$S_{MKNE} = 9.$$



8. ОКРЪЖНОСТИ

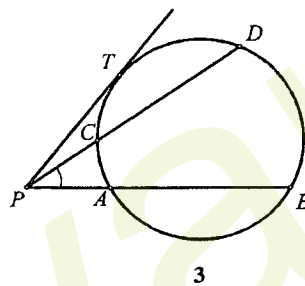
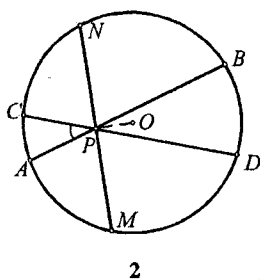
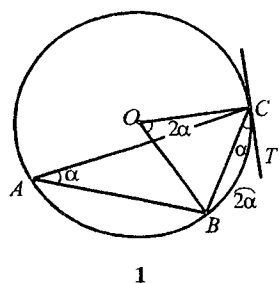
8.1. ЪГЛИ, СВЪРЗАНИ С ОКРЪЖНОСТТА

На фигура 1 са показани различните видове ъгли, свързани с окръжността: $\angle BOC$ се нарича **централен**, $\angle BOC = \widehat{BC}$; $\angle BAC$ се нарича **вписан**, $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \widehat{BC}$; $\angle BCT$ – **периферен**, $\angle BCT = \angle BAC = \frac{1}{2} \widehat{BC}$.

Теорема за хордите: Ако хордите AB и CD (фиг. 2) се пресичат в P , то $AP \cdot PB = CP \cdot PD = PM^2$; $\angle APC$ е с връх в окръжността,

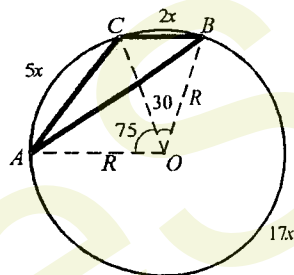
$$\angle APC = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BD}).$$

Теорема за секущите и допирателната: (фиг. 3) $PB \cdot PA = PC \cdot PD = PT^2$. $\angle BPD$ е с връх вън от кръга, $\angle BPD = \frac{1}{2}(\widehat{BD} - \widehat{AC})$.



8.1.1. В окръжност с радиус R е вписан $\triangle ABC$. Намерете лицето на триъгълника и хордата BC , ако $\widehat{BC} : \widehat{CA} : \widehat{AB} = 2 : 5 : 17$.

Решение: Съобразяваме, че $\widehat{BC} = 30^\circ$ и $\widehat{CA} = 75^\circ$. Тогава $\angle BOC = 30^\circ$, $\angle COA = 75^\circ$ като централни, а $\angle BAC = 15^\circ$ (вписан).



Пресмятаме $S_{ABC} = S_{BOC} + S_{COA} - S_{BOA} =$

$$= \frac{1}{2} R^2 \sin 30^\circ + \frac{1}{2} R^2 \sin 75^\circ - \frac{1}{2} R^2 \sin 105^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} R^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} R^2 \sin 75^\circ - \frac{1}{2} R^2 \sin 75^\circ = \frac{R^2}{4}.$$

По синусова теорема $BC = 2R \sin 15^\circ = \frac{R\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1).$

8.1.2. Хордата AT на окръжност k е равна на 10. През T е построена допирателна към k , а през A – секуща AB ($B \in k$), успоредна на допирателната. Намерете радиуса на окръжността, ако AB е равна на 12. **Отг.** 6,25.

8.1.3. Окръжност минава през върховете A и B на триъгълника ABC , пресича страната AC в точката E и страната BC в точката F . $\angle AEB = 5\angle CAF$, а $\angle ACB = 72^\circ$. Намерете радиуса на окръжността, ако $AB = 6$. **Отг.** 3.

8.1.4. Намерете радиуса на окръжност, описана около правоъгълен равнобедрен триъгълник, в който е вписан ромб със страна $2(\sqrt{2}-1)$ така, че острият им ъгъл е общ, а всички върхове на ромба лежат върху страните на триъгълника. **Отг.** 1.

8.1.5. В $\triangle ABC$ ($\angle BAC > 90^\circ$) е спусната височината AD . Окръжност с център D и радиус DA пресича AB и AC съответно в точките M и N . Намерете AC , ако $AB = c$, $AM = n$, $AN = m$. **Отг.** nc/m .

8.1.6. Окръжност се допира до раменете на ъгъл с връх O в точките A и B . Точката C е вътрешна за $\triangle AOB$ и лежи на окръжността. Разстоянията от C до OA и OB са равни на a и b . Намерете разстоянието от C до AB .

Решение: $\angle BAC = \frac{\widehat{BC}}{2}$ (като вписан), $\angle CBE = \frac{\widehat{BC}}{2}$ (периферен).

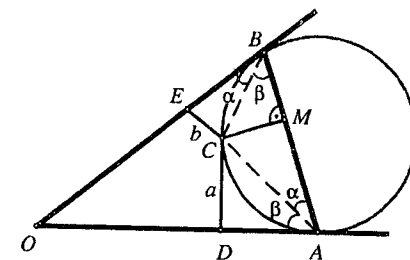
Построяваме $CM \perp AB$. Тогава

$$\triangle AMC \sim \triangle BEC \text{ или } \frac{CM}{AC} = \frac{CE}{BC}, \text{ т.е.}$$

$$CM = \frac{b \cdot AC}{BC}. \text{ Аналогично от}$$

$$\triangle BMC \sim \triangle ADC \quad CM = \frac{a \cdot BC}{AC}. \text{ Тогава}$$

$$CM^2 = \frac{b \cdot AC}{BC} \cdot \frac{a \cdot BC}{AC} = ab.$$



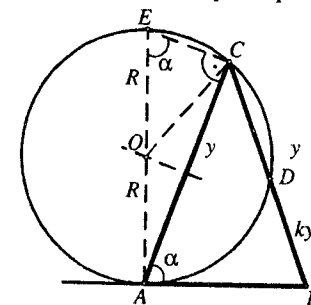
8.1.7. В $\triangle ABC$ $\angle BAC = 60^\circ$. През центъра J на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност е построена допирателна t към окръжността, минаваща през точките J , B и C . Нека D е пресечната точка на t с AB . В какво отношение D дели страната AB , ако $BJ = 2JC$. **Отг.** 1:1.

8.1.8. Окръжност с радиус R минава през върха C на равнобедрен триъгълник ABC , допира се до правата AB в точка A и пресича BC в точка D . Намерете бедрото, ако $BD:BC = k$.

Решение: Центърът O на дадената окръжност е пресечна точка на симетралата на AC и перпендикуляра през A към AB .

От теоремата за допирателната и секущата имаме: $BA^2 = BD \cdot BC$ или $BA^2 = k \cdot BC^2$.

$\angle BAC$ е периферен, а $\angle AEC$ е вписан, т.е.



$\angle BAC = \angle AEC$. Тогава $\triangle ABC \sim \triangle CEO$ (равнобедрени) и $\frac{BC}{AB} = \frac{OE}{CE}$ или $\frac{BC^2}{AB^2} = \frac{1}{k} = \frac{R^2}{4R^2 - AC^2}$. Получаваме $4R^2 - AC^2 = kR^2$, т.е. $AC = R\sqrt{4-k}$.

8.1.9. (ТУ) Даден е успоредник $ABCD$ ($AB < CD$), в който $AD = BD$. Окръжност с радиус R се допира до AB в точка A , минава през D и пресича BD в точката M . Намерете лицето на $ABCD$, ако $BM:MD = 2:3$. **Отг.** $54R^2/25$.

8.1.10. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($CA = CB$) със страни $AC = 10$ и $AB = \sqrt{80}$. Намерете радиуса на окръжност, минаваща през B и C , ако центърът ѝ лежи на височината BD . **Отг.** $25/4$.

8.1.11. В окръжност k ($O; r$) е вписан триъгълник ABC . През C е построена допирателна към k . Разстоянията от A и B до допирателната са m и q . Да се намери височината на триъгълника през върха му C . **Отг.** $\sqrt{mq}$.

8.1.12. В $\triangle ABC$ на правата AB е взета точка D . Докажете, че отношението на радиусите на описаните около $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ окръжности не зависи от положението на D . Кога сумата на тези радиуси е най-малка?

Отг. $CD \perp AB$.

8.1.13. В остроъгълния $\triangle ABC$ $AB = 3\sqrt{7}$, $AC = 3$, $\angle ACB = 60^\circ$. Ъглополовящата на $\angle ACB$ пресича описаната окръжност в точка D . Намерете дължината на CD .

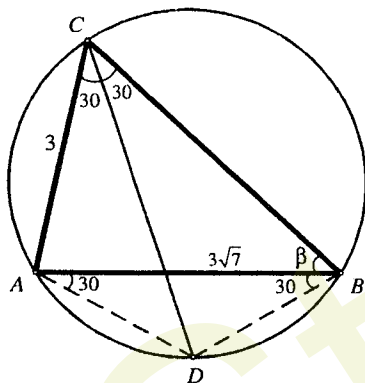
Решение: От синусова теорема имаме:

$$R = \frac{AB}{2\sin 60^\circ} = \sqrt{21} \text{ и } \sin \beta = \frac{AC}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}. \text{ Тогава}$$

$$\cos^2 \beta = 1 - \frac{3}{28}, \text{ но } \beta < 90^\circ, \text{ т.е. } \cos \beta = \frac{5}{\sqrt{28}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Намираме } CD &= 2R \sin(\beta + 30^\circ) = \\ &= 2\sqrt{21}(\sin \beta \cos 30^\circ + \cos \beta \sin 30^\circ) = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

8.1.14. В $\triangle ABC$ M и N са средите на AB и BC . Окръжност с $r = \sqrt{2}$ минава през M , N и C , и се допира до AB . Намерете $\sin \gamma$, ако $AC = 2$. **Отг.** $1/2$.



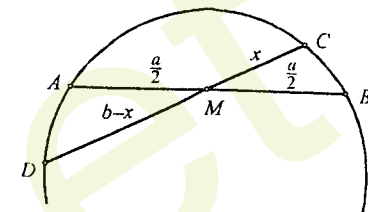
8.2. ДИАМЕТРИ И ХОРДИ

8.2.1. През средата M на хордата AB ($AB = a$) е построена друга хорда CD ($CD = b$). Определете дължините на отсечките CM и DM .

Решение: Нека по-малката отсечка да е CM . Ако $CM = x$, $DM = b - x$.

От теоремата за хордите $CM \cdot DM = MA \cdot MB$ или $x(b - x) = \frac{a^2}{4}$. Получаваме $4x^2 - 4bx + a^2 = 0$. Тогава

$$CM = \frac{1}{2}(b - \sqrt{b^2 - a^2}) \text{ и } DM = \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 - a^2}).$$



8.2.2. Хордата AB се дели от точката C на отсечки $AC = 5$, $BC = 4$. Намерете разстоянието от C до окръжността, ако тя е с радиус 6. **Отг.** 2.

8.2.3. През точка P от диаметъра MN е построена хорда AB , образувача с MN ъгъл от 60° . Намерете радиуса на окръжността, ако $AP = 10$ и $BP = 4$. **Отг.** $2\sqrt{19}$.

8.2.4. В $\triangle ABC$ CD е височина, а E е средата на BC . Намерете радиуса на описаната около $\triangle CDE$ окръжност, ако $AC = 30$, $BC = 26$ и $AB = 28$. **Отг.** $169/10$.

8.2.5. В окръжност са построени хордите AC и BD , пресичащи се в точка E , като допирателната към окръжността в точка A е успоредна на BD . Ако $CD:ED = 4:3$ и $S_{ABE} = 8$, намерете лицето на $\triangle ABC$.

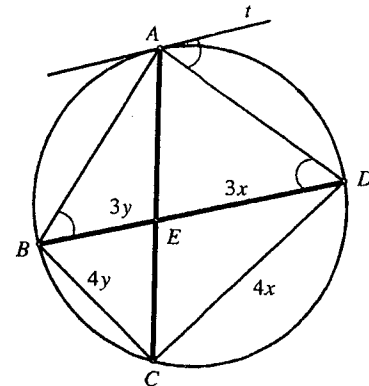
Решение: Допирателната t и успоредната ѝ хорда BD разделят $\widehat{BAD}$ на две еднакви дъги. Тогава CA е ъглополовяща на $\angle BCD$ и $\frac{CB}{BE} = \frac{CD}{DE} = \frac{4}{3}$. Означаваме $CB = 4y$, $CD = 4x$. От формулата за ъглополовящата имаме: $CE^2 = CD \cdot CB - DE \cdot BE$ или $CE^2 = 7xy$. От теоремата за хордите $CE \cdot EA = BE \cdot ED$ получаваме, че $EA = \frac{9xy}{\sqrt{7xy}}$.

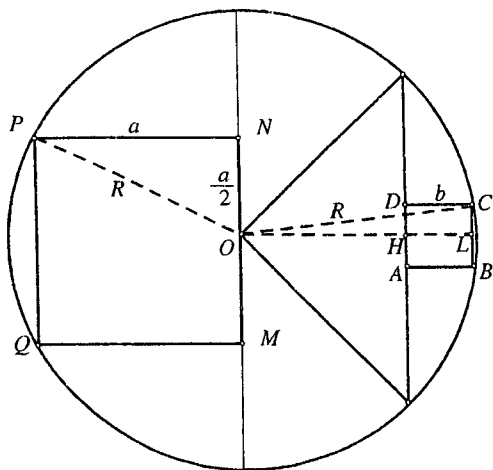
$$\text{Ясно е, че } \frac{S_{ABC}}{S_{ABE}} = \frac{AC}{AE} \text{ или}$$

$$S_{ABC} = \frac{AE + EC}{AE} S_{ABE}. \text{ Тогава } S_{ABC} = \left(1 + \frac{\sqrt{7xy} \cdot \sqrt{7xy}}{9xy}\right) 8, \text{ т.е. } S_{ABC} = \frac{128}{9}.$$

8.2.6. Намерете отношението на лицето на квадрат, вписан в изрез с дъга 180° , към лицето на друг квадрат, вписан в изрез от същия кръг с дъга 90° .

Решение: Ако страната на първия квадрат е a , то $a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2$; $a^2 = \frac{4R^2}{5}$. Нека страната на втория квадрат е b . Ясно е, че $OH = R \sin 45^\circ$, $OL = OH + b$.





От правоъгълния $\triangle OCL$
 $CL^2 + OL^2 = OC^2$ или
 $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(R\frac{\sqrt{2}}{2} + b\right)^2 = R^2$. Достигаем
 до $5b^2 + 4R\sqrt{2}b - 2R^2 = 0$ с
 положителен корен $b = \frac{R\sqrt{2}}{5}$.

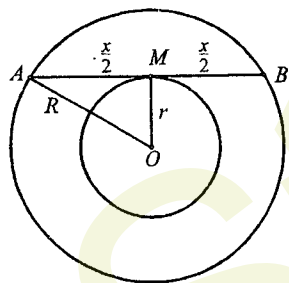
$$\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} = \frac{a^2}{b^2} = 10.$$

8.2.7. В кръгов изрез е вписан квадрат със страна 2. Хордата на изреза е 6. Намерете радиуса на кръга.
Отг. $\sqrt{10}$.

8.2.8. Права, перпендикулярна на хорда я дели в отношение 1:4, а съответната ѝ дъга в отношение 1:2. Намерете косинуса на централния ъгъл, определен от тази дъга.
Отг. $-23/27$.

8.2.9. В окръжност k с радиус 10 са построени две взаимноперпендикулярни хорди AB и AC ($A \in k$). Намерете радиуса на окръжност, допираща се до дадената окръжност и построените хорди, ако $AB = 16$.
Отг. 8.

8.2.10. През точка M от диаметъра EN на окръжност е построена хорда AB , склучваща с MN ъгъл 30° . Хордата BC е перпендикулярна на MN . Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако $EN = 8$ и $AM : MB = 2 : 3$.
Отг. $180\sqrt{3}/19$.



8.2.11. Кръгов пояс (венец) е с лице Q . Намерете дължината на хорда от големия кръг, допираща се до по-малкия.

Решение: Лицето на венеца е

$$Q = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2), \text{ т.е. } R^2 - r^2 = \frac{Q}{\pi}.$$

$$AM = MB = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{\frac{Q}{\pi}}; AB = 2\sqrt{\frac{Q}{\pi}}.$$

8.2.12. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност $k(O, R)$, диагоналите му са взаимноперпендикулярни и се пресичат в точка P . Намерете лицето на четириъгълника, ако $\angle OPB = \alpha$ и разстоянието от O до BD е равно на a .
Отг. $2\sqrt{(R^2 - a^2)(R^2 - a^2 \cot^2 \alpha)}$.

8.2.13. Дадени са две концентрични окръжности и точка A , външна за тях. Права l минава през A и пресича двете окръжности последователно в

точките K, K_1, L_1 и L . Друга права m също минава през A и пресича окръжностите последователно в M, M_1, N_1 и N . Хордите K_1N_1 и L_1M_1 се пресичат в точка F . Намерете $S_{K_1FL_1} : S_{M_1FN_1}$, ако $KL = 5NN_1$, а M_1N_1 е средногеометрична на KL и MM_1 .

Решение: Нека $NN_1 = x$, тогава $KL = 5x$ и понеже $MM_1 = NN_1$, то $MM_1 = x$. Като средногеометрична $M_1N_1 = \sqrt{KLMM_1} = x\sqrt{5}$.

Пресмятаме разстоянието p от O до MN . От една страна $OB^2 =$

$$= ON^2 - BN^2 \text{ или } p^2 = R^2 - \left(x + \frac{x\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

От друга страна $OB^2 = ON_1^2 - BN_1^2$

$$\text{или } p^2 = R^2 - \left(\frac{x\sqrt{5}}{2}\right)^2. \text{ Изваждаме}$$

двете равенства и получаваме $R^2 - r^2 = x^2(1 + \sqrt{5})$.

Нека $KK_1 = LL_1 = u$, тогава $K_1L_1 = 5x - 2u$. Както по-горе, пресмятаме по два начина разстоянието от O до KL . Получаваме, че $R^2 - r^2 = 5xu - u^2$. Разбираме, че $-5xu + u^2 = -x^2(\sqrt{5} + 1)$. От подобие $\triangle K_1FL_1 \sim \triangle M_1FN_1$ след-

$$\text{ва, че } \frac{S_{K_1FL_1}}{S_{M_1FN_1}} = \frac{(K_1L_1)^2}{(M_1N_1)^2} = \frac{(5x - 2u)^2}{(x\sqrt{5})^2} = \frac{25x^2 - 20xu + 4u^2}{5x^2},$$

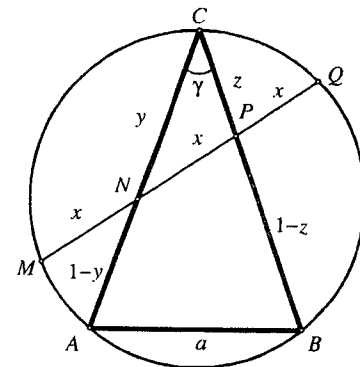
$$\text{но } -20xu + 4u^2 = -4x^2(\sqrt{5} + 1). \text{ Тогава } \frac{S_{K_1FL_1}}{S_{M_1FN_1}} = \frac{25x^2 - 4x^2(\sqrt{5} + 1)}{5x^2} = \frac{21 - 4\sqrt{5}}{5}.$$

8.2.14. Около равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC = 1$) е описана окръжност. Хордата MQ пресича бедрата на триъгълника и пресечните точки я разделят на три равни части. Намерете дължината на хордата, ако $AB = a$.

Решение: Ясно е, че задачата има смисъл при $a < 2$. От теоремата за хордите имаме: $AN \cdot NC = MN \cdot NQ$ или $(1 - y)y = x \cdot 2x$.

Аналогично $BP \cdot PC = PQ \cdot PM$, $(1 - z)z = x \cdot 2x$.

Тогава $(1 - y)y = (1 - z)z$, откъдето или $y = z$, или $y = 1 - z$. Ако $y = z$, $MQ \parallel AB$. Оставяме



на читателя да се убеди, че $MQ = \frac{3}{2a^2 + 1}$.

Нека $y = 1 - z$ и да отбележим, че $2x^2 = z(1 - z) < \frac{1}{4}$, т.е. $x^2 < \frac{1}{8}$. По косинусова теорема за $\triangle NPC$ имаме:

$$x^2 = (1 - z)^2 + z^2 - 2(1 - z)z \cos \gamma = 1 - 2(1 - z)z - 4x^2 \cos \gamma \text{ или } \cos \gamma = \frac{1 - 5x^2}{4x^2}.$$

Но по косинусова теорема за $\triangle ABC$ имаме: $\cos \gamma = \frac{1^2 + 1^2 - a^2}{2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{2 - a^2}{2}$. От

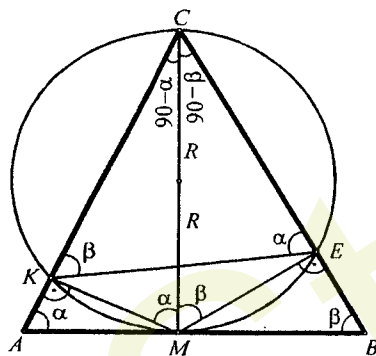
$$\frac{1 - 5x^2}{4x^2} = \frac{2 - a^2}{2} \text{ определяме } x^2 = \frac{1}{9 - 2a^2}, \text{ но } x^2 < \frac{1}{8} \text{ или } a < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Разбираме, че при $a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ търсената хорда съществува и $MQ = \frac{3}{\sqrt{9 - 2a^2}}$.

8.2.15. Окръжност k с център във вътрешността на прав ъгъл се допира до едното му рамо и пресича другото в A и B . Ъглополовящата на ъгъла пресича k в C и D . Ако $AB = \sqrt{6}$ и $CD = \sqrt{7}$, намерете радиуса на окръжността.

Отг. $\sqrt{2}$.

8.2.16. Височината CM в остроъгълния $\triangle ABC$ е диаметър на окръжност, пресичаща AC в точка K и BC в точка E . Намерете отношението на лицето на $\triangle KEM$ към лицето на $\triangle ABC$, ако $\angle BAC = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$.



Решение: $\angle KMC = \angle KEC$ и $\angle EMC = \angle EKC$ (като вписани). Ясно е, че $AM = 2R \cot \alpha$ и $BM = 2R \cot \beta$.

$$S_{ABC} = S_{AMC} + S_{BMC} = 2R^2 (\cot \alpha + \cot \beta).$$

От $MK = 2R \cos \alpha$, $ME = 2R \cos \beta$ и

$$S_{KEM} = \frac{1}{2} MK \cdot ME \cdot \sin(\alpha + \beta) \text{ получаваме}$$

$$S_{KEM} = 2R^2 \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha \cos \beta. \text{ Тогава}$$

$$\frac{S_{KEM}}{S_{ABC}} = \frac{2R^2 \sin(\alpha + \beta) \cos \alpha \cos \beta}{2R^2 (\cot \alpha + \cot \beta)} = \frac{\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta}{4}.$$

8.2.17. По-малката дъга, определена от хордата AB е α . През средата C на AB е построена хорда DE така, че $DC:CE = 1:3$. Намерете синуса на ъгъл ACD .

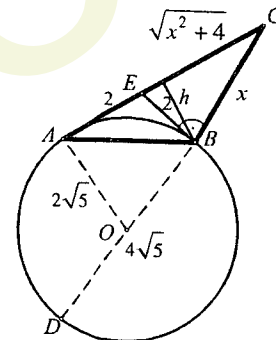
Отг. $\frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

8.3. ДОПИРАТЕЛНИ И СЕКУЩИ КЪМ ОКРЪЖНОСТ

8.3.1. Окръжност с радиус $2\sqrt{5}$ минава през върховете A и B на $\triangle ABC$, допира се до AC в точка E и отсича от правата BC отсечка $BD = 4\sqrt{5}$. Точката E е от AC и $\angle EBC = 90^\circ$. Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако $BE = 2$.

Решение: От условието $BD = 4\sqrt{5}$, следва че BD е диаметър. Понеже $EB \perp BD$, EB е допирателна и $BE = AE = 2$. Означаваме $CB = x$. От правоъгълния $\triangle CEB$ $CE^2 = CB^2 + EB^2$, т.е. $CE = \sqrt{x^2 + 4}$. От теоремата за допирателна и секуща $CA^2 = CB \cdot CD$ или $(\sqrt{x^2 + 4} + 2)^2 = x(4\sqrt{5} + x)$. Намираме, че $x = \sqrt{5}$. Тогава $CE = 3$. За височината BH от правоъгълния $\triangle CEB$ получаваме $BH \cdot CE = EB \cdot BC$, откъдето

$$BH = \frac{2\sqrt{5}}{3} \text{ и } S = \frac{AC \cdot BH}{2} = \frac{5}{3} \sqrt{5}.$$



8.3.2. Окръжност се допира до страните AC и BC на $\triangle ABC$ в точките A и B . Намерете радиуса ѝ, ако $AC = 12$ и $\angle BAC = 45^\circ$.

Отг. 12.

8.3.3. През точка A , външна за окръжността k , са построени допирателна AC ($C \in k$) и секуща. Разстоянието от A до една от точките на пресичане е 32. Намерете радиуса на окръжността, ако разстоянието от центъра ѝ до секущата е 5 и $AC = 16$.

Отг. 13.

8.3.4. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Лъчите AB и DC се пресичат в точка E , като $\angle AED = 60^\circ$. Ако $\angle ABD = 3\angle BAC$, докажете, че AC е диаметър на окръжността.

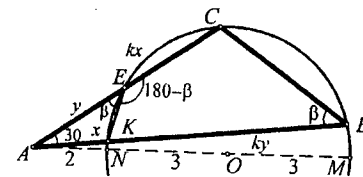
8.3.5. От точка A , намираща се на разстояние 5 от центъра на окръжност с радиус 3, са прекарани две секущи AKB и AEC , склучващи помежду си ъгъл 30° . Намерете лицето на $\triangle AKE$, ако лицето на $\triangle ABC$ е равно на 10.

Решение: Четириъгълникът $KBCE$ е вписан, $\angle CEK = 180^\circ - \angle CBA$. Тогава $\angle KEA = \angle CBA$ и $\triangle AKE \sim \triangle ACB$. Означаваме $AK = x$, $AE = y$. Ясно е, че $AB = ky$ и

$$AC = kx. \text{ Имаме: } S_{ABC} = \frac{AC \cdot AB \cdot \sin 30^\circ}{2} = \frac{kx \cdot ky}{4},$$

т.е. $k^2 xy = 40$. От теоремата за секущите $AB \cdot AK = AM \cdot AN$, $kxy = 16$. Разделяме двете уравнения и получаваме $k = \frac{5}{2}$; $\frac{S_{ABC}}{S_{AEK}} = k^2$, т.е. $S_{AEK} = \frac{8}{5}$.

8.3.6. Допирателната, построена през върха C към описаната около $\triangle ABC$ окръжност, пресича продължението на страната AB в D (B е между A и



D). Ако радиусът на окръжността е 2, $AC = \sqrt{12}$ и $\angle CDA + \angle ACB = 2\angle BAC$, намерете секущата AD .

Отг. $\frac{3}{\sin 15^\circ}$ или $\frac{3}{\sin 75^\circ}$.

8.3.7. Основата AB на равнобедрен $\triangle ABC$ е хорда на окръжност k с радиус 1 и център във вътрешността на $\triangle ABC$. През C са построени допирателните CD и CE ($D, E \in k$). Намерете S_{DCE} , ако

$$AC = BC = 2 \text{ и } \sin \frac{\angle ACB}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Решение: Последователно пресмятаме:

$$AF = FB = x = 2 \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad CF = 2 \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{4}{\sqrt{5}},$$

$$OF = \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ и } CO = CF - OF = \frac{3}{\sqrt{5}}. \text{ От}$$

$$\text{правоъгълния } \triangle ODC \text{ } OD^2 = OC \cdot OM \text{ или } OM = \frac{\sqrt{5}}{3}. \text{ Тогава } MC = OC - OM = \frac{4}{3\sqrt{5}},$$

$$DM = \sqrt{OD^2 - OM^2} = \frac{2}{3} \text{ и } DE = \frac{4}{3}. \text{ Търсеното}$$

$$\text{лице е } S = \frac{1}{2} DE \cdot CM = \frac{8}{9\sqrt{5}}.$$

8.3.8. (СУ) Нека t е допирателна в точката C към описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Точките P и Q , които лежат върху t , са такива, че $\angle PBC = \angle CBA$ и $\angle QAC = \angle CAB$ (P и Q не лежат на правата AB).

а) Изразете дължините на отсечките AQ , PQ и BP чрез дължините на страните на триъгълника $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$.

б) Ако $\angle ACB = 120^\circ$ и лицето на $\triangle ABC$ е равно на $\sqrt{3}$, намерете дължината на AB , при която периметърът на $ABPQ$ е най-малък.

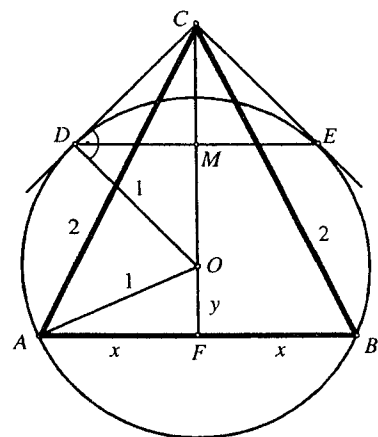
Отг. а) $\frac{b^2}{c}$, $\frac{2ab}{c}$, $\frac{a^2}{c}$; б) $2\sqrt{3}$.

8.3.9. Окръжност се допира до диагонала AC на квадрата $ABCD$, а центърът ѝ O и върхът B лежат в една полуравнина спрямо AC . Двете допирателни към окръжността от точката B образуват ъгъл от 120° . Намерете отношението на лицето на квадрата към лицето на кръга.

Отг. $(4 + \sqrt{15})/3\pi$.

8.3.10. В успоредника $ABCD$ ($AB > AD$) са вписани две еднакви окръжности с радиуси 6. Те се допират до три от страните на $ABCD$ и помежду си. AD се дели от допирната точка в отношение 9:4. Намерете S_{ABCD} .

Отг. 300.



8.3.11. В успоредника $ABCD$ $\angle BCD = 150^\circ$, $AB = 8$. Намерете радиуса на окръжност, допираща се до правата BC , минаваща през A и пресичаща AB на разстояние 2 от точката B .

Отг. $10 \pm 4\sqrt{3}$.

8.3.12. В успоредника $ABCD$ $AB = 8$. Ъглополовящата на $\angle ABC$ пресича правата AD в точката E . В $\triangle ABE$ е вписана окръжност с център O , допираща се до AE в K и до AB в P . Намерете $\sin \angle BAO$, ако $KP = 2$.

Отг. $(2 + \sqrt{2})/4$.

8.3.13. Окръжност с диаметър страната AC на $\triangle ABC$ минава през средата на BC и пресича страната AB в D така, че $3AD = AB$. Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако $AC = 1$.

Решение: Понеже AC е диаметър $\angle AMC$ е прав, AM е височина и медиана и $\triangle BAC$ е равнобедрен, т.е. $AB = AC = 1$.

От теоремата за секущите $BA \cdot BD = BC \cdot BM$

$$\text{или } 1 \cdot \frac{2}{3} = 2y \cdot y, \quad BM^2 = \frac{1}{3}.$$

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{За лицето получаваме: } S = \frac{AM \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

8.3.14. В остроъгълнен $\triangle ABC$ на височината AM е взета точка D , а на височината CP – точка E така, че $\angle CDB = \angle AEB = 90^\circ$. $DE = 4 + 2\sqrt{3}$, а $\angle DBE = 30^\circ$. Намерете ъглополовящата BL на $\triangle DBE$.

Решение: Около правоъгълните триъгълници APC и AMC можем да опишем окръжност k с диаметър AC .

От теоремата за секущите $BA \cdot BP = BC \cdot BM$.

От правоъгълните $\triangle ABE$ и $\triangle BDC$

$$BE^2 = BP \cdot BA, \quad BD^2 = BM \cdot BC.$$

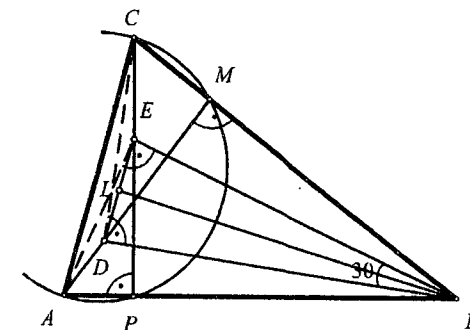
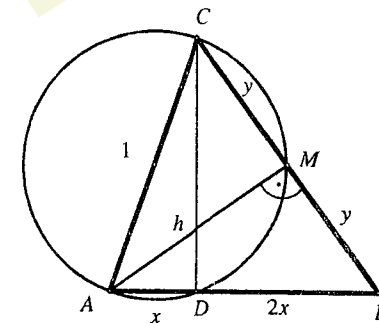
Следователно $BE = BD$, т.е. $\triangle DEB$ е равнобедрен и ъглополовящата BL е

$$\text{и височина; } BL = \frac{DE}{2} \cotg 15^\circ =$$

$$= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 + \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 7 + 4\sqrt{3}.$$

8.3.15. Единият край на диаметър на полуокръжност съвпада с върха B на равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$), а другият принадлежи на AB . Намерете радиуса на полуокръжността, ако тя се допира до AC и дели BC на отсечки с дължина 5 и 4 считано от B .

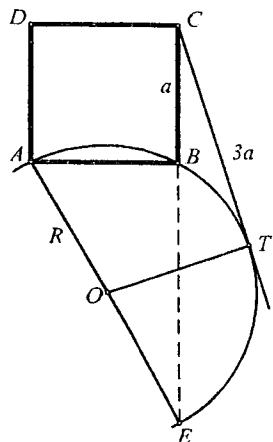
Отг. $15/\sqrt{11}$.



8.3.16. В равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) $AB = 14$, $AC = 25$ са построени височините AD и CE . Намерете радиуса на окръжността, която минава през E и се допира до BC в точката D .
Отг. 175/48.

8.3.17. В равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) $AB = a$. Окръжност с център A дели на три равни части бедрото BC . Намерете радиуса ѝ.
Отг. $a\sqrt{7}/3$.

8.3.18. KP и KM са допирателни към окръжност $k(O, R)$. На хордата MP е взета точка C ($MC < CP$) и през C е построена права, перпендикулярна на OC , която пресича PK в точката B . Намерете CB , ако $\angle MKP = 2\alpha$, $MC = b$.



Отг. $\cot \alpha \sqrt{R^2 + b^2 - 2bR \cos \alpha}$.

8.3.19. Даден е квадрат $ABCD$ ($AB = a$). През A и B е построена окръжност. Намерете лицето на кръга, ако допирателната от върха C е с дължина $3a$.

Решение: Продължаваме CB до пресичането ѝ с окръжността в точката E . Имаме: $CT^2 = CE \cdot CB$ или $(3a)^2 = (a + BE)a$, т.е. $BE = 4a$.

Понеже $\angle ABE = 90^\circ$, AE е диаметър. Тогава $(2R)^2 = a^2 + 64a^2$, $R^2 = \frac{65a^2}{4}$ и $S = \pi R^2 = \frac{65\pi}{4} a^2$.

8.3.20. Докажете, че ако в четириъгълника може да се впише окръжност, то отсечките с краища допирните точки на срещуположните двойки страни са равни тогава и само тогава, когато са равни два срещуположни ъгъла в четириъгълника.

8.3.21. Към окръжност k са построени допирателните AB и AC ($B, C \in k$). През произволна точка P от k са построени перпендикуляри PD , PE и PM към правите AB , AC и BC . Докажете, че $PD^2 = PM \cdot PE$.

8.3.22. PT е допирателна към окръжност, а хордата $AB \parallel PT$. Правите PA и PB пресичат окръжността в точки M и K . Докажете, че правата MK дели PT на две равни отсечки.

8.4. ПРАВИЛЕН МНОГОЪГЪЛНИК. ТЕОРЕМА НА ПТОЛЕМЕЙ. ЧЕТИРИЪГЪЛНИК И ОКРЪЖНОСТ

8.4.1. Разликата между лицето на кръг K и лицето на вписан в него квадрат е $2\sqrt{3}(\pi - 2)$. Намерете лицето на правилен шестоъгълник, вписан в K .

Отг. 9.

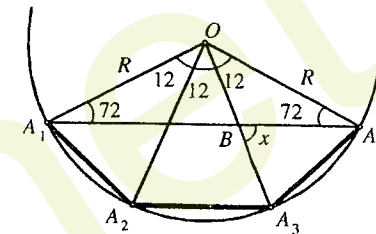
8.4.2. Даден е правилен 30-ъгълник $A_1, A_2, \dots, A_{30}$ с център O . Намерете ъгъла между правите OA_3 и A_1A_4 .

Решение: Централният ъгъл на правилен 30-ъгълник $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{30} = 12^\circ$.

$\angle OA_1A_4 = \angle OA_4A_1 = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$. Като

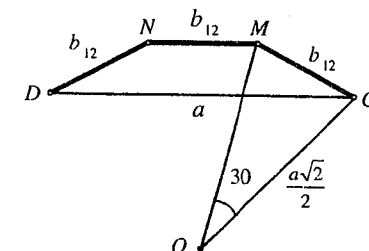
външен ъгъл за

$\triangle A_4BO$ $\angle A_3BA_4 = (72^\circ + 12^\circ) = 84^\circ$.



8.4.3. Даден е квадрат със страна a . На всяка страна външно за квадрата са построени трапеци, така че малките основи и бедрата им образуват правилен дванадесетоъгълник. Намерете лицето и страната му.

Решение: Нека O е центърът на квадрата. Пресмятаме $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $\angle COM = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Лицето S на дванадесетоъгълника е $S = 12S_{OCM} = 6 \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \sin 30^\circ = \frac{3a^2}{4}$.



От равнобедрения $\triangle COM$ за страната на

дванадесетоъгълника получаваме $\frac{b_{12}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 15^\circ = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$.

8.4.4. Намерете радиуса на кръг, ако лицето му е с q^2 по-голямо от лицето на вписания в него правилен 12-ъгълник.
Отг. $q/\sqrt{\pi-3}$.

8.4.5. В кръг с радиус R са вписани равнобедрен $\triangle ABC$ и квадрат $AMNP$. Изчислете лицето на общата част на $\triangle ABC$ и квадрата.
Отг. $(8\sqrt{3}-9)R^2/4$.

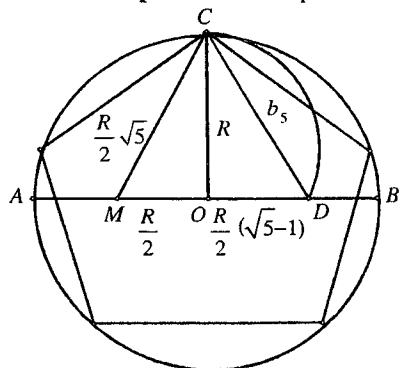
8.4.6. Даден е равнобедрен триъгълник с лице S и център O . Той е завъртан на 30° около O , като е получен втори равнобедрен триъгълник. Намерете лицето на общата част на тези триъгълници.
Отг. $S(\sqrt{3}-1)$.

8.4.7. В окръжност с радиус R е вписан правилен петоъгълник. Намерете страната му и я постройте с линийка и гергел.

Решение: Централният ъгъл с прилежаща хорда една от страните на правилния петоъгълник е равен на 72° . Ако радиусът на описаната окръжност е R , по косинусова теорема $b_5^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 72^\circ$. За да пресметнем $\cos 72^\circ$ използваме, че $\cos(3 \cdot 72^\circ) = \cos(360^\circ - 2 \cdot 72^\circ) = \cos(2 \cdot 72^\circ)$, т.е. 72° е корен на уравнението $\cos 3x = \cos 2x$ (друг корен е 0°). Като приложим формулите за двоен и троен ъгъл получаваме $4\cos^3 x - 3\cos x = 2\cos^2 x - 1$. Полагаме

$\cos x = t$ ($\cos 72^\circ > 0$). За уравнението $4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = 0$ знаем, че има корен $t = 1$. Получаваме $4t^3 - 2t^2 - 3t + 1 = (t-1)(4t^2 + 2t - 1) = 0$ с положителен корен $t = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Намерихме $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Получаваме $b_5^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} R^2$.

Построение: Построяваме диаметъра AB и радиус OC , перпендикулярен към него. Намираме средата M на OA . C център точката M и радиус MC описваме дъгата CD . Ще докажем, че $CD = b_5$.



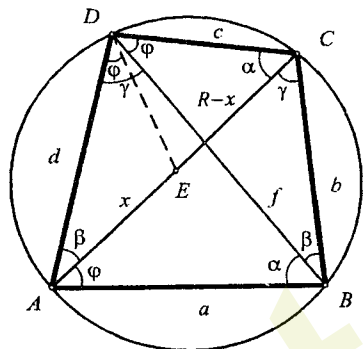
Намираме средата M на OA . C център точката M и радиус MC описваме дъгата CD . Ще докажем, че $CD = b_5$.

$$MC^2 = OM^2 + OC^2 = \frac{5R^2}{4},$$

$$OD = MD - OM = MC - OM = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

$$CD^2 = OC^2 + OD^2 = R^2 + \frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} = R^2 \frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

8.4.8. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Докажете, че $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ (теорема на Птолемей).

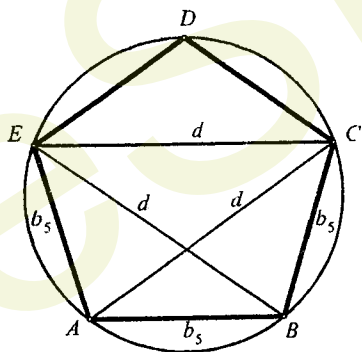


Доказателство: На AC намираме точка E така, че $\angle ADE = \angle BDC$.

Тогава $\triangle ADE \sim \triangle BDC$ и $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BC}$, т.е. $AD \cdot BC = AE \cdot BD$. Аналогично $\triangle ECD \sim \triangle ABD$ и $AB \cdot CD = CE \cdot BD$. Събираме почленно равенствата.

Друго доказателство може да получите, ако изразите всичките отсечки от условието на теоремата по синусова теорема чрез R и ъглите α, β и γ .

8.4.9. В окръжност е вписан четириъгълник, страните на който са a, b, c и d . Намерете отношението на диагоналите.



$$\text{Отг. } \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

8.4.10. Ако страната на правилен петъгълник е b , намерете диагонала.

Решение: От теоремата на Птолемей за $ABCE$ получаваме $d^2 = b^2 + bd$ или

$$x^2 - bx - b^2 = 0 \text{ с положителен корен } x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}b.$$

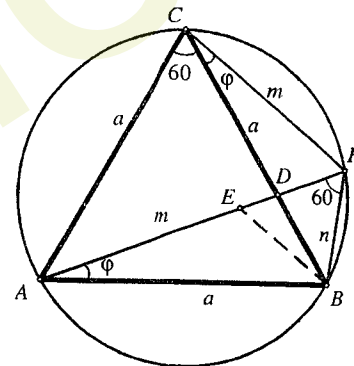
8.4.11. Докажете, че в правилния седмоъгълник $A_1A_2 \dots A_7$ е изпълнено:

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_2A_3}.$$

8.4.12. Около равностранен триъгълник ABC е описана окръжност k . Ако P е произволна точка от k , докажете, че едната от отсечките PA, PB и PC е равна на сбора на останалите две (теорема на Помпею).

Доказателство: Построяваме $AE = CP$. Тогава $\triangle ABE \cong \triangle CBP$. Разбираме, че $BE = BP$. Ясно е, че $\angle APB = \angle ACB = 60^\circ$ (като вписан), следователно $\triangle BPE$ е равностранен и $PE = PB$. Тогава $PA = PB + PC$.

Друго доказателство ще получите, като приложите теоремата на Птолемей за $ABPC$.



8.4.13. Докажете, че за да бъде равностранен $\triangle ABC$ е необходимо и достатъчно за всяка точка M от описаната около $\triangle ABC$ окръжност сборът $MA^2 + MB^2 + MC^2$ да е константа. Ако $\triangle ABC$ е равностранен, изразете тази константа като функция на R .

$$\text{Отг. } MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2.$$

8.4.14. Пресичащите се хорди AB и CD от една окръжност са перпендикулярни, като $AD = a, BC = b$. Намерете диаметъра ѝ.

$$\text{Отг. } \sqrt{a^2 + b^2}.$$

8.4.15. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с диагонал $AC = \sqrt{2}$. Намерете лицето на кръга, описан около $\triangle ABD$, ако $\angle ABC = 105^\circ, \angle ACD = 42^\circ$ и $\angle DAC = 63^\circ$.

$$\text{Отг. } 2\pi(2 - \sqrt{3}).$$

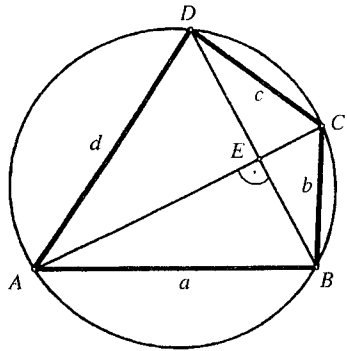
8.4.16. В окръжност е вписан $\triangle ABC$. Хордата DE е успоредна на BC , а правата AE пресича правата BC в точка M . Докажете, че $AM \cdot AD = AB \cdot AC$.

8.4.17. Четириъгълник е вписан в окръжност и единият от диагоналите му е диаметър на окръжността. Докажете, че проекциите на противоположните двойки страни върху другия диагонал са равни.

8.4.18. В окръжност k е вписан четириъгълник $ABCD$. Докажете, че произведението на разстоянията от произволна точка $M (M \in k)$ до AB и CD е равно на произведението на разстоянията от M до AD и BC .

8.4.19. В окръжност k е вписан четириъгълник $ABCD$. Докажете, че ако правата AC минава през пресечната точка на допирателните към k , построени през B и D , то $AB \cdot CD = AD \cdot BC$.

8.4.20. В четириъгълника $ABCD$ може да се впише и опише окръжност. Диагоналите му са взаимноперпендикулярни. Намерете лицето му, ако радиусът на описаната окръжност е R и $AB = 2BC$.



Решение: Нека страните на $ABCD$ означим с a, b, c и d . Понеже диагоналите му са перпендикулярни, $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Записваме това равенство като $(a+c)^2 - 2ac = (b+d)^2 - 2bd$, но $a+c = b+d$ ($ABCD$ е и описан). Получаваме, че $ac = bd$. Тогава и $(a-c)^2 = a^2 + c^2 - 2ac = (b-d)^2$, т.е. $|a-c| = |b-d|$. Нека $a-c = b-d$, събираме с $a+c = b+d$ и получаваме $a=b$ и $c=d$. Ако $a-c = d-b$, ще получим $a=d$ и $b=c$.

Докажем, че ако в четириъгълник с взаимноперпендикулярни диагонали може да се впише окръжност, то той е съставен от два равнобедрени триъгълника (делтоид).

От условието имаме $a \neq b$, т.е. $a=d$, $b=c$ и $\triangle ABC \cong \triangle ADC$. Около $ABCD$ може да се опише окръжност, т.е. $\angle B + \angle D = 180^\circ$ или $\angle B = \angle D = 90^\circ$.

Тогава AC е диаметър и $AB^2 + BC^2 = 4R^2$. Получаваме $BC^2 = \frac{4R^2}{5}$ и

$$S_{ABCD} = \frac{8R^2}{5}.$$

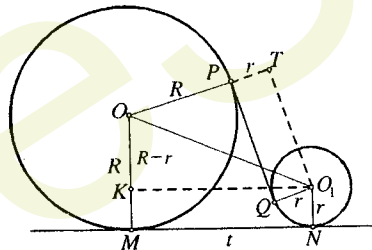
8.4.21. Два еднакви равностранни $\triangle ABC$ и $\triangle CDE$ със страни 1 са разположени в равнината така, че имат само една обща точка C и $\angle BCD < 60^\circ$. Точката K е среда на AC , L – среда на CE , M – среда на BD . Лицето на $\triangle KLM$ е $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

Намерете BD .

Отг. $(2 - \sqrt{3})/5$.

8.5. ДВЕ ОКРЪЖНОСТИ И ДОПИРАТЕЛНИТЕ ИМ

8.5.1 Окръжностите $k(O, R)$ и $k_1(O_1, r)$ имат външна допирателна $MN = t$. Намерете централата им OO_1 и дължината на общата им вътрешна допирателна PQ .

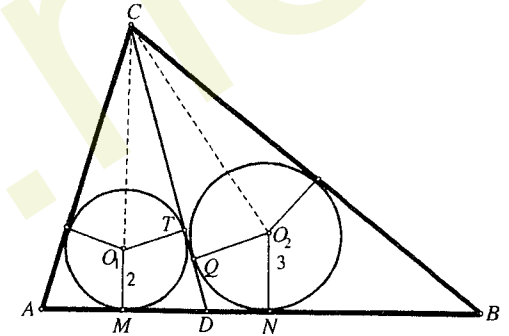


Решение: Построяваме $O_1K \parallel MN$. Имаме: $OO_1^2 = t^2 + (R-r)^2$. За да намерим PQ построяваме $O_1T \parallel PQ$. $O_1T^2 = OO_1^2 - OT^2 = t^2 + (R-r)^2 - (R+r)^2 = t^2 - 4Rr$. $PQ^2 = t^2 - 4Rr$.

Ясно е, че ако $t^2 < 4Rr$, то k и k_1 се пресичат, а при $t^2 = 4Rr$ те се допират. Допълнително получихме, че ако две окръжности с радиуси R и r се допират външно, дължината на общата им външна допирателна е $t = 2\sqrt{Rr}$.

8.5.2. Ъглополовящата CD разделя $\triangle ABC$ на два триъгълника с радиуси на вписаните окръжности 2 и 3. Ако те се допират до AB в точки M и N и $MN = 7$, намерете CD .

Решение: Както в предходната задача пресмятаме $O_1O_2 = \sqrt{50}$ и $TQ = 5$. Отсечките DQ и DN , DT и DM са равни и $MN = DM + DN = TQ + QD + DN$. Получихме, че $7 = 5 + 2DQ$, т.е. $DQ = DN = 1$. От $\triangle CO_1T \sim \triangle CO_2Q$ имаме: $\frac{CT}{2} = \frac{CT+5}{3}$, $CT = 10$ и $CD = CT + TQ + QD = 16$.



8.5.3. Централата на две окръжности е равна на $\sqrt{80}$, а радиусите им са 4 и 8. Намерете дължината на общата им допирателна. Отг. 8.

8.5.4. Дадени са радиусите R и r на две непресичащи се окръжности с централа d ($d > R + r$). Да се намери лицето на трапеца, образуван от двете външни допирателни и хордите, съединяващи допирните точки на допирателните с окръжностите.

Решение: Построяваме $O_2M \parallel AB$.

$$AB = t = \sqrt{d^2 - (R-r)^2}.$$

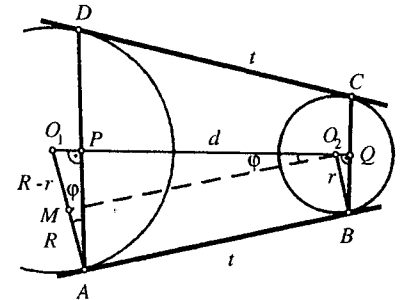
От подобие $\triangle O_1O_2M \sim \triangle O_1AP$ имаме: $\frac{AP}{R} = \frac{t}{d}$, т.е. $AP = \frac{Rt}{d}$ и $\frac{O_1P}{R} = \frac{R-r}{d}$ или $O_1P = \frac{R(R-r)}{d}$. Аналогично от

$\triangle O_1O_2M \sim \triangle O_2BQ$, следва $BQ = \frac{tr}{d}$ и

$$O_2Q = \frac{r(R-r)}{d}. \text{ Пресмятаме } PQ = d - O_1P - O_2Q = \frac{d^2 - (R-r)^2}{d} \text{ и}$$

$$S = \frac{AD+BC}{2} \cdot PQ = \left(\frac{Rt}{d} + \frac{tr}{d} \right) \cdot \frac{d^2 - (R-r)^2}{d}. \text{ Получаваме } S = \frac{R+r}{d^2} \left(\sqrt{d^2 - (R-r)^2} \right)^3.$$

8.5.5. Общите външни допирателни на две непресичащи се окръжности са AA_1 и BB_1 . AB_1 ги пресича в точките C и C_1 . Докажете, че $AC = B_1C_1$.



8.5.6. AB и CD са външни допирателни на две непресичащи се окръжности с радиуси R и R_1 . Вътрешната им допирателна MN ги пресича в точки P и Q . Докажете, че $PM = NQ$ и $CP \cdot PD = R \cdot R_1$.

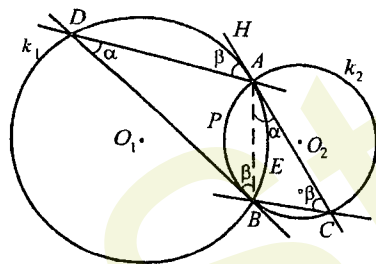
8.5.7. Две непресичащи се окръжности се допират до раменете на ъгъл с връх B , съответно в точките A , C и A_1 , C_1 ($AC > A_1C_1$). AC_1 пресича окръжностите в точки E и F . Намерете отношението на лицата на $\triangle ABC_1$ и $\triangle A_1BC_1$, ако $BA_1 = 2$, $EF = 1$, $EA = 3/2$ (E е между A и F).
Отг. $1 + \sqrt{5/2}$.

8.5.8. Две окръжности с радиуси R и r имат взаимноперпендикулярни вътрешни допирателни. Намерете лицето на триъгълника, образуван от тези допирателни и една от външните им допирателни.
Отг. Rr .

8.5.9. Една от вътрешните общи допирателни на две окръжности с радиуси R и r е перпендикулярна на една от външните им общи допирателни. Намерете лицето на триъгълника, ограничен от тези допирателни и втората вътрешна обща допирателна.
Отг. $\frac{R-r}{R+r} Rr$.

8.5.10. Разстоянието между центровете на две окръжности е равно на сбора от диаметрите му. Докажете, че ъгълът между една от общите им външни допирателни и централата е 30° . Докажете, че необходимото и достатъчно условие ъгълът между общите външни допирателни да е 30° , е отношението на радиусите на двете окръжности да е $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

8.5.11. Окръжностите k_1 и k_2 се пресичат в точки A и B . Допирателната в A към k_1 пресича k_2 в C , а допирателната в B към k_2 пресича k_1 в D . Докажете, че $AD \parallel BC$ и че $AB^2 = BC \cdot AD$.



Решение: В k_1 $\angle ADB$ е вписан, а $\angle BAC$ е периферен, следователно $\angle ADB = \angle BAC$. Аналогично, равни са вписаният в k_2 $\angle BCA$ и периферният $\angle ABD$. Тогава равни са и $\angle DAB = \angle CBA$, но това са ъглите, получени при пресичането на AD и BC с правата AB . Следователно $AD \parallel BC$. Ясно е, че

$$\triangle ABD \sim \triangle BAC \text{ и } \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BA}, \text{ т.е. } AB^2 = BC \cdot AD.$$

8.5.12. Две окръжности се пресичат в точките A и B . През точката A са построени хордите AC и AD , допиращи се до дадените окръжности. Намерете отношението $BC:BD$, ако $AC:AD = 3:2$.
Отг. $9/4$.

8.5.13. Две окръжности се пресичат в точки K и L . Центровете им са разположени в една и съща полуравнина спрямо правата KL . Хордата AK от първата окръжност се допира до втората окръжност в точка K . Хордата BK от

втората се допира до първата в точка K . Намерете лицето на $\triangle AKB$, ако $AL = 3$, $BL = 6$, $\tan \angle AKB = \frac{1}{2}$.
Отг. $\frac{9}{10}(3\sqrt{10} - 8)$.

8.5.14. Две окръжности с центрове O_1 и O_2 се пресичат в точките A и B . През B е построена права, пресичаща първата окръжност в точка M , а втората – в точка N . Докажете, че $\angle O_1AO_2 = \angle MAN$.

8.5.15. Две окръжности с радиуси 3 и 1 се пресичат, като централата им е $2\sqrt{2}$. Построена е общата им допирателна AB . Намерете лицето на $\triangle ABC$, където C е пресечната точка на окръжностите, по-близка до правата AB .

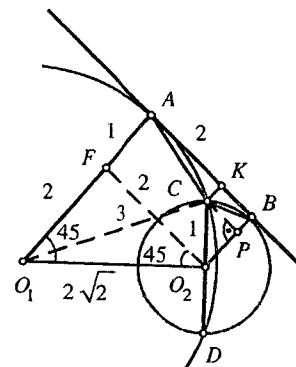
Решение: От $\triangle O_1O_2C$ имаме $3^2 = (2\sqrt{2})^2 + 1^2$.

Тогава $\angle O_1O_2C = 90^\circ$ и O_2 лежи върху общата за двете окръжности хорда CD .

От $\triangle O_1O_2F$ $AB = O_2F = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2$, следователно $\angle O_2O_1F = \angle O_1O_2F = 45^\circ$. От равнобедрения правоъгълен $\triangle O_2PC$ определяме

$$O_2P = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Получаваме } CK = PB = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \text{ и}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CK = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$



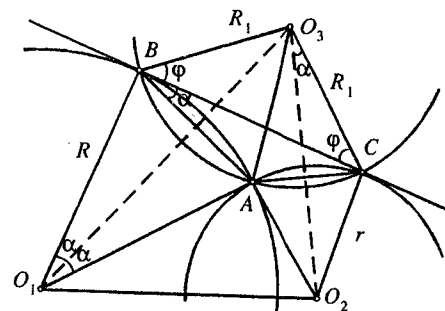
8.5.16. Две окръжности с радиуси 4 и 8 се пресичат под прав ъгъл. Намерете дължината на общата им допирателна.
Отг. 8.

8.5.17. Окръжности с радиуси R и r се пресичат. BC е една от общите им допирателни. Ако A е тази от пресечните им точки, която е по-близко до BC , намерете радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

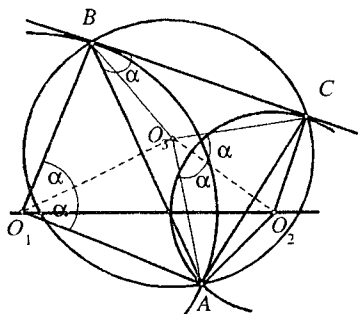
Решение: $\triangle O_3BC$ е равнобедрен, $\angle O_1BC = \angle O_2CB = 90^\circ$, следователно $\angle O_1BO_3 = \angle O_2CO_3$.

$\angle AO_1B$ е централен, $\angle CAB$ е периферен, т.е. $\angle AO_1B = 2\angle CAB$, но $\angle CAB$ е вписан в третата окръжност, а $\angle CO_3A$ е централен или

$\angle CO_3A = \angle BO_1A$. Тогава и $\angle BO_1O_3 = \angle CO_3O_2$ (O_3 е на симетралите на AB и AC). Разбираме, че $\triangle O_1O_3B \sim \triangle O_3O_2C$, т.е. $\frac{O_1B}{O_3B} = \frac{O_3C}{O_2C}$ или $\frac{R}{R_1} = \frac{r}{r}$ и следователно $R_1 = \sqrt{Rr}$.



8.5.18. Окръжности с радиуси R и r се пресичат. BC е една от общите им допирателни. Ако A е тази от пресечните им точки, която е по-далече от BC , намерете радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

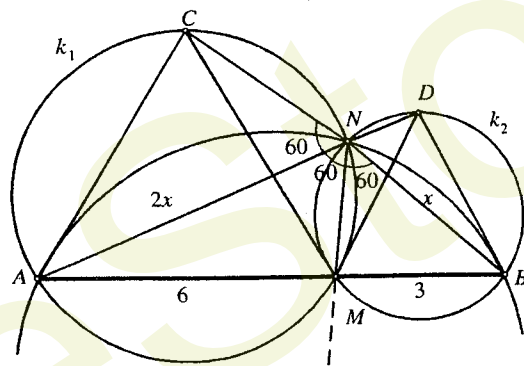


Решение: Както в [8.5.17] доказваме, че $\angle AO_1B = \angle AO_2C = 2\alpha$. По същия начин доказваме, че $\angle AO_2C = \angle AO_1B = 2\beta$. По синусова теорема $AB = 2R \sin \alpha = 2r_1 \sin \beta$ и $AC = 2r \sin \beta = 2R_1 \sin \alpha$. Тогава $4Rr \sin \alpha \sin \beta = 4R_1^2 \sin \alpha \sin \beta$ или $R_1 = \sqrt{Rr}$. По подобен начин можем да решим и предходната задача.

8.5.19. В $\triangle ABC$ $AC = 7$. Окръжност $k_1(O_1, R)$ минава през A и C , а окръжност $k_2(O_2, r)$ минава през A и B и пресича k_1 в точка M , вътрешна за $\triangle ABC$. Ако $R = 5$, $r = 4$ и $O_1O_2 = 6$, намерете MC . **Отг.** $(21 - \sqrt{357})/4$.

8.5.20. Намерете лицето на ромба $ABCD$, ако радиусите на окръжностите, описани около $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ са R и r . **Отг.** $\frac{8r^3 R^3}{(r^2 + R^2)^2}$.

8.5.21. На отсечката AB е избрана точка M . Около равностранный $\triangle AMC$ и $\triangle BMD$ (C и D са от една полуравнина спрямо AB) са описани окръжности, които се пресичат в точка N . Докажете, че AD и BC минават през N и че, когато точката M описва отсечката AB , правите MN минават през една и съща точка L . Ако $AM = 6$, $MB = 3$, намерете дължината на MN .



Решение: $\angle CNA = \angle ANM = \angle MNB = 60^\circ$, т.е. $\angle CNB = 180^\circ$ и A, N и D са на една права. Аналогично и $\angle DNA = 180^\circ$. Тогава правите AD и BC се пресичат в N .

Да си представим описаната около $\triangle ANB$ окръжност. Тя има диаметър $2R = \frac{AB}{\sin 120^\circ}$ (без значение положението на M) и симетралата на AB пресича голямата дъга AB в точка L . NM е ъглополовяща на $\angle ANB$ и следователно минава през точката L . Понеже NM е ъглополовяща в $\triangle ANB$, $\frac{NA}{NB} = \frac{MA}{MB} = \frac{2}{1}$. Нека $NA = 2x$. От формулата за ъглополовящата NM имаме: $NM^2 = NA \cdot NB -$

$- MA \cdot MB = 2x^2 - 18$. По косинусова теорема $AB^2 = 4x^2 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot x \cdot \cos 120^\circ$ или $x^2 = \frac{81}{7}$. Тогава $NM = \frac{6}{\sqrt{7}}$.

8.5.22. На отсечката AB е избрана точка M . Около квадратите $AMCD$ и $MBEF$ (квадратите са от една полуравнина спрямо AB) са описани окръжности, които се пресичат и в точка N . Докажете, че правите AF , BC и DE минават през точката N и че, когато точката M описва отсечката AB , правите MN минават през една и съща точка K .

8.5.23. Външно за $\triangle ABM$ са построени квадратите $AMCD$ и $BEFM$. Докажете, че правите AF , BC и DE минават през една точка и намерете ъглите между тях. **Отг.** 90° ; 45° .

8.5.24. Даден е $\triangle ABC$ с ъгли $A = 45^\circ$ и $B = 60^\circ$. С диаметри медианите AA_1 и BB_1 са построени окръжности, които се пресичат в точки M и N . Намерете в какво отношение правата MN дели страната AB .

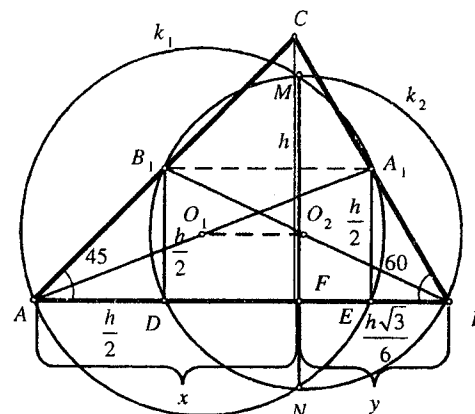
Решение: Да отбележим, че O_1 и O_2 са среди на диагоналите в трапеца ABA_1B_1 , т.е. $O_1O_2 \parallel AB$. Тогава общата хорда на окръжностите $MN \perp AB$.

Нека h да е височината на $\triangle ABC$ през C . Ясно е, че

$$B_1D = A_1E = \frac{h}{2} \text{ и } AD = \frac{h}{2},$$

$$BE = \frac{h}{2} \cdot \cot 60^\circ = \frac{h\sqrt{3}}{6}. \text{ От теоремата}$$

за хордите имаме: $MF \cdot FN = AF \cdot FE$ и $MF \cdot FN = DF \cdot FB$, следователно $AF \cdot FE = DE \cdot EB$. Тогава $x \left(y - \frac{h\sqrt{3}}{6} \right) = y \left(x - \frac{h}{2} \right)$, откъдето $\frac{x}{y} = \sqrt{3}$.



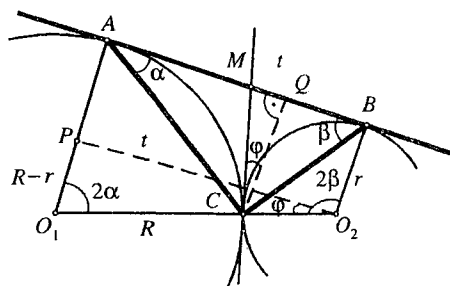
8.5.25. Отсечките AA_1 и BB_1 са медиани на $\triangle ABC$ и служат за диаметри на окръжностите k_1 и k_2 . С M и N са означени пресечните точки на k_1 и k_2 . Докажете, че правата MN минава през точката C .

8.5.26. В $\triangle ABC$ $BC:CA:AB = m:n:p$. Медианите през A и B са диаметри на окръжности. Намерете в какво отношение общата им хорда дели страната AB , считано от A към B . **Отг.** $(n^2 + p^2 - m^2)/(p^2 + m^2 - n^2)$.

8.5.27. Дадена е окръжност с диаметър PQ . Втора окръжност с център в Q пресича първата окръжност в S и T , а диаметъра PQ – в точка A (AB е диаметър на втората окръжност). На дъгата SA , несъдържаща T , е взета точка C , различна от S и A . PC пресича първата окръжност в точка D . Намерете DT , ако $SD = a$ и $DC = b$. **Отг.** b^2/a .

8.6. ДОПИРАЩИ СЕ ОКРЪЖНОСТИ

8.6.1. Две окръжности с радиуси R и r се допират външно в точка C , а AB е общата им външна допирателна. Намерете лицето на $\triangle ABC$.



Решение: $O_1O_2 = d = R + r$,

$$AB = 2\sqrt{Rr} \quad [8.5.1].$$

Сумата от централните ъгли $\angle O_2O_1A$ и $\angle O_1O_2B$ е 180° . Тогава сумата на периферните $\angle CAB$ и $\angle CBA$ е 90° , т.е. $\triangle ABC$ е правоъгълен и $CM = \sqrt{Rr}$. $\triangle CMQ \sim \triangle O_2O_1P$ ($\angle MCQ$ и $\angle PO_2O_1$ са равни като ъгли с взаимноперпендикулярни рамене). От $\frac{CQ}{CM} = \frac{O_2P}{O_1O_2}$ получаваме

$$CQ = \frac{2\sqrt{Rr} \cdot \sqrt{Rr}}{R+r} = \frac{2Rr}{R+r}. \text{ Търсеното лице е:}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CQ = \frac{2\sqrt{Rr} \cdot 2Rr}{2(R+r)} = \frac{2Rr\sqrt{Rr}}{R+r}.$$

8.6.2. Две окръжности се допират външно в точка C . Намерете радиусите им, ако хордите, съединяващи точката C с допирните точки на една обща външна допирателна са 6 и 8. **Отг.** 20/3; 15/4.

8.6.3. Окръжност с радиус 2 се допира външно до друга в точка T . Вътрешната им допирателна пресича една от външните допирателни в точка M . Намерете радиуса на втората окръжност, ако $MT = 4$. **Отг.** 8.

8.6.4. (ВУЗ) Окръжностите $k(O; R)$ и $k_1(O_1; R_1)$ ($R > R_1$) се допират външно в точка T . Построена е едната от общите им външни допирателни t , която се допира до k в точка A и до k_1 в точка B .

а) Ако M е пресечната точка на OA и правата, минаваща през O_1 и успоредна на AB , докажете, че $\angle OO_1M = 90^\circ - 2\angle ATB$.

б) Намерете дължината на AB .

в) Ако P е средата на AB , докажете, че PT е общата вътрешна допирателна и че $\triangle POO_1$ е подобен на $\triangle TAB$. **Отг. б)** $2\sqrt{RR_1}$.

8.6.5. Намерете радиуса на окръжност, която са допира до раменете на острия ъгъл на ромб и до вписаната в ромба окръжност, ако височината на ромба е h , а острият му ъгъл е α . **Отг.** $\frac{h}{2} \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{4}\right)$.

8.6.6. Две окръжности с радиуси R и r се допират външно. Ако AB и CD са двете им общи външни допирателни, докажете, че в трапеца $ABCD$ може да се впише окръжност и намерете нейния радиус. **Отг.** $2\sqrt{Rr}/(R+r)$.

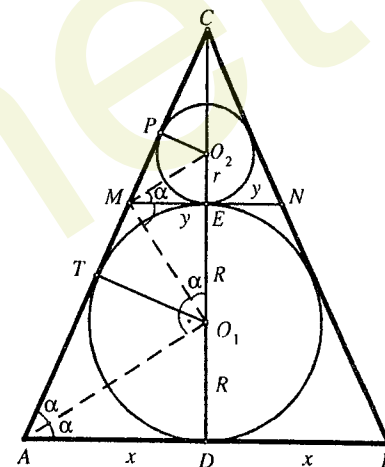
8.6.7. Две окръжности с радиуси R и r се допират външно. Намерете лицето на трапеца, ограничен от двете допирателни и правите, съединяващи допирните точки [8.5.3.]. **Отг.** $8Rr\sqrt{Rr}/(R+r)$.

8.6.8. В равнобедрен триъгълник са вписани две окръжности: първата – с радиус R , се допира до основата и бедрата, а втората – с радиус r , до първата и до бедрата. Намерете основата на триъгълника.

Решение: Означаваме ъгъла при основата с 2α . Имаме $\tan \alpha = \frac{R}{AD}$,

$$ME = R \tan \alpha = \frac{R^2}{AD}, \quad r = ME \tan \alpha = \frac{R^3}{AD^2}.$$

$$\text{Тогава } AD^2 = \frac{R^3}{r} \text{ и } AB = 2R\sqrt{\frac{R}{r}}.$$



8.6.9. Окръжност k с център O и $R = 6 + 4\sqrt{2}$ се допира до правата l в точка A . Върху k е взета точка B така, че $\angle AOB = 45^\circ$. Намерете радиуса на окръжността, която се допира до l и до k в точка B . **Отг.** 2.

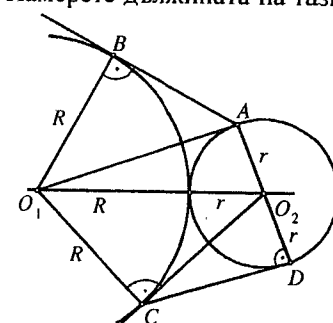
8.6.10. Две окръжности се допират външно. От центъра на едната е построена допирателна към другата и от така получената допирна точка е построена допирателна към първата окръжност. Намерете дължината на тази допирателна.

Решение: Нека O_1 е центърът на по-голямата окръжност. Пресмятаме:

$$O_1A = \sqrt{(R+r)^2 - r^2} = \sqrt{R^2 + 2Rr} \text{ и}$$

$$AB = \sqrt{R^2 + 2Rr - R^2} = \sqrt{2Rr}.$$

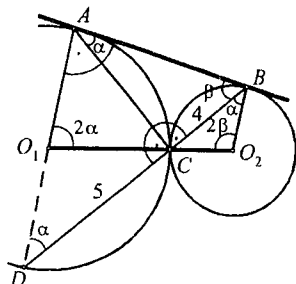
Лесно се съобразява, че същия резултат ще получим, ако построим допирателна от центъра на по-малката окръжност.



8.6.11. Две окръжности се допират външно в точка A . През точка B от голямата окръжност е построена допирателна BC към по-малката. Ако $AB = 4$, $BC = 5$ и радиусът на малката окръжност е 9, намерете радиуса на голямата окръжност. **Отг.** 16.

8.6.12. Окръжностите $k_1(O_1, R)$ и $k_2(O_2, r)$ се допират външно. O_1A е допирателна към k_2 , а O_2B – към k_1 . Ако $O_1A \parallel O_2B$, докажете, че ъгълът между O_1O_2 и една от тези допирателни е 30° .

8.6.13. Две окръжности се допират външно в точка T . Права се допира до едната окръжност в точка A и пресича другата в точките B и C . Докажете, че A е на равни разстояния от BT и CT .



8.6.14. Две окръжности се допират външно в точка C , а AB е общата им външна допирателна. Правата CB пресича другата окръжност в точка D . Ако $CD = 5$, $CB = 4$, намерете AD .

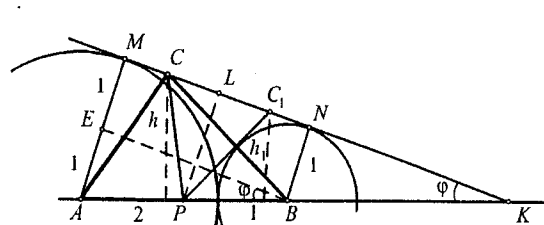
Решение: Знаем, че $\angle BCA = 90^\circ$ [8.6.1]. Тогава AD е диаметър и следователно и $\triangle DAB$ е правоъгълен. Пресмятаме $AC^2 = CD \cdot CB = 20$ и

$$AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = 3\sqrt{5}.$$

8.6.15. Права пресича две външно допиращи се окръжности с радиуси R и r в точките A, B, C и D . Ако $AB = BC = CD$, намерете AB .

$$\text{Отг. } \frac{1}{2} \sqrt{14Rr - R^2 - r^2}.$$

8.6.16. Две окръжности с центрове A и B и радиуси 2 и 1 се допират външно. Точка C лежи на една от общите им външни допирателни и е на разстояние $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ от средата на AB .



Намерете S_{ABC} , ако то е по-голямо от 2 .

Решение: Пресмятаме $MN = 2\sqrt{2} = NK$ и $PL = \frac{3}{2}$

(средна отсечка в $AMNB$). Ясно е, че $LC = \sqrt{CP^2 - PL^2} = \sqrt{\frac{9.3}{4.2} - \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ и

$KL = 3\sqrt{2}$. Ако C е между K и L $KC = KL - CL = \frac{9\sqrt{2}}{4}$, в противен случай

$$KC = KL + LC = \frac{15\sqrt{2}}{4}.$$

От $\triangle ABE$ имаме: $\sin \varphi = \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}$. При $KC = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ височината h на $\triangle ABC$ е

$$h = KC \sin \varphi = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ и } S_{ABC} = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{8} < 2.$$

Проверете сами, че в другия случай $S_{ABC} = \frac{15\sqrt{2}}{8} > 2$.

8.6.17. Две окръжности k_1 и k_2 се допират външно в точка T . На общата им вътрешна допирателна е взета точка M така, че $MT = 7$. През M са постро-

ени секущи AB към k_1 ($A, B \in k_1$ и B е между A и M) и CD към k_2 ($C, D \in k_2$ и D е между M и C). Нека AD и BC се пресичат в точка K . Ако $MB = 4$, а $\frac{S_{ABK}}{S_{CDK}} = \frac{9}{4}$, намерете MC .

Решение: От $MA \cdot MB = MT^2 = MC \cdot MD$

имаме: $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MB}$. По втори признак

($\angle M$ – общ) $\triangle MAD \sim \triangle MCB$ и $\angle MAK = \angle MCK$.

Тогава $\triangle AKB \sim \triangle CKD$ и следователно

$$\frac{S_{AKB}}{S_{CKD}} = \frac{AB^2}{CD^2} = \frac{9}{4}, \text{ т.е. } \frac{AB}{CD} = \frac{3}{2}. \text{ Нека}$$

$AB = 3x$. От $MA \cdot MB = MT^2$ получаваме:

$$(3x + 4) \cdot 4 = 49, \quad x = \frac{11}{4} \text{ и } CD = 2x = \frac{11}{2}.$$

От $MC \cdot MD = MT^2$ имаме: $\left(y + \frac{11}{2}\right)y = 49$ или $2y^2 + 11y - 98 = 0$.

Положителният корен на това уравнение е $y = \frac{\sqrt{905} - 11}{4}$. Тогава

$$MC = y + \frac{11}{2} = \frac{11 + \sqrt{905}}{4}.$$

8.6.18. (ТУ) Допирателните MA и MB към окръжност $k(O; R)$ сключват $\angle AMB = \alpha$.

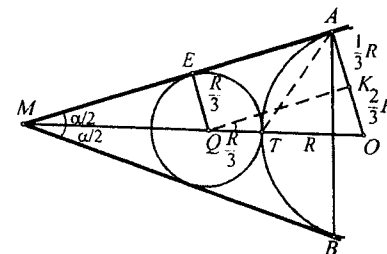
а) Намерете α , ако окръжността, която се допира до отсечките MA и MB и до k има радиус $R/3$. Докажете, че за така намерената стойност на α височините на $\triangle AMB$ се пресичат в точка от k .

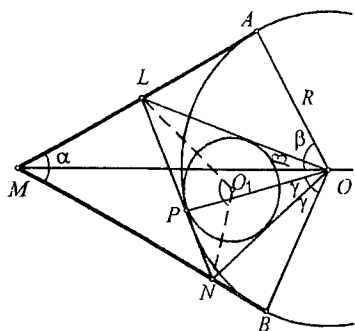
б) Допирателна към k пресича отсечките MA и MB съответно в точките L и N . Нека O_1 е центърът на вписаната в $\triangle OLN$ окръжност, а α е измежду стойностите, за които радиусът на описаната около $\triangle LO_1N$ окръжност е R . Намерете радиуса R_2 на описаната около $\triangle LON$ окръжност.

Решение: а) От правоъгълния $\triangle QOK$

$$\text{имаме: } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{2}{3}R}{\frac{4}{3}R} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\alpha}{2} = 30^\circ, \text{ т.е.}$$

$\alpha = 60^\circ$. Точката T от k е пресечна точка на ъглополовящите MT и AT , но $\triangle MAB$ е равнобедрен и тогава тя е и ортоцентър за $\triangle MAB$.





6) $\angle AOB = 180^\circ - \alpha$. Допирателните $LP = LA$, т.е. $\triangle LPO \cong \triangle LAO$ и $\angle LOP = \angle LOA$. Аналогично $NP = NB$ и $\angle NOP = \angle NOB$.

Тогава $\angle LON = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ и $\angle LO_1N = 90^\circ + \frac{\angle LON}{2} =$

$$= 135^\circ - \frac{\alpha}{4}.$$

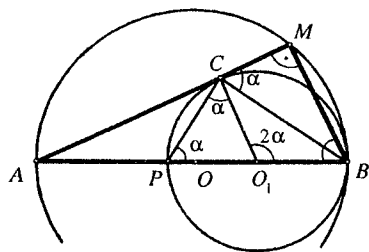
По условие радиусът на описаната около $\triangle LO_1N$ окръжност е R . Тогава

$$LN = 2R \sin \angle LO_1N = 2R \sin \left(135^\circ - \frac{\alpha}{4} \right). \text{ За описана}$$

та около $\triangle LON$ окръжност пресмятаме

$$R_2 = \frac{LN}{2 \sin \angle LON} = \frac{2R \sin \left(135^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)}{2 \sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{R \sin \left(45^\circ + \frac{\alpha}{4} \right)}{\cos \frac{\alpha}{2}}.$$

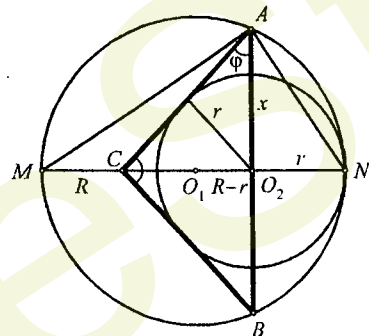
8.6.19. Две окръжности се допират вътрешно в точка B . Отсечката BA е диаметър на голямата окръжност. Хордата MA от голямата окръжност се допира до малката в точка C . Докажете, че BC е ъглополовяща на $\angle MBA$.



Доказателство: $\angle BCM = \angle BPC = \alpha$ (периферен и вписан). $\angle AMB = 90^\circ$ (AB е диаметър). Тогава $\angle CBM = 90^\circ - \alpha$. Аналогично $\angle PCB = 90^\circ$ и $\angle PBC = 90^\circ - \alpha$, т.е. CB е ъглополовяща.

8.6.20. В сектор с централен ъгъл 60° е вписан кръг с лице равно на π . Намерете радиуса на сектора. **Отг. 3.**

8.6.21. Две окръжности се допират вътрешно. През центъра на по-малката е построена права, перпендикулярна на централата им. През пресечните точки на тази права с голямата окръжност са построени допирателни към малката. Намерете ъгъла между тези допирателни, ако радиусите на двете окръжности се отнасят както 2:3.



Решение: $\triangle MAN$ е правоъгълен. За височината му имаме: $AO_2^2 = r(2R - r)$.

$$\sin \angle CAO_2 = \frac{r}{AO_2} = \frac{r}{\sqrt{r(2R - r)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2R}{r} - 1 \right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ясно е, че $\angle CAO_2 = 45^\circ$ и $\angle ACB = 90^\circ$.

8.6.22. Две окръжности се допират вътрешно. Права минава през центъра на малката окръжност и пресича голямата окръжност в точки A и D , а малката в B и C , като $AB:BC:CD = 2:4:3$. Намерете отношението на радиусите им.

Отг. 3:1.

8.6.23. Две окръжности с радиуси по 32 и с центрове O_1 и O_2 се пресичат, като делят отсечката O_1O_2 на три равни части. Намерете радиуса на окръжността, която се допира вътрешно до двете окръжности и до отсечката O_1O_2 .

Отг. 7.

8.6.24. Две окръжности се допират вътрешно и отношението на радиусите им е $9 + 4\sqrt{3}$. Две равни хорди от голямата окръжност се допират до малката, като едната от тях е перпендикулярна на централата. Намерете ъгъла между тези хорди.

Отг. $\pi/6$.

8.6.25. Дадени са две концентрични окръжности. Докажете, че сумата от квадратите на разстоянията от точка на едната окръжност до краищата на диаметър на другата окръжност не зависи от избора на точката.

8.7. СЕКТОРИ, СЕГМЕНТИ И ПОВЕЧЕ ОТ ДВЕ ОКРЪЖНОСТИ

Нека α е мярката на централния $\angle AOB$ в радиани, тогава дължината на дъгата $\widehat{AB}$ е $l = \alpha R$, а лицето на сектора AOB пресмятаме по формулата $S_{AOB} = \frac{lR}{2} = \frac{\alpha R^2}{2}$. Ще припомним, че $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ радиана.

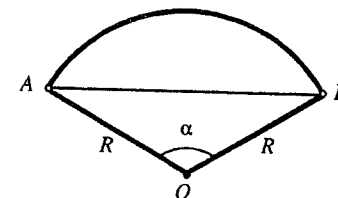
8.7.1. Периметърът на сектор е 28, а лицето му е 49. Намерете дължината на дъгата на сектора.

Решение: Ако мярката на централния $\angle AOB$ е α радиана, от условието имаме:

$$2R + \alpha R = 28 \text{ и } \frac{\alpha R^2}{2} = 49. \text{ От второто уравнение}$$

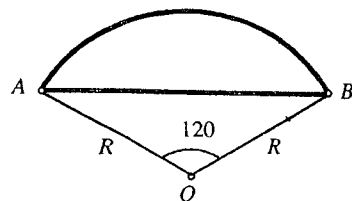
изразяваме $\alpha = \frac{98}{R^2}$ и след заместване в първото

получаваме $R^2 - 14R + 49 = 0$, откъдето намираме $R = 7$. Тогава $\alpha = 2$ и $|\widehat{AB}| = 2R = 14$.



8.7.2. Намерете лицето на сегмент, ако периметърът му е P , а дъгата - 120° .

Решение: Пресмятаме $AB = \sqrt{R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 120^\circ} = R\sqrt{3}$. Понеже $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, $|\widehat{AB}| = \frac{2\pi R}{3}$. От условието $P = R\sqrt{3} + \frac{2\pi R}{3}$ определяме $R = \frac{3P}{3\sqrt{3} + 2\pi}$.



Лицето на сегмента S ще пресметнем, като от лицето на сектора AOB извадим лицето на $\triangle AOB$.

Лицето на сектора е $S_1 = \frac{\alpha R^2}{2} = \frac{\pi R^2}{3}$, а на

$\triangle AOB$ — $S_2 = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3} R^2}{4}$. Лицето на сег-

мента е $S = S_1 - S_2 = \frac{R^2}{12} (4\pi - 3\sqrt{3})$ и като заместим R с неговото равно дости-

гаме до $S = \frac{3P^2 (4\pi - 3\sqrt{3})}{4(3\sqrt{3} + 2\pi)^2}$.

8.7.3. Диаметърът на окръжност с радиус R е основа на равнобедрен триъгълник. Намерете лицето на онази част от триъгълника, която е вън от окръжността.

Отг. $\frac{R^2}{6} (3\sqrt{3} - \pi)$.

8.7.4. В $\triangle ABC$ страната $AB = c$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$ (мерките на ъглите са в радиани). С център C е построена окръжност, която се допира до AB . Намерете дължината на дъгата от тази окръжност, заключена вътре в триъгълника.

Отг. $\frac{c \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} (\pi - \alpha - \beta)$.

8.7.5. В кръг с радиус R са построени от различни страни на центъра две успоредни хорди, едната от които стяга дъга от 60° , а другата — 120° . Намерете лицето на частта от кръга, заградена от хордите.

Отг. $\frac{\pi R^2}{2} (\pi - \sqrt{3})$.

8.7.6. Окръжност с радиус R е разделена на четири равни големи и четири два пъти по-малки дъги, които се редуват последователно. Намерете лицето на осмоъгълника с върхове точките на деление.

Отг. $R^2 (\sqrt{3} + 1)$.

8.7.7. Даден е ромб със страна a и остър ъгъл 60° . С диаметър големия диагонален е построена окръжност. Кое е по-малко: лицето на ромба или лицето на частта от кръга, лежаща извън ромба?

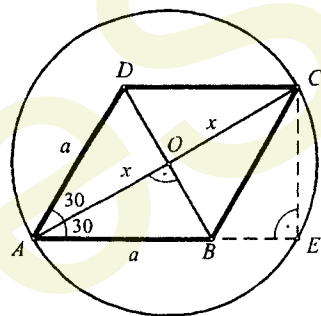
Решение: Ясно е, че $OA = a \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Тогава лицето на кръга е $S = \frac{3a^2\pi}{4}$, а лицето на

ромба е $S_{ABCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Лицето S_1 на външната част е

$S_1 = \frac{3a^2\pi}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{4} (3\pi - 2\sqrt{3})$.



Ако допуснем, че $S_1 \leq S_{ABCD}$, получаваме $\frac{3a^2\pi}{4} \leq a^2\sqrt{3}$, т.е. $\pi\sqrt{3} \leq 4$, но $\pi\sqrt{3} > 3\sqrt{3} > 5$. Противоречието показва, че лицето на ромба е по-малко.

8.7.8. Страната на равнобедрен триъгълник е a . Намерете лицето на частта от триъгълника, лежаща вън от кръг с радиус $\frac{a}{3}$ и с център — центърът на триъгълника.

Отг. $\frac{a^2}{18} (3\sqrt{3} - \pi)$.

8.7.9. Височините на равнобедрения $\triangle ABC$ са продължени до пресичането им с описаната окръжност с радиус R в точки K, L и M . Намерете лицето на частта от кръга извън $\triangle ABC$ и $\triangle KLM$.

Отг. $R^2 (\pi - \sqrt{3})$.

8.7.10. Намерете отношението на лицето на сектора с централен ъгъл 2α (радиана) към лицето на вписания в него кръг.

Решение: Лицето на сектора е

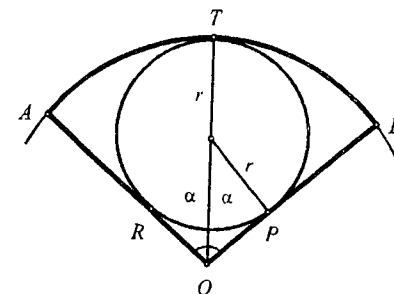
$S_c = \frac{\alpha R^2}{2}$. Радиуса на вписания в сектора

кръг пресмятаме от уравнението

$r = (R - r) \sin \alpha$. Получаваме $r = \frac{R \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$.

Търсеното отношение е:

$\frac{S_c}{S} = \frac{\alpha R^2 (1 + \sin \alpha)^2}{2\pi R^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\alpha (1 + \sin \alpha)^2}{2\pi \sin^2 \alpha}$.



8.7.11. В сектор с радиус 9 е вписана окръжност с радиус 3. Намерете периметъра на сектора.

Отг. $18 + 3\pi$.

8.7.12. Радиусът на сектор е R , а централният му ъгъл AOB е α . През средата C на радиуса OA е построена права, успоредна на OB и пресичаща дъгата AB в D . Намерете лицето на $\triangle OCD$.

Отг. $\frac{R^2 \sin \alpha}{8} (\sqrt{4 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha)$.

8.7.13. Дъгата AB на сектора AOB е α (радиани). През точката B и средата C на радиуса OA е прекарана права. В какво отношение тя дели лицето на сектора.

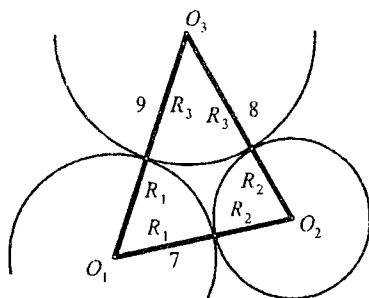
Отг. $\frac{\sin \alpha}{2\alpha - \sin \alpha}$.

8.7.14. Радиусът на сектора AOB е равен на R , а централният ъгъл AOB е равен на 2α . В този сектор е вписан правилен триъгълник така, че единият връх съвпада със средата на дъгата AB , а другите два върха лежат съответно на радиусите OA и OB . Намерете страната на триъгълника.

Отг. $\frac{R \sin \alpha}{\sin(\alpha + 30^\circ)}$.

8.7.15. В сегмент с централен ъгъл 120° е вписан равностранен триъгълник така, че единият от върховете му съвпада със средата на хордата на сегмента, а другите два върха лежат върху дъгата. Височината на триъгълника е h . Намерете радиуса на сегмента.

Отг. $\frac{2h}{3}(1+\sqrt{5})$.



8.7.16. Три окръжности се допират външно две по две. Разстоянията между центровете им са 7, 8 и 9. Намерете радиусите им.

Решение: Ясно е, че $R_1 + R_2 = 7$,

$R_2 + R_3 = 8$ и $R_3 + R_1 = 9$. Събираме трите

равенства почленно и получаваме:

$$2(R_1 + R_2 + R_3) = 24, \text{ т.е. } R_1 + R_2 + R_3 = 12.$$

$$\text{Тогава } R_1 = 12 - (R_2 + R_3) = 4, R_2 = 3, R_3 = 5.$$

8.7.17. Две еднакви окръжности се допират външно в точка C . Всяка от тях се допира външно до трета окръжност с радиус $\frac{13}{2}$ в точките A и B . Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако $AB = 5$.

Отг. $78/5$.

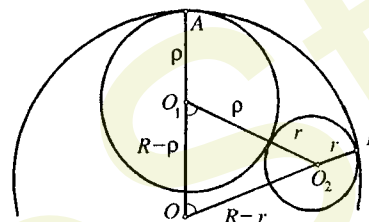
8.7.18. В ъгъл са вписани три окръжности – малка, средна и голяма. Голямата окръжност минава през центъра на средната, а средната през центъра на малката. Радиусът на малката окръжност е r , а разстоянието от центъра ѝ до върха на ъгъла е d . Намерете радиусите другите две.

Отг. $\frac{dr}{d-r}, \frac{d^2r}{(d-r)^2}$.

8.7.19. В ъгъл 60° са вписани пет кръга така, че всеки следващ се допира до предходния. Колко пъти сумата от лицата на всичките пет кръга е по-голяма от лицето на най-малкия?

Отг. 7381.

8.7.20. Две окръжности се допират външно помежду си и вътрешно до трета. Триъгълникът с върхове центровете на окръжностите е равнобедрен и е с периметър $2p$. Намерете бедрото на триъгълника, ако ъгълът при основата е по-голям от 70° , а радиусът на най-малката окръжност е r .



Решение: Имаме $OO_1 = R - p$ и

$OO_2 = R - r$. Ясно е, че $OO_1 < OO_2$. Ако до-

пуснем, че основа на триъгълника е OO_2 , ще излезе, че срещу OO_1 стои по-голям ъгъл от този срещу OO_2 . Разбираме, че основата е OO_1 и $OO_2 = O_1O_2$. От условието $OO_1 + O_1O_2 + OO_2 = 2p$ или $R - p + R - r + p + r = 2p$ намираме $R = p$. Тогава $OO_2 = R - r = p - r$.

8.7.21. Две еднакви окръжности $k_1(O_1, r)$ и $k_2(O_2, r)$ се допират външно помежду си и вътрешно с трета окръжност k с радиус R . Намерете радиуса на окръжност, допираща се до k, k_1 и k_2 . (Разгледайте само случая, когато центърът на четвъртата окръжност и центърът на k са в различни полуравнини спрямо O_1O_2 .)

Отг. $R \frac{R-r-\sqrt{R^2-2Rr}}{R+r-\sqrt{R^2-2Rr}}$.

8.7.22. В полуокръжност с диаметър $AB = 2R$ е вписана окръжност с радиус $R/2$. Намерете радиуса на окръжността, допираща се до двете окръжности и до AB .

Отг. $R/4$.

8.7.23. В полуокръжност с радиус R са вписани две окръжности, допиращи се една до друга, до полуокръжността и до нейния диаметър. Намерете техните радиуси, ако отношението им е 9:2.

Отг. $R/4, R/18$.

8.7.24. На отсечката AC е взета точка B , като $AB = 14$ и $BC = 28$. С диаметри AB, BC и AC са построени полуокръжности в една и съща полуравнина относно AC . Намерете радиуса на окръжност, допираща се до тези три полуокръжности.

Отг. 6.

8.7.25. В сегмент с радиус R и централен ъгъл $\alpha (\alpha < \pi)$ са вписани две еднакви окръжности, допиращи се помежду си, до дъгата и до хордата на сегмента. Намерете радиусите им.

Отг. $4R \cos \frac{\alpha}{4} \cos^2 \frac{\alpha}{8}$.

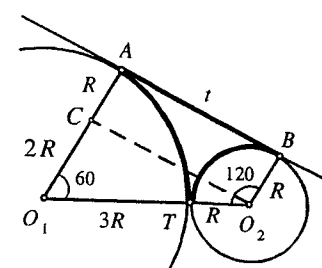
8.8. КРИВОЛИНЕЙНИ ФИГУРИ

8.8.1. Две окръжности с радиуси R и $3R$ се допират външно. Намерете лицето на фигурата, заключена между окръжностите и тяхната обща външна допирателна.

Решение: Общата външна допирателна $AB = 2R\sqrt{3}$, а $\angle AO_1O_2 = 60^\circ$.

Лицето S на трапеца AO_1O_2B е

$$S = \frac{3R + R}{2} \cdot 2R\sqrt{3} = 4R^2\sqrt{3}.$$



Лицето на сектора от голямата окръжност е $S_1 = \frac{1}{2} \pi (3R)^2 = \frac{3\pi R^2}{2}$, а на сектора от малката окръжност е $S_2 = \frac{1}{2} \pi R^2 = \frac{\pi R^2}{2}$.

Търсеното лице е $S^* = S - S_1 - S_2 = \frac{R^2}{6} (24\sqrt{3} - 11\pi)$.

8.8.2. Две окръжности се допират външно. Техните радиуси се отнасят както 3:1, а общата им външна допирателна е $6\sqrt{3}$. Намерете периметъра на фигурата, образувана от двете външни допирателни и двете външни части от окръжностите.

Отг. $12\sqrt{3} + 14\pi$.

8.8.3. Разстоянието между центровете O_1 и O_2 на две външно допиращи се в точка E окръжности е d . AC е общата им външна допирателна, а $\angle AO_1O_2 = 2\alpha$. Намерете лицето на криволинейния триъгълник $AC\widehat{CE}EA$.

Отг. $\frac{d^2}{8} \left[4\sin\alpha - \pi(1 + \sin^2\alpha) + 4\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\alpha \right]$.

8.8.4. Две окръжности с различни радиуси се допират външно в точка A . AB е диаметър на по-малката окръжност, а AD на по-голямата окръжност. През B са прекарани допирателните BM и BN към голямата окръжност. Правата MA пресича по-малката окръжност в точка K . Ако $MK = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ и $\angle BMA = 15^\circ$, намерете лицето на фигурата $MBN\widehat{NDM}$.

Решение: Периферният $\angle BMA = 15^\circ$, следователно $\angle MO_1A = 30^\circ$, $O_1B = 2MB$ и $MN = R$. AB е диаметър,

$$\angle MKB = 90^\circ, MB = \frac{MK}{\cos 15^\circ} \text{ и от } \triangle O_1MB \text{ пре-}$$

$$\text{смятаме } R = MB \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{MK}{\cos 15^\circ} \cdot \sqrt{3}. \text{ Тогава}$$

$$S_{O_1MBN} = 2S_{O_1MB} = R \cdot MB = \frac{MK^2 \sqrt{3}}{\cos^2 15^\circ}. \text{ Лицето } Q \text{ на}$$

сектора $MO_1N\widehat{NDM}$ е $Q = \frac{1}{2} \frac{5\pi}{3} R^2 = \frac{5\pi}{6} R^2$. Лицето S на фигурата $MBN\widehat{NDM}$ е

сума от лицата на четириъгълника и сектора:

$$S = \frac{MK^2 \sqrt{3}}{\cos^2 15^\circ} + \frac{5MK^2 \pi}{2 \cos^2 15^\circ} = \frac{MK^2}{2 \cos^2 15^\circ} (2\sqrt{3} + 5\pi), \text{ но } \cos^2 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \frac{1}{4} (2 + \sqrt{3}).$$

Тогава $S = 4\sqrt{3} + 10\pi$.

8.8.5. Две окръжности с радиуси R и r се допират външно. Построена е обща външна допирателна и в така образувания криволинейен триъгълник е вписан кръг. Намерете лицето му.

Отг. $\frac{\pi R^2 r^2}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^4}$.

8.8.6. Дъгата OK от окръжност с център A и радиус R разделя правоъгълния сектор AOB с радиус R на две части. Намерете радиусите на окръжностите, вписани в двете части на сектора, и периметъра на криволинейния триъгълник $OB\widehat{BK}KO$.

Решение: От $\triangle OO_1C$ имаме:

$$(R-x)^2 = x^2 + \frac{R^2}{4}, \text{ т.е. } x = \frac{3}{8}R.$$

За да намерим радиуса на най-малката окръжност пресмятаме централите

$AO_2 = R + y$ и $OO_2 = R - y$. От $\triangle AO_2E$ нами-

раме $EO_2^2 = (R + y)^2 - (R - y)^2$, а от $\triangle OO_2E$

$EO_2^2 = (R - y)^2 - y^2$. Като извадим от едното

равенство другото, получаваме $R^2 - 6Ry = 0$,

т.е. $y = \frac{R}{6}$. Ясно е, че $\triangle OKA$ е равностранен, периметърът на фигурата е

$$P = OB + |BK| + |KO| = R + \frac{\pi}{6}R + \frac{\pi}{3}R = \frac{\pi + 2}{2}R.$$

8.8.7. Центровете на четири кръга с радиуси a са разположени във върховете на квадрат със страна a . Намерете лицето на общата им част.

Решение: Означаваме лицето на

$AB\widehat{BK}KA$ с S . Търсеното лице е

$$X = a^2 - 4S; S = S(AB\widehat{BK}KA) - S(BK\widehat{KB}).$$

$$S(AB\widehat{BK}KA) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} a^2; S(BK\widehat{KB}) =$$

$$= S(BCK\widehat{KB}) - S_{\triangle BCK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} a^2 - \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}. \text{ Тогава}$$

$$S = \frac{\pi a^2}{12} - \left(\frac{\pi a^2}{6} - \frac{\sqrt{3} a^2}{4} \right) = \frac{a^2}{12} (3\sqrt{3} - \pi).$$

$$\text{Намираме } X = a^2 \left(1 - \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} \right).$$

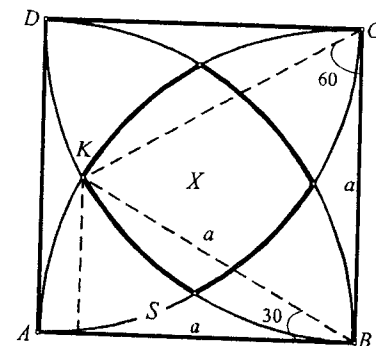
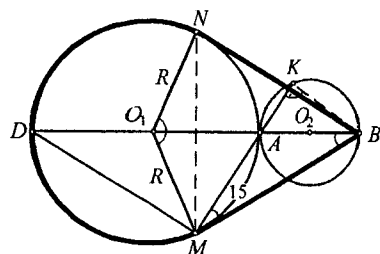
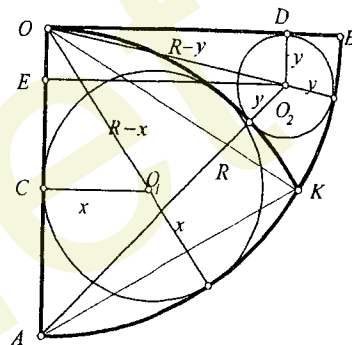
8.8.8. В квадрат със страна a са построени полуокръжности с диаметри всяка от страните на квадрата. Намерете лицето на частите (розетката), заградени от техните дъги.

Отг. $\frac{a^2}{2} (\pi - 2)$.

8.8.9. Върховете на квадрат със страна $a = 22(\sqrt{2} - 1)$ са центрове на окръжности с $R = 11(\sqrt{2} - 1)$. Намерете радиуса на голямата окръжност, допираща се до всички окръжности.

Отг. 11.

8.8.10. В ромб $ABCD$ със страна $AB = 3a$ и $\angle DAB = 60^\circ$. Точките O_1 и O_2 са на AC , като $3AO_1 = AC$ и $3CO_2 = AC$. Намерете лицето на частта от ромба, лежаща извън окръжностите k_1 и k_2 с центрове точките O_1 и O_2 и радиуси a .

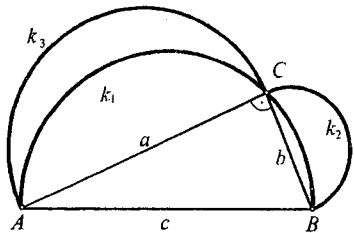


Отг. $a^2(3\sqrt{3}-\pi)$.

8.8.11. В окръжност с радиус R са вписани четири еднакви окръжности, всяка от които се допира вътрешно с дадената и външно с по две съседни. Намерете лицето на фигурата, ограничена от тези четири окръжности.

Отг. $R^2(3-2\sqrt{2})(4-\pi)$.

8.8.12. (Месечини на Хипократ) С диаметър хипотенузата AB на $\triangle ABC$ е описана полуокръжност k_1 ($C \in k_1$). Върху BC и AC са построени нови две полуокръжности k_2 и k_3 (от едната страна на AB). Докажете, че сумата от лицата на двете лещи, заградени от k_1 и k_2 , и k_1 и k_3 е равна на лицето на правоъгълния триъгълник.

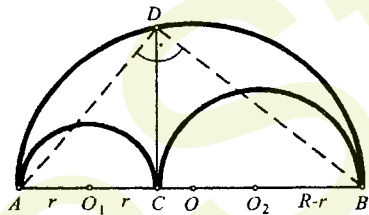


Доказателство: За да получим сумата от лицата на двете лещи, трябва от сумата на лицето на $\triangle ABC$ и лицата на двата полукръга с диаметри a и b да извадим лицето на полукръга с диаметър c . Намираме:

$$S_1 + S_2 = \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[ab + \pi\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}\right)\right] = \frac{ab}{2}.$$

8.8.13. Около квадрат е описана окръжност k . С диаметри страните на квадрата, извън него, са построени четири полуокръжности. Докажете, че сумата от лицата, заградени от k и тези полуокръжности е равна на лицето на квадрата.

8.8.14. (Обущарски нож) В правоъгълния $\triangle ABD$ ($D = 90^\circ$) CD е височина. С диаметри AB , AC , BC са построени три полуокръжности (от една полуравнина спрямо AB). Докажете, че лицето на криволинейния триъгълник, заграден от трите полуокръжности е равно на лицето на кръга с диаметър CD .



Доказателство: Означаваме $AC = 2r$, $AB = 2R$. Тогава $S(\widehat{ACCBBAA}) =$

$$= \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi(R-r)^2}{2} = \pi(Rr - r^2).$$

Височината $CD^2 = 2r \cdot 2(R-r)$, а лицето е

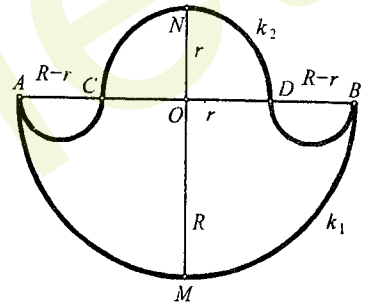
$$S_1 = \frac{\pi d^2}{4} = \pi(Rr - r^2).$$

8.8.15. В окръжност с радиус R са вписани шест еднакви окръжности, всяка от които се допира вътрешно до дадената окръжност и външно до две съседни. Намерете лицето на фигурата, ограничена от шестте окръжности.

Отг. $\frac{2R^2}{9}(3\sqrt{3}-\pi)$.

8.8.16. (Солница) Докажете, че лицето на криволинейния четириъгълник $\widehat{ABBDDCCCA}$ от фигурата е равно на лицето на кръга с диаметър MN .

Доказателство: Означаваме $OM = R$ и $OD = r$. Лицето на криволинейния четириъгълник е $S = \frac{1}{2}\pi R^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R-r}{2}\right)^2$. Като извършим необходимите преобразувания получаваме $S = \frac{\pi(R+r)^2}{4} = \pi\left(\frac{MN}{2}\right)^2$.



8.8.17. Две окръжности с радиуси R се пресичат така, че всяка от тях минава през центъра на другата. Други две окръжности със същия радиус имат за центрове пресечните точки на първите две. Намерете лицето на общата част на тези четири кръга.

Отг. $\frac{R^2}{6}(2\pi - 3\sqrt{3})$.

8.8.18. В равностранен триъгълник със страна a са разположени три еднакви окръжности, всяка от които се допира до две страни на триъгълника и до другите две окръжности. Намерете лицето на частта от триъгълника, разположен извън окръжностите.

Отг. $\frac{a^2}{8}(2\sqrt{3} - 6\pi + 3\pi\sqrt{3})$.

8.8.19. В окръжност с радиус R са вписани три еднакви окръжности, които се допират вътрешно до нея и външно помежду си. Намерете лицето на фигурата, ограничена от трите еднакви окръжности.

Отг. $\frac{R^2}{2}(42\sqrt{3} - 72 - 21\pi + 12\pi\sqrt{3})$.

8.8.20. Окръжност с радиус R и център O е разделена от точките A, B, C, D, E и F на шест равни части. Определете лицето на фигурата COE , ограничена от дъгата OC с център в точката B , дъгата OE с център в точката F и дъгата CE с център в точката A .

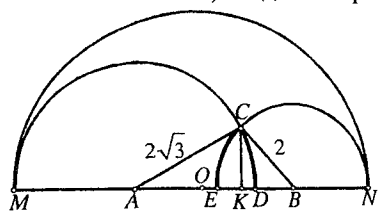
Отг. $\pi R^2/6$.

8.8.21. Върху отсечката MN са взети точките A и B , като $MA = 2\sqrt{3}$, $AB = 4$ и $BN = 2$. Построени са полуокръжностите: k с диаметър MN ; k_1 с център A и радиус AM ; k_2 с център B и радиус BN , като всичките полуокръжности са в една полуравнина спрямо MN .

а) Намерете лицето U на частта, ограничена от k, k_1 и k_2 .

б) Намерете радиуса на окръжност, която се допира вътрешно до k и външно до k_1 и k_2 .

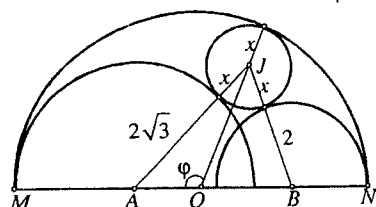
Решение: а) За да намерим лицето на търсената част U трябва от лицето на k да извадим лицата на k_1 и k_2 и да прибавим лицето Q на общата им част DCE .



