Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Бургас, 6 – 8 февруари 2009 г.

София, 2009 г.

Кратки решения на задачите

Задача 9.1. Да се намерят стойностите на параметъра a, за които корените x_1, x_2 на уравнението $x^2 - ax + 8 - a = 0$ са реални положителни числа и $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} > 16$.

Решение. Корените x_1, x_2 са реални при $D = a^2 + 4a - 32 \geq 0$. Оттук получаваме $a \in (-\infty, -8] \cup [4, +\infty)$. Освен това

$$x_1 > 0, x_2 > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 > 0, x_1x_2 > 0 \Leftrightarrow a > 0, \quad 8 - a > 0 \Leftrightarrow a \in (0, 8).$$

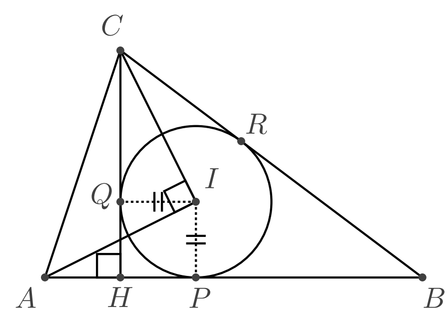
Така $a \in [4, 8)$. По-нататък, тъй като $x_1 > 0, x_2 > 0$, то

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} > 16 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 > 16x_1x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 > 18x_1x_2 \Leftrightarrow$$
$$a^2 > 18(8 - a) \Leftrightarrow a^2 + 18a - 144 > 0.$$

Решенията на това неравенство са $a \in (-\infty, -24) \cup (6, +\infty)$. Като вземем предвид, че $a \in [4, 8)$, получаваме търсените стойности на параметъра: $a \in (6, 8)$.

Задача 9.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, в който е спусната височината CH. Нека I е центърът на вписаната в $\triangle BHC$ окръжност. Да се докаже, че $\angle AIC = 90^\circ$ тогава и само тогава, когато $AB = BC$.

Решение. Нека вписаната в $\triangle BHC$ окръжност k се допира до страните BH, CH и BC съответно в точките P, Q и R. От $\angle AIC = \angle AHC = 90^\circ$ следва, че точките H и I лежат на окръжност с диаметър $AC \Rightarrow \angle PAI = \angle QCI$. Разглеждаме $\triangle API$ и $\triangle CQI$. Имаме



1. $IP = IQ$ (радиуси в k)
2. $\angle API = \angle CQI = 90^\circ$ (допирни точки на k)
3. $\angle PAI = \angle QCI$ (по доказателство)

Така по втори признак $\triangle API \cong \triangle CQI$ и следователно $AP = CQ = CR$. От друга страна $BP = BR$, т.е.

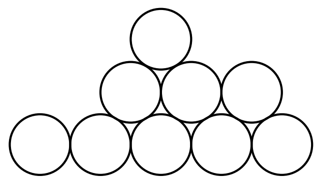
$$AB = AP + BP = CR + BR = BC.$$

Доказателството в обратната посока се извършва аналогично. От $AB = BC$ следва, че $AP = CR = CQ$ и $\triangle API \cong \triangle CQI$ (по първи признак). Оттук следва, че точките A, H, I, C лежат на една окръжност и $\angle AIC = \angle AHC = 90^\circ$.

Задача 9.3. Дадени са няколко еднакви монети, които са подредени в редове по следния начин:

- монетите в първия ред се допират една до друга;
- монетите във всеки ред образуват непрекъснат блок;
- монетите във всеки ред допират точно две монети в долния ред.

Едно допустимо подреждане с 5 монети в първия ред е следното:



Нека $A(n)$ е броят на възможните конфигурации, имащи n монети в първия ред. Да се намери най-малкото n, за което $A(n) > 10^4$.

Решение. Ако във втория ред имаме k монети, то те могат да бъдат поставени по $n-k$ начина в един непрекъснат блок. Следователно

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n-k} A(k)(n-k) + 1.$$

Оттук, използвайки очевидните начални условия $A(1) = 1$, $A(2) = 2$, получаваме, че първите членове на редицата $(A(n))_{n\geq 1}$ са

$$1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, 610, 1597, 4181, 5778, 9959$$

откъдето $n = 13$.

Забележка. Пресмятанията могат да се упростят, ако забележим, че

$$A(n+1) = 3A(n) - A(n-1).$$

Може да се докаже, че получената редица е подредица на редицата на Фибоначи и се състои от членовете с нечетен индекс.

Задача 9.4. На дъската е написано естествено число. Всяка секунда отдясно към него се дописва цифра, различна от 9. Да се докаже, че след краен брой стъпки на дъската ще се появи съставно число.

Решение. Ясно е, че ако се дописва някоя от цифрите 0,2,4,5,6 или 8 веднага на дъската ще се появи съставно число. При дописване на цифрите 1 или 7 остатъкът от деление на 3 на полученото число ще се увеличи с 1, т.е. след една или две стъпки ще получим число, кратно на 3. Остава да разгледаме случая, при който от дадено място нататък се дописва само цифрата 3. Нека на дъската в даден момент е записано простото число p. Без ограничение можем да считаме, че $p > 10$. Ще докажем, че съществува число, десетичният запис на което се състои само от цифрата 3 и което е кратно на p. За целта разглеждаме числата $3, 33, 333, \ldots, 33...3$ (последното с $p+1$ цифри). От принципа на Дирихле следва че две от тях са с равни остатъци при деление с p. Тъй като тяхната разлика е число, записано само с цифрата 3 и след това само с нули, а p и 10 са взаимно прости, то частта от разликата, която е записана само с цифрата 3 ще се дели на p. Ясно е тогава, че ако след числото p се добавят толкова пъти цифрата 3, колкото е в числото, за което се видя, че се дели на p , то на дъската ще се появи число, кратно на това просто число p, с което задачата е решена.

Задача 10.1. Дадено е уравнението

$$(x^2 + 6x + 1)^2 + (m + 7)(x^2 + 6x + 1) + m^2 + 7 = 0,$$

където m е реален параметър.

а) Да се определи колко реални решения има уравнението при $m = 4$.

б) Да се намерят стойностите на параметъра m, за които уравнението има точно три различни реални решения.

Решение. Полагаме $t = x^2+6x+1$ и уравнението добива вида $t^2+(m+7)t+m^2+7 = 0$.

а) При $m = 4$ получаваме $t^2 + 11t + 23 = 0$, откъдето $t_{1,2} = \dfrac{-11 \pm \sqrt{29}}{2}$. Тъй като най-малката стойност на функцията $f(x) = x^2 + 6x + 1$ е $f(-3) = -8$ и $\dfrac{-11 + \sqrt{29}}{2} > -8$, $\dfrac{-11 - \sqrt{29}}{2} < -8$, то уравнението има две реални решения.

б) Необходимо условие за това е уравнението $t^2+(m+7)t+m^2+7 = 0$ да има решение t_0, такова че уравнението $x^2 + 6x + 1 - t_0 = 0$ има единствено решение. С други думи $D = 32 + 4t_0 = 0$, т.е. $t_0 = -8$. Като заместим в $t^2 + (m + 7)t + m^2 + 7 = 0$, достигаме до $m^2 - 8m + 15 = 0 \Leftrightarrow (m - 3)(m - 5) = 0$.

   – При $m = 3$ получаваме решенията -3;$-3 \pm \sqrt{6}$

   – При $m = 5$ получаваме решенията -3; -1 и -5

Задача 10.2. Да се реши уравнението

$$\sqrt{x-2}+2\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{(x^2-4)(x^2-x-1)}.$$

Решение. *Първи начин.* Уравнението има смисъл при $x \geq 2$. Лесно се вижда, че $x = 2$ е решение. Нека $x \in (2, +\infty)$ и да разделим двете страни на $\sqrt{x-2}$ – получаваме уравнението $1 + 2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^3+x^2-3x-2}$.

Лесно се вижда, че $x = 3$ също е решение на разглежданото уравнение. Имаме $x^3+x^2-3x-2 = x^2(x+1)-3x-2 > 9(x+1)-3x-2 = 6x+7$ при $x > 3$ и аналогично $x^3+x^2-3x-2 < 6x+7$ при $x \in (2,3)$. Освен това $\sqrt{6x+7} > 1+2\sqrt{x+1}$ при $x > 3$ и $\sqrt{6x+7} < 1+2\sqrt{x+1}$ при $x \in (2,3)$. Следователно разглежданото уравнение няма решения, различни от 2 и 3.

Втори начин. Повдигаме на квадрат уравнението $1+2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^3+x^2-3x-2}$ и получаваме $4\sqrt{x+1} = x^3+x^2-7x-7$, откъдето имаме $4 = (x^2-7)\sqrt{x+1}$. Тъй като дясната страна е по-малка от 4 при $x \in (2,3)$ и по-голяма от 4 при $x > 3$, заключаваме, че $x = 3$.

