Вторник, 10 Юли, 2012 г.

Задача 1. За даден $\triangle ABC$ външновписаната окръжност срещу върха A има център J. Тази окръжност се допира до страната BC в M и до правите AB и AC съответно в K и L. Правите LM и BJ се пресичат в F, а правите KM и CJ се пресичат в G. Нека S е пресечната точка на правите AF и BC, а T е пресечната точка на правите AG и BC.

Да се докаже, че M е средата на ST.

(Външновписаната окръжност за $\triangle ABC$ срещу върха A е окръжността, която се допира до отсечката BC, до лъча AB след B и до лъча AC след C.)

Задача 2. Нека $n \geq 3$ е цяло число, а $a_2, a_3, \ldots, a_n$ са такива положителни реални числа, че $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Да се докаже, че

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n \;>\; n^n.$$

Задача 3. *Отгатване* е игра между двама играчи A и B. Правилата на играта зависят от две естествени числа k и n, които и двамата знаят.

Отначало A избира цели числа x и N, за които $1 \leq x \leq N$, като пази в тайна x и казва N на B. Играчът B се опитва да получи информация за x, задавайки на A въпроси по следния начин: за всеки въпрос B избира множество S от естествени числа и пита A дали $x \in S$ (възможно е множеството да е същото както в някой предишен въпрос). Играчът B може да задава колкото иска въпроси. Играчът A отговаря на въпросите на B с *да* или *не*, но може да лъже колкото пъти иска. Единственото условие е от $k+1$ последователни отговора поне един да е верен.

След като B зададе колкото иска въпроси, той трябва да определи множество X от най-много n естествени числа. Ако $x \in X$, то B печели, а иначе губи. Да се докаже, че:

1. Ако $n \geq 2^k$, то B може да си гарантира победа.
2. За всяко достатъчно голямо k съществува $n \geq 1.99^k$ така, че B не може да си гарантира победа.

Сряда, 11 Юли, 2012 г.

Задача 4. Да се намерят всички функции $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такива, че за произволни цели числа a, b, c, за които $a+b+c=0$, е в сила равенството

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

($\mathbb{Z}$ е множеството на целите числа.)

Задача 5. Нека ABC е триъгълник, за който $\angle BCA = 90°$, а D е петата на височината от C. Нека X е точка от вътрешността на отсечката CD. Точката K от отсечката AX е такава, че $BK = BC$, а точката L от отсечката BX е такава, че $AL = AC$. Нека M е пресечната точка на AL и BK.

Да се докаже, че $MK = ML$.

Задача 6. Да се намерят всички естествени числа n, за които съществуват неотрицателни цели числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ така, че

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$

Време: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки