Понеделник, 11 Юли, 2016

Задача 1. Даден е триъгълник BCF с прав ъгъл при върха B. Нека A е точката върху правата CF, за която $FA = FB$ и F лежи между A и C. Точка D е избрана така, че $DA = DC$ и AC е ъглополовящата на $\angle DAB$. Точка E е избрана така, че $EA = ED$ и AD е ъглополовящата на $\angle EAC$. Нека M е средата на CF. Нека X е точката, за която $AMXE$ е успоредник (където $AM \| EX$ и $AE \| MX$). Да се докаже, че правите BD, FX и ME се пресичат в една точка.

Задача 2. Да се намерят всички естествени числа n, за които всяка клетка на таблица с размери $n \times n$ може да бъде запълнена с една от буквите I, M и O по такъв начин, че:

- във всеки ред и всяка колона, една трета от елементите са I, една трета са M и една трета са O; и
- във всеки диагонал, ако броят елементи в диагонала е кратен на три, то една трета от елементите са I, една трета са M и една трета са O.

Забележка: Редовете и колоните на таблица с размери $n \times n$ са номерирани с числата от 1 до n по обичайния начин. Така на всяка клетка отговаря двойка естествени числа (i, j), $1 \le i, j \le n$. За $n > 1$, таблицата има точно $4n - 2$ *диагонала* от два типа. Диагонал от първия тип се състои от всички клетки (i, j), за които $i + j$ е константа, и диагонал от втория тип се състои от всички клетки (i, j), за които $i - j$ е константа.

Задача 3. В равнината е даден изпъкнал многоъгълник $P = A_1A_2 \dots A_k$. Върховете $A_1, A_2, \dots, A_k$ имат целочислени координати и лежат на една окръжност. Нека S е лицето на P. Дадено е нечетно естествено число n такова, че квадратите на дължините на страните на P са цели числа, които се делят на n. Да се докаже, че $2S$ е цяло число, което се дели на n.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Вторник, 12 юли, 2016

Задача 4. Множество от естествени числа се нарича *ароматно*, ако съдържа поне два елемента и всеки от неговите елементи има общ прост делител с поне един от останалите елементи. Нека $P(n) = n^2 + n + 1$. Да се намери минималното възможно естествено число b, за което съществува цяло неотрицателно число a, такова, че множеството

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

е ароматно.

Задача 5. На дъската е написано уравнението

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$$

с по 2016 линейни множителя от всяка страна. Да се намери минималната възможна стойност на k, за която е възможно да се изтрият точно k от всичките 4032 линейни множителя така, че да остане поне по един множител от всяка страна и полученото уравнение да няма реални корени.

Задача 6. Дадени са $n \geq 2$ отсечки в равнината, такива, че всеки две отсечки се пресичат във вътрешна точка и никои три не се пресичат в една точка. За всяка отсечка Джеф трябва да избере единия ѝ край и да постави в него жаба, обърната с лице към другия край на отсечката. След това Джеф ще плесне с ръце $n-1$ пъти. Всеки път, когато Джеф пляска с ръце, всяка жаба веднага скача напред в следващата пресечна точка по своята отсечка. Жабите никога не променят посоката на своето движение. Джеф желае да разположи жабите така, че да няма момент, в който някои две от тях да се окажат едновременно в една и съща пресечна точка.

(а) Да се докаже, че Джеф винаги може да изпълни желанието си, ако n е нечетно.

(б) Да се докаже, че Джеф няма как да изпълни желанието си, ако n е четно.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки