*Вторник, 23 юли, 2013 г.*

**Задача 1.** Да се докаже, че за всяка двойка от естествени числа $k$ и $n$ съществуват $k$ естествени числа $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (не непременно различни) такива, че

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right)\left(1 + \frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

**Задача 2.** Конфигурация от 4027 точки в равнината се нарича *колумбийска*, ако тя се състои от 2013 червени точки и 2014 сини точки, като никои три точки от конфигурацията не лежат на една права. Чрез прекарване на прави равнината се разделя на части. Съвкупност от прави се нарича *добра* за колумбийска конфигурация, ако са изпълнени следните две условия:

- никоя права не минава през точка от конфигурацията;
- никоя част не съдържа точки от двата цвята.

Да се намери най-малката възможна стойност на $k$ така, че за всяка колумбийска конфигурация от 4027 точки съществува добра съвкупност от $k$ прави.

**Задача 3.** Външновписаната окръжност за $\triangle ABC$ срещу върха $A$ се допира до страната $BC$ в точка $A_1$. Точката $B_1$ върху страната $CA$ и точката $C_1$ върху страната $AB$ се дефинират аналогично, като се използват външновписаните окръжности съответно срещу върховете $B$ и $C$. Нека центърът на описаната окръжност около $\triangle A_1B_1C_1$ лежи на описаната окръжност около $\triangle ABC$. Да се докаже, че $\triangle ABC$ е правоъгълен.

Външновписаната окръжност за $\triangle ABC$ *срещу върха* $A$ *е окръжността, която се допира до страната* $BC$*, до лъча* $AB$ *след* $B$ *и до лъча* $AC$ *след* $C$*. Външновписаните окръжности за* $\triangle ABC$ *срещу върховете* $B$ *и* $C$ *се дефинират аналогично.*



*Време за работа: 4 часа и 30 минути*
*Всяка задача се оценява със 7 точки*

*Сряда, 24 юли, 2013 г.*

**Задача 4.** Нека $ABC$ е остроъгълен триъгълник с ортоцентър $H$ и нека $W$ е точка върху страната $BC$ (различна от $B$ и $C$). Точките $M$ и $N$ са петите на височините съответно от $B$ и $C$. Нека $\omega_1$ е описаната окръжност около $\triangle BWN$, а $X \in \omega_1$ е диаметрално противоположната точка на $W$ относно $\omega_1$. Аналогично, нека $\omega_2$ е описаната окръжност около $\triangle CWM$, а $Y \in \omega_2$ е диаметрално противоположната точка на $W$ относно $\omega_2$. Да се докаже, че точките $X$, $Y$ и $H$ лежат на една права.

**Задача 5.** Нека $\mathbb{Q}_{>0}$ е множеството на положителните рационални числа. Нека $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ е функция, изпълняваща следните три условия:

(i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ за всеки $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;

(ii) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ за всеки $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;

(iii) съществува рационално число $a > 1$ такова, че $f(a) = a$.

Да се докаже, че $f(x) = x$ за всяко $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

**Задача 6.** Нека $n \geq 3$ е цяло число и $n+1$ точки върху окръжност образуват правилен $(n+1)$-ъгълник. Разглеждаме всички номерирания на тези точки с числата $0, 1, \ldots, n$ така, че всеки номер се използва точно един път; две такива номерирания се считат за еднакви, ако едното се получава от другото след ротация на окръжността. Едно номериране се нарича *красиво*, ако за всеки четири номера $a < b < c < d$, за които $a + d = b + c$, хордата, съединяваща точките с номера $a$ и $d$, не пресича хордата, съединяваща точките с номера $b$ и $c$.

Нека $M$ е броят на красивите номерирания, а $N$ е броят на наредените двойки $(x, y)$ от естествени числа такива, че $x + y \leq n$ и НОД $(x, y) = 1$. Да се докаже, че

$$M = N + 1.$$



*Време за работа: 4 часа и 30 минути*
*Всяка задача се оценява със 7 точки*