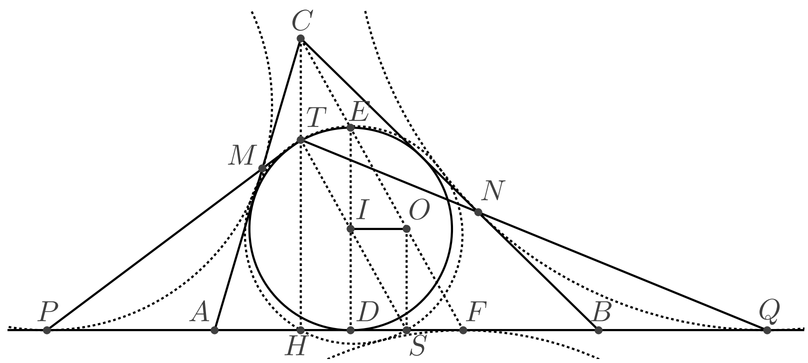
Задача 10.3. Да се докаже, че измежду числата $1, 2, 3, \ldots, 1000$ повече са тези, които се представят във вида $3u^2 - 4v^2$, отколкото тези, които се представят във вида $28xy - x^2 - 4y^2$, където u, v, x и y са цели числа.

Решение. От представянето $3(x+2y)^2 - 4(x-2y)^2 = 28xy - x^2 - 4y^2$ следва, че всяко число, което се представя във вида $28xy - x^2 - 4y^2$ (x, y са цели), се представя и във вида $3u^2-4v^2$ (u, v са цели). Следователно е достатъчно да посочим естествено число, по-малко от 1000, което има вида $3u^2-4v^2$, но не се представя във вида $28xy-x^2-4y^2$.

Едно такова число е 11. Имаме $11 = 3.3^2 - 4.2^2$, а уравнението $28xy - x^2 - 4y^2 = 11$ няма решение в цели числа. Действително, равенството $32xy - (x+2y)^2 = 11$ е невъзможно по модул 8.

Задача 10.4. Външновписаните окръжности към страните AC и BC на $\triangle ABC$ допират страните AC и BC съответно в точките M и N, а продълженията на страната AB съответно в точките P и Q. Ако пресечната точка T на правите PM и QN лежи на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, то да се докаже, че T лежи на окръжността минаваща през средите на страните на триъгълника.

Решение. Нека k е вписаната в $\triangle ABC$ окръжност с център I, D е допирната точка на k със страната AB, E е диаметрално противоположната точка на D в k, $H = CT^{\rightarrow} \cap AB$ и S е средата на AB.



Първо ще покажем, че $CH \perp AB$. Тъй като $\triangle PQT \sim \triangle ABI$ (защо?) е достатъчно да докажем, че $PH : QH = AD : BD$. Като приложим теоремата на Менелай за $\triangle AHC$ и правата (PMT), както и за $\triangle BHC$ и правата (QNT), получаваме

$$\frac{HT}{TC}.\frac{CM}{MA}.\frac{AP}{PH} = 1 = \frac{HT}{TC}.\frac{CN}{NB}.\frac{BQ}{QH}$$

и от $AD = CM, BD = CN$, достигаме до $PH : QH = AD : BD$. Следователно $CH \perp AB$ т.е. $CH \parallel ED$ **(1)**

От $\triangle PQT \sim \triangle ABI$ и факта, че S е среда както на AB, така и на PQ, следва, че точките T, I и S са колинеарни. Ако точка $F = CE^{\rightarrow} \cap AB$, то точка F е допирната точка на външновписаната към страната AB окръжност (защо?). Така S е среда и на отсечката DF, SI е средна отсечка в $\triangle DEF$,т.е $ST \parallel CF$ **(2)**

От **(1)** и **(2)**, и $IT = IE$, следва, че $TIEC$ е ромб. Тогава CI разполовява ъгъл $\angle TCE$, но CI разполовява и ъгъл $\angle TCO$, където O е центъра на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Така $O \in CE^{\rightarrow}$.

От $OS \perp AB$ следва, че $CTSO$ е успоредник и $ST = OC = R$. Остава да съобразим, че окръжността минаваща през средите на страните на триъгълника, минава и през точка H и освен това нейният диаметър е точно R, т.е. минава и през точката T.

Забележки:

1. Характеризиращо свойство е $OI \parallel AB$, което е еквивалентно на $\cos\alpha + \cos\beta = 1$

2. Окръжността минаваща през средите на страните на триъгълника е т.нар. окръжност на Ойлер или на деветте точки. От Теоремата на Фойербах знаем, че тя се допира до вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. В случая точката на допиране е точно T.

