Вторник, 8 юли, 2014 г.

Задача 1. Нека $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ е безкрайна редица от естествени числа. Да се докаже, че съществува единствено естествено число $n \geq 1$, за което

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq a_{n+1}.$$

Задача 2. Шахматна дъска $n \times n$, където $n \geq 2$ е естествено число, е разделена на n^2 единични квадратчета. Конфигурация от n шахматни топа се нарича *мирна*, ако всеки ред и всеки стълб на дъската съдържа точно по един топ. Да се намери най-голямото естествено число k, за което за всяка мирна конфигурация от топове съществува $k \times k$ квадрат, такъв, че на никое от неговите k^2 единични квадратчета няма топ.

Задача 3. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, за който $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Точка H е петата на перпендикуляра от A към BD. Точките S и T съответно от страните AB и AD са такива, че H е вътрешна за триъгълника SCT и

$$\angle CHS - \angle CSB = 90°, \quad \angle THC - \angle DTC = 90°\,.$$

Да се докаже, че правата BD се допира до описаната около триъгълника TSH окръжност.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Сряда, 9 юли, 2014 г.

Задача 4. Върху страната BC на остроъгълен триъгълник ABC са избрани точки P и Q така, че $\angle PAB = \angle BCA$ и $\angle CAQ = \angle ABC$. Точките M и N съответно върху правите AP и AQ са такива, че P е среда на AM и Q е среда на AN. Да се докаже, че правите BM и CN се пресичат върху описаната около триъгълника ABC окръжност.

Задача 5. За всяко естествено число n Банката на Кейптаун издава монети с номинал $\frac{1}{n}$. Да се докаже, че всяка колекция от такива монети (не непременно с различни номинали) с обща стойност най-много $99 + \frac{1}{2}$ може да се разбие на 100 или по-малко групи, всяка от които на обща стойност най-много 1.

Задача 6. Множество от прави в равнината е в *общо положение*, ако никои две от правите не са успоредни и никои три от тях не се пресичат в една точка. Множество от прави в общо положение разделя равнината на области, някои от които имат крайно лице; тези области се наричат *крайни*. Да се докаже, че за всяко достатъчно голямо n във всяко множество от n прави в общо положение е възможно да се оцветят поне $\sqrt{n}$ от правите в синьо така, че нито една от крайните области да няма изцяло синя граница.

Забележка: Доказване на граница $c\sqrt{n}$, където c е реална константа, вместо $\sqrt{n}$, ще се точкува в зависимост от стойността на константата c.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки