Language: **Bulgarian**

Day: **1**

Сряда, 7 юли, 2010

Задача 1. Да се намерят всички функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такива, че

$$f\big([x]y\big) = f(x)\big[f(y)\big]$$

за произволни $x, y \in \mathbb{R}$. ($[z]$ е най-голямото цяло число, ненадминаващо z.)

Задача 2. Нека I е центърът на вписаната окръжност в $\triangle ABC$, а Γ е неговата описана окръжност. Правата AI пресича Γ в точка D. Точка E от дъгата $\widehat{BDC}$ и точка F от страната BC са такива, че

$$\angle BAF = \angle CAE < \tfrac{1}{2}\angle BAC.$$

Нека G е средата на отсечката IF. Да се докаже, че правите DG и EI се пресичат върху Γ.

Задача 3. Да се намерят всички функции $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такива, че

$$\big(g(m) + n\big)\big(m + g(n)\big)$$

е точен квадрат за произволни $m, n \in \mathbb{N}$. ($\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа.)

Задача 4. Нека P е точка от вътрешността на $\triangle ABC$. Правите AP, BP и CP пресичат описаната около $\triangle ABC$ окръжност Γ съответно в точки K, L и M. Допирателната към Γ в точката C пресича правата AB в точка S. Да се докаже, че ако $SC = SP$, то $MK = ML$.

Задача 5. В шест кутии $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$ първоначално има по една монета. Разрешени са следните две операции:

Операция 1: Избираме непразна кутия B_j, $1 \leq j \leq 5$, премахваме една монета от B_j и добавяме две монети в B_{j+1}.

Операция 2: Избираме непразна кутия B_k, $1 \leq k \leq 4$, премахваме една монета от B_k и разменяме съдържанието (възможно празно) на кутията B_{k+1} и съдържанието (възможно празно) на кутията B_{k+2}.

Съществува ли крайна последователност от операции, след които кутиите B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 са празни, а кутията B_6 съдържа точно $2010^{2010^{2010}}$ монети? ($a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Задача 6. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е редица от положителни реални числа. Известно е, че съществува естествено число s такова, че

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \leq k \leq n-1\}$$

за всяко $n > s$. Да се докаже, че съществуват естествени числа ℓ и N, за които $\ell \leq s$ и $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ за произволно $n \geq N$.