Имаме $AB^2 = 4^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2$, следователно $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $CK = \sqrt{3}$, $AK = 3$ и $BK = 1$. Лицето S на $\triangle ABC$ е сумата на лицата S_1 и S_2 на секторите ACD и BCE минус лицето Q на общата им част: $S = S_1 + S_2 - Q$, т.е. $Q = S_1 + S_2 - S$.

$$S_1 = \frac{\pi (2\sqrt{3})^2}{6} = \pi, S_2 = \frac{\pi 2^2}{3} = \frac{2\pi}{3}, S = 2\sqrt{3}. \text{ Тогава } Q = \pi + \frac{2\pi}{3} - 2\sqrt{3} = \frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{3}.$$

Пресмятаме търсеното лице U : $U = \frac{\pi ON^2}{2} - \frac{\pi AM^2}{2} - \frac{\pi BN^2}{2} + Q$. Като заместим ON , AM и BN с техните равни получаваме $U = \left(3\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right)\pi - 2\sqrt{3}$.



б) Разглеждаме $\triangle ABJ$. Ако означим търсения радиус с x имаме: $AJ = 2\sqrt{3} + x$, $BJ = 2 + x$ и $OJ = R - x = 3 + \sqrt{3} - x$.

Пресмятаме $AO = 3 - \sqrt{3}$, $BO = \sqrt{3} + 1$. Прилагаме косинусова теорема за $\triangle JBO$ и

$$\triangle JAO: \begin{cases} (2+x)^2 = OJ^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2OJ(1+\sqrt{3})\cos(180^\circ - \varphi) \\ (2\sqrt{3}+x)^2 = OJ^2 + (3-\sqrt{3})^2 - 2OJ(3-\sqrt{3})\cos \varphi \end{cases}$$

Като изключим OJ получаваме $x = \frac{1}{11}(5\sqrt{3} + 3)$.

8.8.22. В полуокръжност с диаметър $AB = 2R$ са вписани две полуокръжности с диаметри върху AB и радиуси $\frac{1}{2}R$. Четвърта окръжност се допира до първите три. Намерете сумата от лицата на криволинейните триъгълници, заградени от тези окръжности.

Отг. $\frac{5}{36}\pi R^2$.

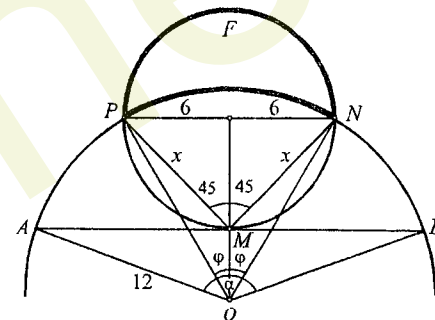
8.8.23. В равностранен $\triangle ABC$ със страна 2 е вписан кръг. Построен е втори кръг с център A и радиус 1. Намерете лицето на общата част на двата кръга.

Отг. $\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{18}$.

8.8.24. Даден е $\triangle ABC$ със страни $BC = a$, $CA = a\sqrt{3}$ и $AB = a\sqrt{1+\sqrt{3}}$. Докажете, че $\angle C = 2\angle A$. Построени са окръжност k с център A и радиус AC и окръжност n с център B и радиус BC . Намерете лицето на лещата, заградена от k и n .

Отг. $\frac{1}{2}a^2\sqrt{6\sqrt{3}}$.

8.8.25. В кръгов сегмент с радиус 12 и централен ъгъл α ($\cos \alpha = 1 - \sqrt{3}$) е вписан равнобедрен правоъгълен триъгълник така, че върхът на правия му ъгъл съвпада със средата на хордата на сегмента, а другите му два върха лежат върху дъгата. Около този триъгълник е описана окръжност. Намерете лицето на лещата, заградена от тази окръжност и дъгата на изреза.



Решение: Ясно е, че PN е диаметър. Лицето на лещата ще получим като от лицето на полуокръгъа PNF извадим лицето на сегмента $PNMP$, а лицето на $PNMP$ ще пресметнем като от лицето на сектора OPN извадим лице-

то на $\triangle OPN$. Имаме: $OM = R \cos \frac{\alpha}{2}$, но $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)^2$ или $OM = 6(\sqrt{3} - 1)$. От косинусова теорема за $\triangle OMN$

$$ON^2 = MN^2 + OM^2 - 2MN \cdot OM \cos 135^\circ, \quad 12^2 = x^2 + 36(\sqrt{3} - 1)^2 + 6x(\sqrt{3} - 1)\sqrt{2}.$$

Получаваме $x = 6\sqrt{2}$. Тогава $PN = x\sqrt{2} = 12$, т.е. $\angle NOP = 60^\circ$.

Лицето на сектора OPN е $S_1 = \frac{\pi 12^2}{3} = 24\pi$, а $S_{\triangle OPN} = \frac{12^2 \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$. Лицето на лещата е $Q = \frac{\pi 6^2}{2} - (24\pi - 36\sqrt{3}) = 36\sqrt{3} - 6\pi = 6(6\sqrt{3} - \pi)$.

8.8.26. Два концентрични кръга заграждат кръгов пръстен (слой), равнолицев с малкия кръг. Докажете, че частта от пръстена, заградена от две успоредни допирателни към малкия кръг е равнолицева с квадрата, вписан в него.

9. ПЛАНИМЕТРИЯ И ТРИГОНОМЕТРИЯ

9.1. КОСИНУСОВА ТЕОРЕМА

За всеки триъгълник е изпълнено: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$. Това твърдение наричаме **косинусова теорема**. С нея решаваме следните две основни задачи:

I основна задача: По дадени три страни на триъгълник a , b и c да се намерят ъглите му (триъгълникът е определен с точност до еднаквост по трети признак и можем да намерим произволен негов елемент).

Решение: Пресмятаме $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Задачата има решение само ако $\left| \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right| < 1$, което е равносилно с $|a - b| < c < a + b$ – условие за съществуване на триъгълник.

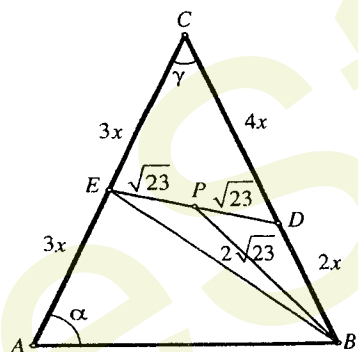
II основна задача: По дадени две страни и ъгъл между тях да се намери третата страна (сега триъгълникът е определен по първи признак).

Решение: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$.

9.1.2. В $\triangle ABC$ $BC = 4$, $AB + AC = 6$. Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако $\cos \angle ACB = \frac{5}{12}$. **Отг.** $\frac{5}{13} \sqrt{119}$.

9.1.3. В успоредника $ABCD$ $AB = 2\sqrt{7}$, $AD = \sqrt{7}$ и $\angle DAB = 60^\circ$. Намерете диагонала AC . **Отг.** 7.

9.1.4. В равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) на BC е взета точка D ($CD:DB = 2:1$), а E е средата на AC . Медианата BP на $\triangle BED$ и отсечката DE са равни на $2\sqrt{23}$. Намерете радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.



Решение: Нека $DB = 2x$, тогава $DC = 4x$, $AE = CE = 3x$. По косинусова теорема за

$\triangle DEC$ имаме $\cos \gamma = \frac{(3x)^2 + (4x)^2 - 4.23}{2.3x.4x}$ или

$\cos \gamma = \frac{25x^2 - 92}{24x^2}$. От $\triangle BEC$ намираме

$BE^2 = 9x^2 + 36x^2 - 2.3x.6x. \frac{25x^2 - 92}{24x^2} = \frac{15x^2 + 276}{2}$.

По формулата за медиана: $4BP^2 = 2BE^2 + 2BD^2 - ED^2$ или

$4.92 = 2. \frac{15x^2 + 276}{2} + 2.4x^2 - 92$. Получаваме $x = 2\sqrt{2}$ и $CA = CB = 12\sqrt{2}$ и

пресмятаме $\cos \gamma = \frac{9}{16}$ и $\sin \gamma = \frac{5\sqrt{7}}{16}$. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos \gamma = 2AC^2(1 - \cos \gamma)$ или $AC = 6\sqrt{7}$.

По синусова теорема $R = \frac{AB}{2\sin \gamma}$, т.е. $R = \frac{48}{5}$.

9.1.5. На окръжност k с център O е взета точката A . Точка B е средата на OA , а M е произволна точка от k . Намерете най-голямата стойност на $\angle OMB$.

Отг. 30° .

9.1.6. В $\triangle ABC$ $BC = 4$, $AC = 3$. Точка P лежи вътре в триъгълника, като $AP + BC = BP + CA = CP + AB$. Да се намерят разстоянията от P до върховете на $\triangle ABC$.

Решение: Означаваме $AP = x$, $BP = x + 1$, $CP = x - 1$. По косинусова теорема за $\triangle APC$ и $\triangle BPC$

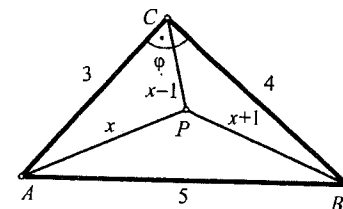
$$\begin{cases} x^2 = 3^2 + (x-1)^2 - 2.3(x-1)\cos \alpha \\ (x+1)^2 = 4^2 + (x-1)^2 - 2.4(x-1)\cos(90^\circ - \alpha) \end{cases}$$

От тази система определяме $\cos \alpha = \frac{5-x}{3(x-1)}$

и $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{4-x}{2(x-1)}$. Но

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ или $\frac{(4-x)^2}{4(x-1)^2} + \frac{(5-x)^2}{9(x-1)^2} = 1$, откъдето пресмятаме $x = \frac{52}{23}$ и

$CP = \frac{29}{23}$.



9.1.7. Страните на успоредника $ABCD$ са $AB = 6$, $BC = 4$, а M е среда на AB . Намерете лицето на $ABCD$, ако $\angle CMD = 45^\circ$. **Отг.** 7.

9.1.8. Страните на успоредник $ABCD$ са $AB = a$ и $CD = b$ ($a > b$), а M е среда на AB . Намерете S_{ABCD} , ако $\angle CMD = \varphi$. **Отг.** $(4b^2 - a^2) \operatorname{tg} \varphi / 4$.

9.1.9. Страните на успоредник $ABCD$ са $AB = a$ и $CD = b$ ($a > b$). Намерете AC , ако $\angle ABD = \alpha$ и $\angle ADB > 90^\circ$.

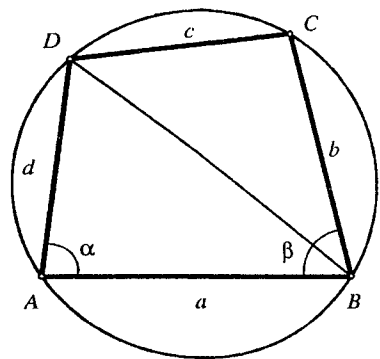
Отг. $\sqrt{a^2 + b^2 + 2a(\cos \alpha \sqrt{b^2 - a^2 \sin^2 \alpha} + a \sin^2 \alpha)}$.

9.1.10. Дадени са двете страни a , b ($a > b$) на успоредник и височината h към по-голямата страна. Намерете тангенса на острия ъгъл между диагонали-те на успоредника. **Отг.** $2ah / (a^2 - b^2)$.

9.1.11. Дължините на страните и диагоналите на успоредник са съответно a , b , d и f . Намерете ъглите на успоредника, ако $a^4 + b^4 = d^2 f^2$.

Отг. $45^\circ, 135^\circ$.

9.1.12. Даден е вписан четириъгълник $ABCD$ със страни $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $DA = d$. Намерете лицето на четириъгълника.



Решение: Прилагаме косинусова теорема за BD в $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$.

$$\begin{cases} BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A \\ BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(180^\circ - A) \end{cases} \quad \text{От тази}$$

$$\text{система намираме } \cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}.$$

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{ABD} + S_{BCD} = \\ &= \frac{1}{2}ad \sin A + \frac{1}{2}bc \sin(180^\circ - A) = \\ &= \frac{1}{2} \sin A (ad + bc). \end{aligned}$$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{(2ad + 2bc)^2 - [(a^2 + d^2) - (b^2 + c^2)]^2}{4(ad + bc)^2}. \quad \text{Преобразуваме чис-$$

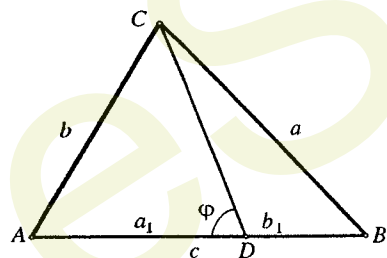
$$\begin{aligned} \text{лителя: } & [2ad + 2bc - (a^2 + d^2) + (b^2 + c^2)] \cdot [2ad + 2bc + (a^2 + d^2) - (b^2 + c^2)] = \\ & = [(b + c)^2 - (a + d)^2] \cdot [(a + d)^2 - (b - c)^2] = \\ & = (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d). \end{aligned}$$

$$\text{Нека } 2p = a + b + c + d, \text{ тогава } \sin A = \frac{\sqrt{(2p - 2d)(2p - 2c)(2p - 2b)(2p - 2a)}}{2(ad + bc)} \text{ и}$$

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

9.1.13. $\triangle ABC$ е равностранен, $AB = a$. Окръжност с център, лежащ на страната BC се допира до AB и разполовява AC . Намерете разстоянието от центъра на окръжността до най-близкия връх на $\triangle ABC$. **Отг.** $a(\sqrt{6} - 2)$.

9.1.14. В $\triangle ABC$ е известно, че $\sin C = k^2$ и $a^2 - b^2 = q^2$. Намерете лицето на триъгълника. **Отг.** $\sqrt{4k^4 - q^4}/4$.



9.1.15. В $\triangle ABC$ със страни $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ върху страната AB е взета точка D , като $AD = a_1$ и $BD = b_1$. Докажете, че $CD^2 \cdot c + a_1 b_1 c = a^2 a_1 + b^2 b_1$ (формула на Стюарт).

Доказателство: Прилагаме косинусова теорема за $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$:

$$b^2 = a_1^2 + CD^2 - 2a_1 \cdot CD \cos \varphi,$$

$a^2 = b_1^2 + CD^2 - 2b_1 \cdot CD \cos(180^\circ - \varphi) = b_1^2 + CD^2 + 2b_1 \cdot CD \cos \varphi$. Умножаваме първото равенство с b_1 , а второто с a_1 и ги събираме.

Чрез тази формула могат да се получат формулите за медиана, ъглополовяща и др.

9.1.16. В тъпоъгълен $\triangle ABC$ най-голямата страна е равна на 18, а най-малката – на 6. Може ли лицето на $\triangle ABC$ да е равно на 51? **Отг.** Не.

9.1.17. В $\triangle ABC$ $\angle BAC = 75^\circ$, $AB = c$, $AC = b$. На страната BC е взета точка M така, че $\angle BAM = 30^\circ$. AM пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точката N . Намерете дължината на AN . **Отг.** $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}(b + c\sqrt{2})$.

9.1.18. (ВУЗ) Дължините на страните BC , AC и AB на $\triangle ABC$, взети в този ред, образуват аритметична прогресия.

а) Изразете лицето на $\triangle ABC$ като функция на $BC = a$, ако $\angle ACB = \frac{2\pi}{3}$.

б) Ако $\angle BAC = \frac{5\pi}{8}$, $\angle ABC = \frac{\pi}{8}$, докажете че $a^2 + b^2 + c^2 = 12S$.

Отг. а) $5\sqrt{3}a^2/8$.

9.1.19. (СУ) Точка M е медицентър на $\triangle ABC$ с лице S и страни $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$. A_1 и B_1 са средите на страните BC и CA , а $\angle ACB = \gamma$, $\angle AMB = \gamma_1$.

а) Намерете ъгъл γ_1 , ако $3S = AA_1 \cdot BB_1$.

б) Докажете, че $\cot \gamma - \cot \gamma_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6S}$.

Отг. а) 30° или 150° .

9.2. СИНУСОВА ТЕОРЕМА

За всеки триъгълник е изпълнено $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$ (синусова теорема). С нейна помощ решаваме две основни задачи:

I основна задача: В $\triangle ABC$ са дадени $BC = a$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$. Намерете останалите страни и лицето на $\triangle ABC$.

Решение: Имаме $\frac{b}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$ или $b = a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$. Аналогично $c = a \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$.

$$\text{Лицето е } S = \frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin[180^\circ - (\beta + \gamma)]} = \frac{a^2 \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)}.$$

II основна задача: В $\triangle ABC$ са дадени $BC = a$, $CA = b$ ($a > b$) и $\angle BAC = \alpha$. Намерете синуса на $\angle ABC = \beta$.

Решение: $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{a}$; $\sin \beta = \frac{b}{a} \sin \alpha$.

В интервала $(0^\circ; 180^\circ)$ имаме две решения: β и $180 - \beta$, но по условие $a > b$. Следователно решение е само острият ъгъл β .

9.2.1. В $\triangle ABC$ $\alpha = 2\beta$, $BC = 12$ и $AB = 8$. Намерете AC . **Отг.** 10.

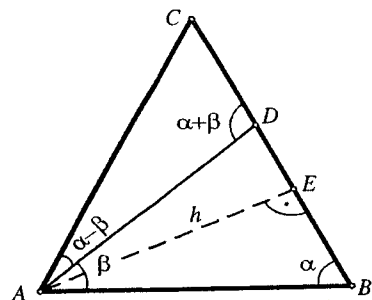
9.2.2. В $\triangle ABC$ $\alpha : \gamma = 3 : 2$, $AB = 28$, $BC = 33$. Намерете $\cos \frac{\gamma}{2}$. **Отг.** $\frac{7}{8}$.

9.2.3. В $\triangle ABC$ $AB = 28$, $BC = 30$ и $AC = 26$, CD е височина, а E е среда на AC . Намерете радиуса на описаната около $\triangle CDE$ окръжност.

Отг. $\frac{169}{100}$.

9.2.4. В окръжност с радиус R са построени две пресичащи се и перпендикулярни хорди AB и CD . Докажете, че $AC^2 + BD^2 = 4R^2$.

9.2.5. В равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) $\angle CAB = \alpha$. Права минава през A и сключва ъгъл β ($\beta < \alpha$) с AB . В какво отношение тази права дели лицето на триъгълника.



Решение: $\frac{S_{ADC}}{S_{ABD}} = \frac{DC}{DB}$. Имаме:

$$\frac{DC}{DB} = \frac{DC}{DA} \cdot \frac{DA}{DB}. \text{ По синусова теорема за } \triangle ADC:$$

$$\frac{DC}{DA} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin 2\alpha}.$$

$$\text{Аналогично от } \triangle ADB: \frac{DA}{DB} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \text{ Тогава}$$

$$\frac{S_{ADC}}{S_{ABD}} = \frac{\sin(\alpha - \beta) \sin \alpha}{\sin 2\alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{2 \cos \alpha \sin \beta}.$$

9.2.6. Хордите $AB = 2$ и $AC = 1$ от една окръжност сключват $\angle CAB = 120^\circ$. Намерете дължината на хордата AL , разполовяваща $\angle CAB$. **Отг.** 3.

9.2.7. В $\triangle ABC$ $CA:CB = 1:2$. Точките M и N от AB са такива, че CM и CN делят $\angle C$ на три равни части. Намерете $CN:CM$. **Отг.** $(3\sqrt{3} - 4):1$.

9.2.8. В $\triangle ABC$ $\angle CAB = \alpha$. През средата D на AB е построена права, пресичаща AC в точка E . В какво отношение DE дели лицето на $\triangle ABC$, ако $\angle DEA = \varphi$ и $2AE > AC$. **Отг.** $\frac{3 \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \alpha}$.

9.2.9. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ CM ($M \in AB$) пресича BD в точка K . Ако $CK:KM = 2:1$, $CB:BK = 5:3$ и $\angle ADB + \angle ACB = 180^\circ$, намерете отношението $AD:AC$. **Отг.** $\frac{5}{9}$.

9.2.10. В окръжност с радиус 13 е вписан четириъгълник с ъгъл 60° между диагоналите AC и BD . Ако $AC = 10$, $BD = 24$, намерете най-голямата страна на четириъгълника. **Отг.** $13(\sqrt{6} + \sqrt{2})/2$.

9.2.11. Диагоналите на изпъкналия четириъгълник $ABCD$ се пресичат в точка O . Ако радиусите на окръжностите, описани около AOB , BOC , COD и DOA са R_1 , R_2 , R_3 и R_4 , докажете, че в $ABCD$ може да се впише окръжност тогава и само тогава, когато $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$.

9.2.12. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. През пресечната точка E на диагоналите му е построена отсечка FH ($F \in AB$, $H \in CD$). Докажете, че $\frac{EF}{EH} = \sqrt{\frac{AF \cdot BF}{CH \cdot DH}}$.

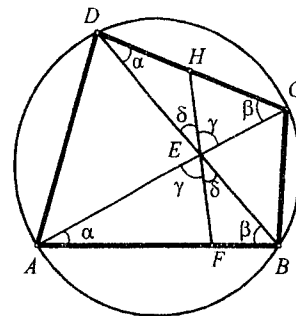
Доказателство: Означаваме равните вписани ъгли с α и β , а равните върхни ъгли с γ и δ . По синусова теорема имаме:

$$\frac{AF}{EF} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \text{ и}$$

$$\frac{BF}{EF} = \frac{\sin \delta}{\sin \beta}, \text{ т.е. } \frac{AF \cdot BF}{EF^2} = \frac{\sin \gamma \cdot \sin \delta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

По същия начин получаваме, че $\frac{CH \cdot DH}{EH^2} = \frac{\sin \gamma \cdot \sin \delta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$.

Виждаме, че $\frac{AF \cdot BF}{EF^2} \cdot \frac{EH^2}{CH \cdot DH} = 1$, с което доказахме, че $\frac{EF}{EH} = \sqrt{\frac{AF \cdot BF}{CH \cdot DH}}$.



