

Вторник, 23 юли, 2013 г.

Задача 1. Да се докаже, че за всяка двойка от естествени числа k и n съществуват k естествени числа m_1, m_2, \dots, m_k (не непременно различни) такива, че

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

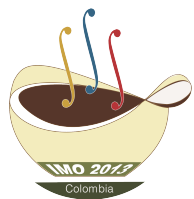
Задача 2. Конфигурация от 4027 точки в равнината се нарича *колумбийска*, ако тя се състои от 2013 червени точки и 2014 сини точки, като никои три точки от конфигурацията не лежат на една права. Чрез прекарване на прави равнината се разделя на части. Съвкупност от прави се нарича *добра* за колумбийска конфигурация, ако са изпълнени следните две условия:

- никоя права не минава през точка от конфигурацията;
- никоя част не съдържа точки от двата цвята.

Да се намери най-малката възможна стойност на k така, че за всяка колумбийска конфигурация от 4027 точки съществува добра съвкупност от k прави.

Задача 3. Външнописаната окръжност за $\triangle ABC$ срещу върха A се допира до страната BC в точка A_1 . Точката B_1 върху страната CA и точката C_1 върху страната AB се дефинират аналогично, като се използват външнописаните окръжности съответно срещу върховете B и C . Нека центърът на описаната окръжност около $\triangle A_1B_1C_1$ лежи на описаната окръжност около $\triangle ABC$. Да се докаже, че $\triangle ABC$ е правоъгълен.

Външнописаната окръжност за $\triangle ABC$ срещу върха A е окръжността, която се допира до страната BC , до лъча AB след B и до лъча AC след C . Външнописаните окръжности за $\triangle ABC$ срещу върховете B и C се дефинират аналогично.



Сряда, 24 юли, 2013 г.

Задача 4. Нека ABC е остроъгълен триъгълник с ортоцентър H и нека W е точка върху страната BC (различна от B и C). Точките M и N са петите на височините съответно от B и C . Нека ω_1 е описаната окръжност около $\triangle BWN$, а $X \in \omega_1$ е диаметрално противоположната точка на W относно ω_1 . Аналогично, нека ω_2 е описаната окръжност около $\triangle CWM$, а $Y \in \omega_2$ е диаметрално противоположната точка на W относно ω_2 . Да се докаже, че точките X , Y и H лежат на една права.

Задача 5. Нека $\mathbb{Q}_{>0}$ е множеството на положителните рационални числа. Нека $f: \mathbb{Q}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ е функция, изпълняваща следните три условия:

- (i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$ за всеки $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;
- (ii) $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ за всеки $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$;
- (iii) съществува рационално число $a > 1$ такова, че $f(a) = a$.

Да се докаже, че $f(x) = x$ за всяко $x \in \mathbb{Q}_{>0}$.

Задача 6. Нека $n \geq 3$ е цяло число и $n+1$ точки върху окръжност образуват правилен $(n+1)$ -ъгълник. Разглеждаме всички номерирания на тези точки с числата $0, 1, \dots, n$ така, че всеки номер се използва точно един път; две такива номерирания се считат за еднакви, ако едното се получава от другото след ротация на окръжността. Едно номериране се нарича *красиво*, ако за всеки четири номера $a < b < c < d$, за които $a+d = b+c$, хордата, съединяваща точките с номера a и d , не пресича хордата, съединяваща точките с номера b и c .

Нека M е броят на красивите номерирания, а N е броят на наредените двойки (x, y) от естествени числа такива, че $x+y \leq n$ и $\text{НОД}(x, y) = 1$. Да се докаже, че

$$M = N + 1.$$