9.2.13. Точката M е от вътрешността на остър ъгъл AOB с големина φ и е на разстояния a и b от раменете OA и OB . Намерете OM .

Решение: Около $OAMB$ може да се опише окръжност с диаметър OM . По синусова теорема за $\triangle OAB$ имаме:

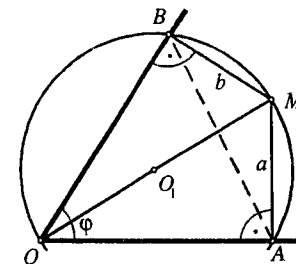
$$OM = \frac{AB}{\sin \varphi}.$$

По косинусова теорема за $\triangle ABM$:

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \varphi) \text{ или}$$

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi}.$$

$$OM = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi}}{\sin \varphi}.$$



9.2.14. В $\triangle ABC$ ъглополовящата на $\angle ACB$ пресича описаната окръжност в точка M . Намерете дължината на CM , ако $AC + CB = k$. **Отг.** $\frac{\sqrt{2}}{2} k$.

9.2.15. В равнобедрения $\triangle ABC$ ($CA = CB$) ъглополовящата на $\angle ABC$ пресича описаната окръжност в точка K . Допирателната към окръжността в K , пресича правата AB в L . Намерете KA и KL , ако $AC = 12$ и $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

Отг. $2\sqrt{15}$, 7.

9.2.16. Точката M е на диагонала AC на квадрата $ABCD$ със страна $2a$, като $AM:MC = 3:1$. N е върху AB и $\angle NMD = 90^\circ$. Намерете на AN . Отг. a .

9.2.17. На продължението на страната AB в ромба $ABCD$ е взета точка K (B е между A и K). AC и DK се пресичат в Q . Ако $AK = 14$ и описаната около ADQ окръжност има радиус b , а центърът ѝ е на AK , намерете DK . Отг. 7.

9.2.18. $\triangle ABC$ е вписан в окръжност с радиус R . Точката D е на дъгата BC , а AD и BC се пресичат в точка M . Намерете BC , ако $\angle AMC = 120^\circ$, $AB = R$ и $BM:MC = 2:3$. Отг. $5R/\sqrt{7}$.

9.2.19. В $\triangle ABC$ $AB = c$ и $\angle ACB = \gamma$, а J е центърът на вписаната окръжност. Намерете радиуса на окръжността, описана около $\triangle ABJ$.

Отг. $R_1 = \frac{c}{2 \cos \frac{\gamma}{2}}$.

9.2.20. Върху страните BC и CA на $\triangle ABC$, външно относно $\triangle ABC$, са построени квадратите $BKPC$ и $ACSL$. Докажете, че продължението на височината през върха C на $\triangle ABC$ разполовява отсечката PS .

9.2.21. (СУ) В окръжност с радиус 1 е вписан четириъгълник $ABCD$, в който може да се впише окръжност и $\angle BAD = 60^\circ$. Ако $\angle ABD = \gamma$, докажете

че $S_{ABCD} = \frac{\sqrt{3}}{3} [4 \sin^2 (30^\circ + \gamma) - 1]$.

9.2.22. В остроъгълния $\triangle ABC$ височините $AM = \frac{1}{2}\sqrt{15}$ и $CN = \sqrt{15}$ се пресичат в точка H , като $CH:HA = 7:2$. Намерете лицето на $\triangle ANH$ и радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Отг. $1/\sqrt{15}$, $8/\sqrt{15}$.

9.2.23. В сектора POQ с радиус R и централен ъгъл 2α е вписан правоъгълник, като два от върховете му лежат върху дъгата на сектора, а другите два върху радиусите OP и OQ . Намерете лицето на правоъгълника, ако ъгълът между диагоналите му е 2β .

Отг. $\frac{4R^2 \tan \beta}{1 + (\cot \alpha + 2 \tan \beta)^2}$.

9.3. ТРИГОНОМЕТРИЧНИ ПРЕОБРАЗУВАНИЯ

9.3.1. Докажете, че ако $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$, то един от ъглите на триъгълника е равен на $\frac{\pi}{3}$.

9.3.2. Ако ъглите на $\triangle ABC$ са α , β , γ а страните срещу тях са съответно a , b , c и лицето му е S , докажете, че $\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.

Доказателство: Имаме: $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, тогава $\cot \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc \sin \alpha}$ или

$\cot \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$ (котангенсова теорема). Събираме така получените равенства за $\cot \alpha$, $\cot \beta$ и $\cot \gamma$.

9.3.3. В $\triangle ABC$ $\alpha = \frac{\pi}{7}$, $\beta = \frac{2\pi}{7}$, $\gamma = \frac{4\pi}{7}$. Докажете, че $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

9.3.4. α , β и γ са ъгли на триъгълник и $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = 2 \sin \frac{\gamma}{2}$. Докажете, че един от тези ъгли е 120° .

9.3.5. Ако за ъглите α , β , γ на $\triangle ABC$ знаете, че $\tan \frac{\alpha}{2}$, $\tan \frac{\beta}{2}$, $\tan \frac{\gamma}{2}$ образуват аритметична прогресия, докажете, че $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ също образуват аритметична прогресия.

9.3.6. Докажете, че ако в триъгълник отношението на сумата от синусите на два ъгъла към сумата на техните косинуси е равна на синуса на третия ъгъл, то триъгълникът е правоъгълен.

9.3.7. Докажете, че $\triangle ABC$ е тъпоъгълен, ако $\tan \alpha \tan \beta < 1$.

9.3.8. В $\triangle ABC$ $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, страната $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$. Докажете, че ако $\alpha = 2\beta$, то $a^2 = b^2 + bc$.

Доказателство:

I начин: Имаме $\frac{a}{\sin 2\beta} = \frac{b}{\sin \beta}$

или $a = \frac{2 \sin \beta \cos \beta}{\sin \beta} b = 2b \cos \beta$.

Аналогично $\frac{c}{\sin (180^\circ - 3\beta)} = \frac{b}{\sin \beta}$,

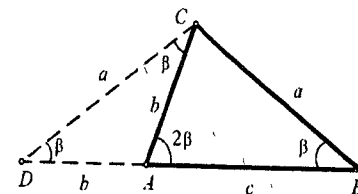
т.е. $c = \frac{b \sin 3\beta}{\sin \beta} = \frac{b(3 \sin \beta - 4 \sin^3 \beta)}{\sin \beta}$ или $c = b(3 - 4 \sin^2 \beta)$. Тогава

$a^2 - bc = 4b^2 \cos^2 \beta - b^2(3 - 4 \sin^2 \beta) = b^2$.

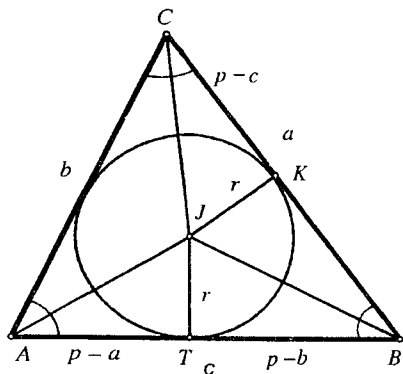
II начин: По продължението на BA построяваме $AD = b$. Равнобедрените триъгълници DAC и DCB са подобни. $\frac{DC}{DA} = \frac{DB}{BC}$, $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$ или $a^2 = b^2 + bc$.

9.3.9. Ако за $\triangle ABC$ е изпълнено $\sin \frac{B}{2} = \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$, докажете, че

$\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{2}$ и че $a + c = 3b$.



Доказателство: $\sin \frac{B}{2} = \sin \left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right) \right] = \cos \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right)$. Като приложим



формулата за косинус от сбор получаваме:

$$\sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} \text{ или}$$

$$2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}, \text{ което е равносилно}$$

$$\text{с } \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2}. \text{ В последното равенство за-}$$

$$\text{местваме } \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{p-a} \text{ и } \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}. \text{ Имаме:}$$

$$r^2 = \frac{(p-a)(p-c)}{2}, \text{ но}$$

$$r^2 = \frac{S^2}{p^2} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} \text{ или}$$

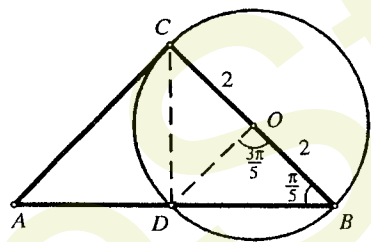
$$\frac{(p-a)(p-c)}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}, \frac{p-b}{p} = \frac{1}{2}, \text{ което се свежда до } a+c=3b.$$

9.3.10. Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако $AB=c$, $\angle BCA=2\gamma$ и радиусът на вписаната му окръжност е r . **Отг.** $r(c+r \cot \gamma)$.

9.3.11. Точката C лежи върху страната $LM=3$ от ромба $KLMN$, като $LC=2$ и $\angle KLM=120^\circ$. Намерете отношението на косинусите на ъглите CKL и CNM . **Отг.** $\frac{8}{5} \sqrt{\frac{7}{19}}$.

9.3.12. Ако в $\triangle ABC$ $2h_c=AB$ и $\angle A=75^\circ$, намерете $\angle C$. **Отг.** 75° .

9.3.13. В $\triangle ABC$ $BC=4$ и $\angle ABC=\frac{\pi}{5}$. Намерете лицата на частите от кръга с диаметър BC , на които го разделя хипотенузата AB .



Решение: Лицето S на сегмента $DBBD$ ще намерим като от лицето S_1 на сектора DOB

$$\text{извадим лицето на } \triangle DOB; S_1 = \frac{1}{2} \frac{3\pi}{5} 2^2 = \frac{6\pi}{5},$$

$$S_{\triangle DOB} = \frac{1}{2} 2^2 \sin \angle BOD = 2 \sin \frac{3\pi}{5}. \text{ Но}$$

$$\sin \frac{3\pi}{5} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10} \right) = \cos \frac{\pi}{10}. \text{ Понеже}$$

$$\frac{2\pi}{10} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2}, \sin \frac{2\pi}{10} = \cos \frac{3\pi}{10}. \text{ Тогава } \frac{\pi}{10} \text{ е корен на уравнението}$$

$$\sin 2x = \cos 3x. \text{ Преобразуваме } 2 \sin x \cos x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x,$$

$$2 \sin x = 4(1 - \sin^2 x) - 3 \text{ и получаваме}$$

$$4 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 = 0 \text{ с положителен корен } \sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}. \text{ Намерихме, че}$$

$$\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}. \text{ Тогава } \cos^2 \frac{\pi}{10} = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2 \text{ и } \cos \frac{\pi}{10} = \frac{1}{4} \sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

$$S = \frac{6\pi}{5} - \frac{1}{2} \sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

9.3.14. Дължините на четири дъги от окръжност с радиус R , образуват геометрична прогресия с частно 3 (началото на първата дъга съвпада с края на четвъртата). Краищата на тези дъги са върхове на четириъгълник, вписан в тази окръжност. Намерете лицето му. **Отг.** $\sqrt{2}R^2/4$.

9.4. СПОМАГАТЕЛЕН ЪГЪЛ

Въвеждането на подходящи спомагателни ъгли и използването на тригонометричните им връзки е мощен метод за решаване на много геометрични задачи.

9.4.1. Дадени са $\triangle ABC$ и ромба $BDEF$, чиито върхове лежат върху страните на триъгълника ABC , а ъгълът при върха E е туп. Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако $CE=7$, $AE=3$, а радиусът на вписаната в ромба окръжност е 1.

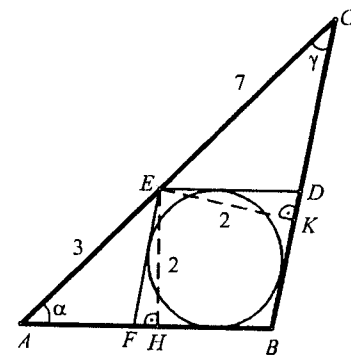
Решение: Построяваме височините EH и EK на ромба, $EH=EK=2$. Означаваме $\angle BAC=\alpha$ и $\angle BCA=\gamma$. От $\triangle AHE$ имаме:

$$\sin \alpha = \frac{2}{3} \text{ и } \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{1}{3} \sqrt{5}, \text{ а от } \triangle CEK$$

$$\sin \gamma = \frac{2}{7} \text{ и } \cos \gamma = \frac{3}{7} \sqrt{5}.$$

$$S_{ABC} = \frac{AC^2 \sin \alpha \sin \gamma}{2 \sin(\alpha + \gamma)} = \frac{10^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7}}{2(\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma)}. \text{ Получаваме } S_{ABC} = 5\sqrt{5}.$$

9.4.2. Точките K , L и M делят страните на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ в отношение $AK:BK=CL:BL=CM:DM=1:2$. Радиусът на описаната около $\triangle KLM$ окръжност е $\frac{5}{2}$, $KL=4$ и $LM=3$. Намерете S_{ABCD} , ако $KM < KL$. **Отг.** $189/25$.



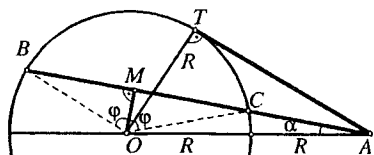
9.4.3. Дадена е окръжност с център O и радиус R . През фиксирана точка A на разстояние $2R$ от точка O е построена секуща, пресичаща окръжността в точка B и точка C ($AC < AB$). Ако $\angle OAB = \alpha$, намерете AC и AB . Ако $\angle COB = 2\varphi$, изразете $\sin \varphi$ чрез $\cos \alpha$.

Решение: От теоремата за допирателна и секуща имаме:
 $AB \cdot AC = AT^2 = OA^2 - OT^2 = 3R^2$. Ясно е, че $AC + AB = 2AM = 4R \cos \alpha$.

От тези две равенства намираме: $AC = 2R \cos \alpha - R\sqrt{4\cos^2 \alpha - 3}$ и

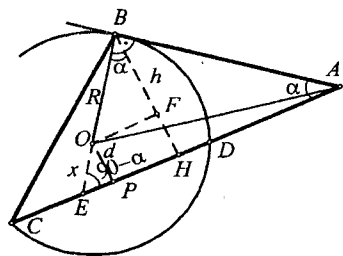
$$AB = 2R \cos \alpha + R\sqrt{4\cos^2 \alpha - 3} \quad \left(\alpha < \frac{\pi}{6} \right).$$

синусова теорема $\sin \varphi = \frac{BC}{2R} = \sqrt{4\cos^2 \alpha - 3}$.



9.4.4. От точка A са построени допирателна AB и секуща AC към окръжност с радиус R и център O (O е между AB и AC). Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако $\angle BAC = \alpha$, а разстоянието от O до AC е d .

Решение: $\angle PEO = 90^\circ - \alpha$. Тогава $OE = \frac{d}{\cos \alpha}$, $BE = R + \frac{d}{\cos \alpha}$,



$$\begin{aligned} BH &= BE \cos \alpha = R \cos \alpha + d. \\ \text{Пресмятаме } CA &= CP + PH + HA = \\ &= \sqrt{R^2 - d^2} + R \cos \alpha + BH \cot \alpha = \\ &= \sqrt{R^2 - d^2} + \frac{R + d \cos \alpha}{\sin \alpha}. \text{ За лицето получаваме:} \\ S_{ABC} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{R^2 - d^2} + \frac{R + d \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) (R \cos \alpha + d). \end{aligned}$$

9.4.5. (ВУЗ) Допирателната AB към окръжност с радиус R и секущата ADC (D по-близо до A) сключват ъгъл α . Намерете отношението на лицата на $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$, ако разстоянието от центъра O на окръжността до ADC е d и ADC и AB са от една и съща страна спрямо O .

Отг. $\frac{1}{2} + \frac{R - d \cos \alpha}{2 \sin \alpha \sqrt{R^2 - d^2}}$.

9.4.6. Дадена е окръжност с център O и радиус 12. Върху лъч с начало O са нанесени отсечки $OA = 15$ и $OB = 20$. През A и B са построени допирателни към окръжността от една и съща страна на лъча OAB . Намерете лицето на $\triangle ABC$, където C е пресечната точка на допирателните. Отг. 150/7.

9.4.7. Лицето на $\triangle ABC$ е k^2 . A и B лежат на две успоредни прави l_1 и l_2 , а C е между l_1 и l_2 . Намерете BC и AC , ако разстоянията от C до l_1 и l_2 са a и b .

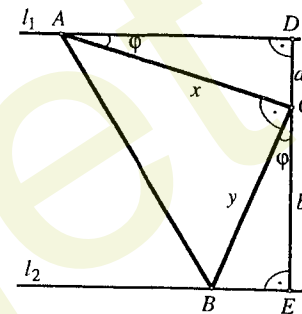
Решение: Означаваме $\angle DAC = \angle ECB = \varphi$.

Тогава $\sin \varphi = \frac{a}{x}$ и $\cos \varphi = \frac{b}{y}$. Получаваме систе-

мата $\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \left(\frac{b}{y}\right)^2 = 1$ и $S_{ABC} = \frac{xy}{2} = k^2$. Намираме

$$x = \frac{k}{b} \left(\sqrt{k^2 + ab} \pm \sqrt{k^2 - ab} \right),$$

$$y = \frac{k}{a} \left(\sqrt{k^2 + ab} \mp \sqrt{k^2 - ab} \right).$$



9.4.8. В $\triangle ABC$ $AC = 6$ и $BC = 3$. Окръжности с радиуси 3, 2 и 1 имат за центрове A , B и C . Намерете радиуса на окръжност, която се допират външно едновременно до всички окръжности. Отг. $\frac{8\sqrt{11}-19}{7}$.

9.4.9. Разстоянията между успоредните прави m , n и n , p са съответно a и b (n е между m и p). Намерете страната на равностранен триъгълник с върхове върху m , n и p .

Решение: Нека $\angle CAE = \alpha$, тогава $\angle BAE = 60^\circ - \alpha$. От $\triangle ADC$ и $\triangle ABE$

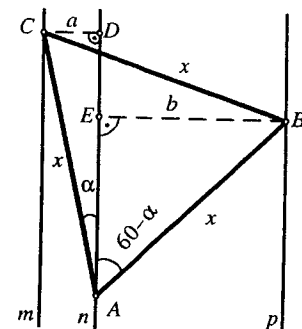
$$AC = \frac{a}{\sin \alpha} \text{ и } AB = \frac{b}{\sin(60^\circ - \alpha)}, \text{ но } AB = AC, \text{ т.е.}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha}.$$

От това уравнение пресмятаме $\tan \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2b+a}$. От $\sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

намираме $\sin \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + ab + b^2}}$ и

$$AC = 2 \sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}}.$$



9.4.10. (ВТУЗ) Стълба се опира с единия си край на улица, а с другия до стената на къща на височина 11. Стълбата се завърта около долния си край на 60° и се обляга на срещуположната къща. Улицата е широка $7\sqrt{3}$. Намерете дължината на стълбата. Отг. $2\sqrt{37}$.

9.4.11. Две окръжности с радиуси R и r се допират външно в точка A . Построен е равностранен триъгълник с връх в A и по един връх на всяка една от окръжностите. Намерете страната на триъгълника. Отг. $\frac{rR\sqrt{3}}{\sqrt{R^2 + r^2 - rR}}$.

9.4.12. Две окръжности с радиуси R и r се допират до правата t в точка A и са разположени от едната страна на t . Права, успоредна на t , пресича окръжностите.

ръжностите в точки B и C , които се намират от едната страна на централата им. Намерете радиуса R_1 на окръжността, описана около $\triangle ABC$.

Решение: Означаваме $\angle ACB = \varphi$, то-

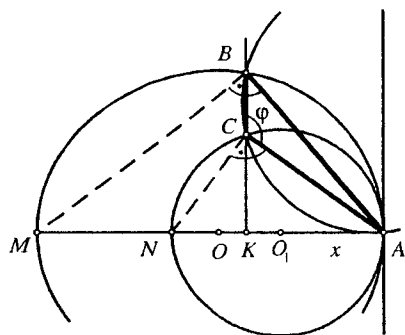
гава $R_1 = \frac{AB}{2\sin\varphi}$. $\triangle ABM$ и $\triangle ACN$ са

правоъгълни, следователно

$$AB^2 = AM \cdot AK, \quad AC^2 = AN \cdot AK \quad \text{и}$$

$$\frac{AK}{AC} = \sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi. \quad \text{Намираме}$$

$$R_1 = \frac{AB}{2\sin\varphi} = \frac{\sqrt{2R \cdot AK}}{2AK} \cdot AC = \frac{\sqrt{2R \cdot AK}}{2AK} \sqrt{2r \cdot AK} = \sqrt{Rr}.$$



9.4.13. Около равнобедрения $\triangle ABC$ е описана окръжност k . Височината от върха A към бедрото BC пресича k в точка M . През M е построена допирателна към k , пресичаща правата BC в точка N . Ако $AB = 8$ и $\sin\angle ACB = \frac{4}{5}$, намерете MC и MN . **Отг.** $2\sqrt{5}$, 15.

9.4.14. От точка B към окръжност са построени допирателна BT и секуща BNA , като $BN = p$ и $BA = q$ ($p < q$). Намерете радиуса на окръжността, ако $\angle TBA = \beta$. **Отг.** $\frac{p+q+2\sqrt{pq}\cos\beta}{2\sin\beta}$.

9.4.15. (УАСГ) Триъгълникът ABC има страни $AB = 5$, $BC = 4$ и $CA = 3$. Точката D лежи на страната AB .

а) Ако $\angle ACD = 2\psi$, пресметнете радиусите r_A и r_B на окръжностите, които са вписани съответно в $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$, като функции на $\cotg\psi$.

б) Намерете най-голямата стойност на произведението $r_A r_B$.

Отг. а) $\frac{3}{2+\cotg\psi}$, $2\frac{\cotg\psi-1}{2\cotg\psi-1}$; б) $\frac{6}{25}(7-2\sqrt{6})$.

9.4.16. Две окръжности с центрове O_1 и O_2 , лежащи върху страната AB на $\triangle ABC$, се допират външно и минават съответно през A и B , и пресичат CA в точка M , а CB в N , като $O_1M = O_1A = 3$, $BO_2 = O_2N = 6$. Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако $S_{NAO_2} : S_{MBO_1} = 8\sqrt{3} : 5$ и $BC = AC\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Решение: По синусова теорема $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{BC}{AC} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ или

$$\sin\alpha = \sin\beta\sqrt{2-\sqrt{3}}. \quad \text{От } \frac{S_{NAO_2}}{S_{MBO_1}} = \frac{12x}{15y} = \frac{8\sqrt{3}}{5} \quad \text{имаме } \frac{x}{y} = 2\sqrt{3}. \quad MA = 6\cos\alpha,$$

$$y = MA\sin\alpha = 6\cos\alpha\sin\alpha \quad \text{и аналогично } NB = 12\sin\beta \quad \text{и } y = 12\cos\beta\sin\beta. \quad \text{То-}$$

$$\text{гава } \frac{x}{y} = \frac{12\cos\beta\sin\beta}{6\cos\alpha\sin\alpha} = \frac{2\cos\beta}{\cos\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}, \quad \text{т.е. } \frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha} = 6-3\sqrt{3}. \quad \text{Решава-}$$

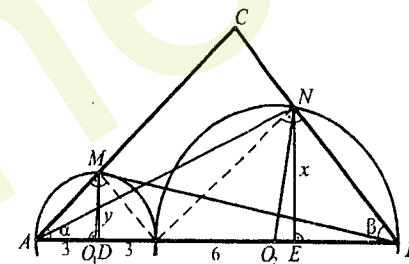
ме уравнението $1 - \sin^2\beta = [1 - \sin^2\beta(2-\sqrt{3})](6-3\sqrt{3})$ и получаваме

$$\sin^2\beta = \frac{1}{4}. \quad \text{Тогава } \sin\beta = \frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{и}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

$$\text{Лицето е: } S_{ABC} = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)} =$$

$$= \frac{18^2 \sin\alpha \sin\beta}{2(\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta)} = \frac{81(\sqrt{3}-1)}{2}.$$



9.4.17. В четириъгълника $ABCD$ диагоналите AC и BD са перпендикулярни и се пресичат в точка P , а точката M е среда на AD . Разстоянието от P до BC е $\frac{1}{2}$, $AP = 1$ и $CM = \frac{5}{4}$. Намерете AD , ако около четириъгълника $ABCD$ може да се опише окръжност. **Отг.** $(\sqrt{54}-2)/4$.

9.5. НАМИРАНЕ НА ЪГЛИ И ВРЪЗКИ МЕЖДУ ТЯХ

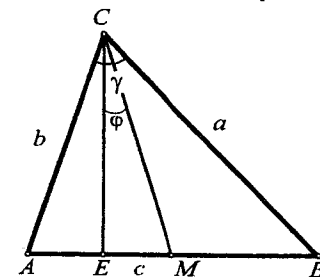
9.5.1. В триъгълник са дадени двете му страни a и b ($a > b$) и лицето му S . Намерете тангенса на ъгъла φ между височината и медианата, построени към третата страна.

Решение: От $S = \frac{ch}{2}$ получаваме $h^2 = \frac{4S^2}{c^2}$

или $h^2 = \frac{4S^2}{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$. Имаме:

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma.$$

Тогава от $\cos^2\varphi = \frac{h^2}{m^2}$ и от $\tg^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} - 1$ полу-



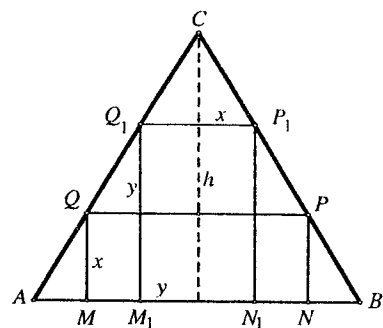
чаваме $\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{m^2}{h^2} - 1 = \frac{(a^2 + b^2 + 2ab \cos \gamma)}{16S^2} (a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma)$ или

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \gamma}{16S} - 1 = \frac{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2(1 - \sin^2 \gamma) - 16S}{16S}.$$

Тъй като $ab \sin \gamma = 2S$, то $\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{(a^2 - b^2)^2}{16S^2}$ или $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2 - b^2}{4S}$.

9.5.2. В $\triangle ABC$ $AB = 4$, а медианата $CM = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Ако $\angle CAB = 15^\circ$, докажете, че острият ъгъл между AB и CM е 45° .

9.5.3. Намерете синуса на ъгъла при върха на равнобедрен триъгълник, ако периметрите на всички вписани в него правоъгълници, два от върховете на които лежат върху основата му, са равни.



Решение: Да разгледаме правоъгълниците $MNPQ$ и $M_1N_1P_1Q_1$ със страни $MQ = x$, $MN = y$ и $Q_1P_1 = x$, $M_1Q_1 = y$. От

$\triangle QPC \sim \triangle ABC$ получаваме: $\frac{h-x}{h} = \frac{y}{c}$, т.е.

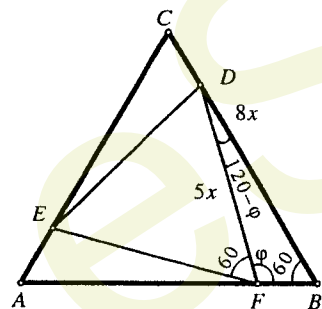
$y = \frac{c(h-x)}{h}$, аналогично от $\triangle Q_1P_1C \sim \triangle ABC$

имаме $x = \frac{c(h-y)}{h}$. Периметърът на правоъ-

гълниците е $P = 2x + 2y = 2x + \frac{2c(h-x)}{h} = \frac{2c(h-y)}{h} + 2y$. Тогава

$2(x-y) = \frac{2c}{h}(x-y)$, но $x \neq y$, т.е. $\frac{c}{h} = 1$ или $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$ и $\sin \gamma = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}} = \frac{4}{5}$.

9.5.4. В равнобедрен $\triangle ABC$ е вписан равнобедрен $\triangle DEF$. Точката D лежи върху страната BC , точката E – върху AC и точката F – върху AB . Ако $AB : DE = 8 : 5$, намерете синуса на ъгъл DFB .



Решение: Означаваме $\angle BFD = \varphi$, тогава $\angle BDF = 120 - \varphi$. От условието $\frac{AB}{ED} = \frac{8}{5}$ получа-

ваме $\frac{AF + FB}{ED} = \frac{AF}{EF} + \frac{FB}{FD} = \frac{8}{5}$. От $\triangle AFE$

$\frac{AF}{EF} = \frac{\sin \varphi}{\sin 60^\circ}$, а от $\triangle BFD$ $\frac{FB}{FD} = \frac{\sin(120^\circ - \varphi)}{\sin 60^\circ}$.

Тогава $\frac{\sin \varphi}{\sin 60^\circ} + \frac{\sin(120^\circ - \varphi)}{\sin 60^\circ} = \frac{8}{5}$ или $\sin \varphi + \sin(120^\circ - \varphi) = \frac{4\sqrt{3}}{5}$. Преобразу-

ваме и получаваме: $2 \sin 60^\circ \cos(\varphi - 60^\circ) = \frac{4\sqrt{3}}{5}$, $\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi = \frac{4}{5}$ и

$\cos \varphi = \frac{8}{5} - \sqrt{3} \sin \varphi$. Като повдигнем на квадрат последното уравнение дости-

гаме до $100 \sin^2 \varphi - 80\sqrt{3} \sin \varphi + 39 = 0$ с корени $\sin \varphi = \frac{4\sqrt{3} \pm 3}{10}$. Има два

триъгълника, които удовлетворяват условието.

9.5.5. В квадрат $ABCD$ е вписан равнобедрен $\triangle AEF$. Точката E лежи на BC , а F е на CD и $AE = AF$. Ако $\operatorname{tg} \angle AFE = 2$, намерете $\operatorname{tg} \angle FEC$.

Отг. $3 - \sqrt{5}$.

9.5.6. Върховете на равнобедрен $\triangle ABC$ лежат на успоредните прави AD , BE и CF . Правата BE е между правите AD и CF и дели разстоянието между тях в отношение $m:n$, считано от AD . Намерете $\operatorname{tg} \angle BCF$.

Отг. $\frac{n\sqrt{3}}{2m+n}$.

9.5.7. В равнобедрен триъгълник радиусът на вписаната окръжност е четири пъти по-малък от радиуса на описаната окръжност. Намерете косинуса на ъгъла при основата.

Решение: Нека $\angle CAB = \alpha$, тогава

$R = \frac{AB}{2 \sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{BD}{\sin 2\alpha}$ и $r = BD \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

От условието $R = 4r$ получаваме

$\frac{1}{\sin 2\alpha} = 4 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Понеже $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$,

$\frac{1}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{4 - 4 \cos \alpha}{\sin \alpha}$. Достигаем до $8 \cos^2 \alpha - 8 \cos \alpha + 1 = 0$ с корени

$\cos \alpha = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$ и $\cos \alpha = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$.

9.5.8. Отношението на бедрата в трапец е k и е равно на отношението на периметъра му към дължината на вписаната окръжност. Намерете синусите на ъглите на трапеца.

Отг. $\frac{2(1+k)}{\pi k}$, $\frac{2(1+k)}{\pi k^2}$.

9.5.9. В $\triangle ABC$ перпендикулярът, минаващ през средата на AB , пресича страната AC в M , като $MA : MC = 3 : 1$, а перпендикулярът, минаващ през средата на AC , пресича страната AB в N и $AN : NB = 2 : 1$. Намерете косинусите на ъглите на триъгълника.

Отг. $1/\sqrt{2}$, $1/\sqrt{5}$, $1/\sqrt{10}$.

9.5.10. В равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$) $\angle C = 2\gamma$. Намерете синуса на ъгъла между AB и медианата към BC .

Отг. $\frac{\cos \gamma}{\sqrt{5-4\cos 2\gamma}}$.

9.5.11. В $\triangle ABC$ $AB = c$, $\alpha - \beta = 90^\circ$. Намерете $\tan \gamma$, ако $S_{ABC} = S$.

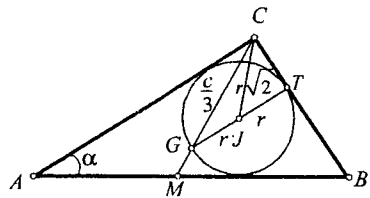
Отг. $\frac{c^2}{4S}$.

9.5.12. Пресечната точка на медианите в правоъгълен триъгълник лежи на вписаната му окръжност. Намерете $\sin \alpha + \cos \alpha$.

Решение: Нека α е по-малкият ъгъл. Пресмятаме $\angle CGJ = 45^\circ - \alpha$,

$CJ = r\sqrt{2}$ и $CG = \frac{2}{3}m_c = \frac{c}{3}$. По косинусова теорема за $\triangle CGJ$ имаме

$$\cos(45^\circ - \alpha) = \frac{\left(\frac{c}{3}\right)^2 + 2r^2 - r^2}{2 \cdot \frac{c}{3} \cdot r\sqrt{2}} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha) = \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(\frac{c^2 + 9r^2}{cr}\right), \text{ т.е.}$$



$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{6}\left(\frac{c}{r} + 9\frac{r}{c}\right). \text{ Понеже } \triangle ABC \text{ е}$$

$$\text{правоъгълен, } \frac{r}{c} = \frac{a+b-c}{2c} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha - 1). \text{ Полагаме}$$

$$\sin \alpha + \cos \alpha = u; \quad u = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{u-1} + 9\frac{1}{2}(u-1)\right).$$

Достигаме до $3u^2 + 6u - 13 = 0$ с положителен корен $u = \frac{4\sqrt{3}-3}{3}$.

9.5.13. Намерете косинуса на ъгъла при основата на равнобедрен триъгълник, ако ортоцентърът му лежи върху вписаната окръжност. Отг. $2/3$.

9.5.14. В $\triangle ABC$ с остър ъгъл α е вписан кръгов сектор така, че хордата му MN лежи върху AB , а дъгата му е равна на $\pi + 2\alpha$ и се допира до CA и CB . Краят N на хордата MN , по-близък до B , съвпада със средата на AB . Докажете, че $\cot \alpha = -2\cos 2\alpha$.

9.5.15. Върхът C на правоъгълника $ABCD$ лежи върху бедното KM на равнобедрения трапец $ABKM$ ($AM \parallel BK$), а P е пресечната точка на AM и CD . Намерете тангенсите на ъглите на трапеца и отношението на лицата на правоъгълника и трапеца, ако $AB = 2BC$ и $AP = 3BK$.

Отг. $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{3}{7}(2\sqrt{2}-1)$.

9.5.16. В $\triangle ABC$ $\angle BAC = \alpha$. O е вътрешна точка за $\triangle ABC$ и $\angle OAB =$

$= \angle OBC = \angle OCA = \varphi$ (точка на Брокер). Докажете, че $\tan \varphi = \sin \alpha \cos \alpha$.

Доказателство: Съобразяваме, че

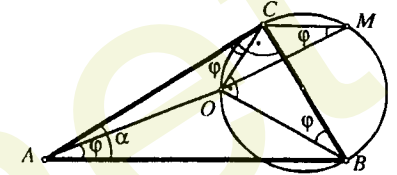
$\angle BOC = 90^\circ$, тогава $\tan \varphi = \frac{OC}{OB}$. Имаме

$OC = BC \sin \varphi = AB \sin \alpha \sin \varphi$. Намираме

$\angle AOC = 180^\circ - \alpha$ и $\angle AOB = 90^\circ + \alpha$. По синусова теорема за $\triangle AOB$:

$$\frac{AB}{OB} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\sin \varphi} = \frac{\cos \alpha}{\sin \varphi}.$$

Тогава $\tan \varphi = \frac{\cos \alpha}{\sin \varphi} \sin \alpha \sin \varphi = \sin \alpha \cos \alpha$.



Ще покажем как може да построим точката O . Построяваме окръжност k с диаметър BC и през C права l , успоредна на AB , която пресича k в точка M . Пресечната точка на AM с k е търсената точка O . Наистина $\angle OCA = \angle OBC = \angle OMC$ (периферен и вписани), а $\angle OMC = \angle OAB$ (кръстни).

9.5.17. В $\triangle ABC$ $4S = \sqrt{3}[a^2 - (b-c)^2]$. Намерете $\angle CAB$. Отг. 60° .

9.5.18. В равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) $\angle CAB = \alpha$. Точка P е от AB , а K от BC . Пресметнете $\cot \angle KPB$, ако $AP:PB = m$ и лицето на $\triangle PKB$ е три пъти по-малко от лицето на четириъгълника $APKC$. Отг. $\frac{8-(m+1)^2}{(m+1)^2 \tan \alpha}$.

9.5.19. Равностранен $\triangle ABC$ е описан около окръжност k с радиус r . Височината BM ($M \in AC$) пресича k в точка D , а D' е точката, симетрична на D относно AC . Допирателната t към k през D' и върхът A лежат в една и съща полуравнина относно правата BD' . Ако F е допирната точка на k с t , докажете, че $\sin \angle BD'F = \frac{1}{3}$. Ако N е пресечната точка на t със страната AB , намерете дължината на FN .

Отг. $(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3})r$.

9.5.20. Даден е $\triangle ABC$, като $CA = CB$ и $\angle C = 100^\circ$. Вътре в триъгълника е взета точка M , такава че $\angle MAB = 30^\circ$ и $\angle MCA = 20^\circ$. Намерете $\angle BMC$.

Решение: По синусова теорема за

$$\triangle AMC \text{ имаме: } \frac{CM}{\sin 10^\circ} = \frac{a}{\sin 150^\circ},$$

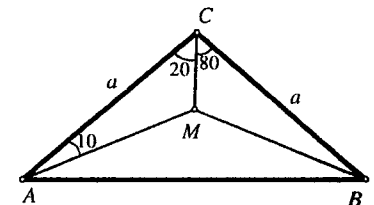
$$CM = 2a \sin 10^\circ. \text{ По косинусова теорема за}$$

$$\triangle CMB: BM^2 = CM^2 + CB^2 - 2CM \cdot CB \cdot \cos 80^\circ,$$

$$BM^2 = 4a^2 \sin^2 10^\circ + a^2 - 4a^2 \sin 10^\circ \cos 80^\circ;$$

$$BM^2 = 4a^2 \sin^2 10^\circ + a^2 - 4a^2 \sin 10^\circ \sin 10^\circ = a^2.$$

Понеже $BM = BC = a$, получаваме $\angle BMC = 80^\circ$.



9.5.21. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ ($AC = BC$), в който $\angle ACB = 110^\circ$.
 Във вътрешността му е взета точка M така, че $\angle MAB = 30^\circ$ и $\angle MBA = 25^\circ$.
 Намерете $\angle BMC$.
 Отг. 85° .

Използвана литература

- Адамар, Ж. Элементарная геометрия. Ч. 1. Планиметрия. Учпедгиз, Москва, 1957.
- Ангелов, В. и др. Конкурсите по математика в техническите и икономическите университети. Анубис, София, 2003.
- Говоров, В. и др. Сборник конкурсных задач по математике. Наука, Москва, 1986.
- Делоне, Б., О. Житомирский. Задачник по геометрии. Физматгиз, Москва, 1959.
- Егеров, В. и др. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗЫ. Под редакцией М.И. Сканави, Высшая школа, Москва, 1988.
- Коларов, К. Х. Лесов. Сборник от задачи по геометрия. Интеграл, Добрич, 2002.
- Копрински, Ст., Л. Топалов. Задачи по элементарна математика. Народна просвета, София, 1985.
- Нестеренко, Олехник, Потапов. Задачи вступительных экзаменов по математике. Наука, Москва, 1983.
- Паскалев, Г. Сборник от задачи по математика, Планиметрия. Релагия 6, София, 1999.
- Перепелкин, Д. Курс элементарной геометрии. Ч. 1. Гостехиздат, Москва – Ленинград, 1948.
- Петров К. Ръководство за решаване на задачи по математика, Планиметрия. Ч. 1, Народна просвета, София, 1984.
- Скопец, З., В. Жаров. Задачи и теоремы по геометрии (планиметрия). Учпедгиз, Москва, 1962.
- Цыпкин, А., А. Пинский. Справочное пособие по методам решения задач по математике. Наука, Москва, 1984.
- Чакърян, К., П. Сидеров. Кандидатстудентски конкурси по математика. Веди, София, 2002.
- Куланин, Е., Н.Федин. 5000 конкурсных задач по математике. АСТ, 1999.
- Списания "Математика", "Обучение по математика", "Квант", "Математика в школе" и др.

СЪДЪРЖАНИЕ

Предговор / 3

1. Правоъгълен триъгълник / 5

- 1.1. Метрични зависимости в правоъгълен триъгълник / 5
- 1.2. Медиани. Радиус на описана окръжност / 8
- 1.3. Ъглопопловящи в правоъгълен триъгълник / 11
- 1.4. Вписана окръжност / 14
- 1.5. Задачи с използване на тригонометрия / 18

2. Среди, средни отсечки, медиани / 22

- 2.1. Среди и медиани в триъгълник / 22
- 2.2. Медиани и други елементи / 25
- 2.3. Средна отсечка в трапец / 26
- 2.4. Среди на страните на четириъгълник / 28
- 2.5. Задачи с използване на тригонометрия / 30

3. Отношение на отсечки и лица / 32

- 3.1. Отношение на отсечки в триъгълник / 32
- 3.2. Отношение на лица на триъгълници / 35
- 3.3. Отношение на отсечки в трапец и успоредник / 39

4. Височини и лица / 42

- 4.1. Височини в триъгълника / 42
- 4.2. Подобни триъгълници. Вписани четириъгълници / 45
- 4.3. Ортоцентричен педален триъгълник / 50
- 4.4. Намиране на лица. Задачи, които се решават чрез лица / 54
- 4.5. Лице на четириъгълник / 58
- 4.6. Задачи с използване на тригонометрия / 60

5. Ъглополовящи / 62

- 5.1. Свойства на ъглополовящите / 62
- 5.2. Намиране на ъглополовящата / 64
- 5.3. Външни ъглополовящи / 66
- 5.4. Ъглополовящи в успоредник и трапец / 68
- 5.5. Ъглополовяща и други елементи в триъгълник / 70
- 5.6. Задачи с използване на тригонометрия / 73

6. Полупериметър. Радиус на вписана и описана окръжност / 76

- 6.1. Полупериметър / 76
- 6.2. Радиус на вписана окръжност / 79
- 6.3. Радиус на описана окръжност / 82
- 6.4. Вписана и описана окръжност / 84
- 6.5. Комбинирани задачи / 87
- 6.6. Задачи с използване на тригонометрия / 89

7. Трапец / 92

- 7.1. Решаване на трапец чрез конструктивно свързан с него триъгълник / 92
- 7.2. Подобни триъгълници в трапец / 95
- 7.3. Трапец, описан около окръжност / 100
- 7.4. Трапец, вписан в окръжност / 104
- 7.5. Ъгъл между диагоналите на трапец / 109
- 7.6. Ъглополовящи в трапец / 111
- 7.7. Лица на части от трапец / 114

8. Окръжности / 116

- 8.1. Ъгли, свързани с окръжността / 116
- 8.2. Диаметри и хорди / 118
- 8.3. Допирателни и секущи към окръжност / 123
- 8.4. Правилен многоъгълник. Теорема на Птолемей. Четириъгълник и окръжност / 126
- 8.5. Две окръжности и допирателните им / 130
- 8.6. Допиращи се окръжности / 136
- 8.7. Сектори, сегменти и повече от две окръжности / 141
- 8.8. Криволинейни фигури / 145

9. Планиметрия и тригонометрия / 152

- 9.1. Косинусова теорема / 152
- 9.2. Синусова теорема / 155
- 9.3. Тригонометрични преобразувания / 158
- 9.4. Спомагателен ъгъл / 161
- 9.5. Намиране на ъгли и връзки между тях / 165

Използвана литература / 171