Задача 11.1. Дадени са аритметична прогресия с първи член a_1 и разлика $d \neq 0$ и геометрична прогресия с първи член b_1 и частно q. Ако $a_1 + b_1 = d + 2a_1 = 0$ и сборът на първите 4 члена на геометричната прогресия е равен на сборът на първите 5 члена на аритметичната прогресия, да се намери частното на геометричната прогресия.

Решение. От формулите за сбор на първите n члена на аритметична и геометрична прогресия и от условието получаваме $b_1(q^3+q^2+q+1)=(a_1+2d)5$. След заместване $d=-2a_1$, $b_1=a_1$ и съкращаване на b_1 (тъй като $d\neq 0$, то $b_1\neq 0$), получаваме $q^3+q^2+q-14=0$. Последното уравнение е еквивалентно на $(q-2)(q^2+3q+7)=0$ и понеже $q^2+3q+7>0$, то $q=2$.

Задача 11.2. Да се реши системата:

$$\left| \begin{array}{l} \cos^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)-\cos(\pi yz)+1=0 \\ x^2y^2z+z+10=0 \end{array} \right. .$$

Решение. Понеже $\cos^2\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\geq 0$ и $1-\cos(\pi yz)\geq 0$, то първото уравнение е изпълнено точно когато $\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)=0$ и $\cos(\pi yz)=1$. Оттук следва, че $x=2p+1$ и $yz=2q$, където p и q са цели числа. Нека $q=0$. Тъй като от второто уравнение имаме, че $z\neq 0$, то намираме $y=0$. Сега от второто уравнение получаваме $z=-10$. В този случай решенията са $(x,y,z)=(2p+1,0,-10)$, където p е произволно цяло число.

Нека сега $q\neq 0$. След заместване $x=2p+1$ и $y=\dfrac{2q}{z}$, получаваме $z^2+10z+4(2p+1)^2q^2=0$. Това уравнение има решение когато $25-4(2p+1)^2q^2\geq 0$, т.е. $(2(2p+1)q)^2\leq 25$. Оттук следва, че $|2p+1|=1$ и $q=\pm1$ или $q=\pm2$. В този случай решенията са

$$(x,y,z)=\left(\pm1,\frac{2q}{-5\pm\sqrt{25-4q^2}},-5\pm\sqrt{25-4q^2}\right),$$

където $q=\pm1$ или $q=\pm2$.

Задача 11.3. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с център на описаната окръжност точка O. Върху отсечките BO и CO са избрани съответно точки M и N така, че $OM=CN$. Точки P и Q са такива, че $\triangle AMP$ и $\triangle ANQ$ са подобни и еднакво ориентирани съответно на $\triangle AOC$ и $\triangle AOB$. Да се докаже, че сборът $PN+QM$ не зависи от избора на точките M и N.

Решение. От $\triangle AMP\sim\triangle AOC$ следва, че $\sphericalangle MAP=\sphericalangle OAC$, което означава, че лъчът $AP^{\rightarrow}$ пресича отсечката OC и че $\sphericalangle MAO=\sphericalangle PAC$. От същото подобие намираме $\dfrac{AM}{AO}=\dfrac{AP}{AC}$, което заедно с $\sphericalangle MAO=\sphericalangle PAC$ означава, че $\triangle AMO\sim\triangle APC$. Оттук следва, че $\sphericalangle ACP=2\sphericalangle ACB$, т.е. $\sphericalangle BCP=\sphericalangle ACB$. Аналогично получаваме, че $\sphericalangle CBQ = \sphericalangle ABC$. Да означим пресечната точка на CP и BQ с R (R е симетричната на върха A спрямо правата BC). От $\triangle ABC \cong \triangle RBC$ и от $\triangle AMO \sim \triangle APC$ намираме

$$\frac{CR}{CP} = \frac{CA}{CP} = \frac{AO}{OM} = \frac{CO}{CN},$$

което означава, че $PN \parallel RO$ и $\dfrac{PN}{RO} = \dfrac{CN}{CO}$. Аналогично намираме, че $QM \parallel RO$ и $\dfrac{QM}{RO} = \dfrac{BM}{BO}$. Следователно $\dfrac{PN+QM}{RO} = \dfrac{CN}{CO} + \dfrac{BM}{BO} = 1$, т.е. $PN + QM = RO$, като дължината на RO не зависи от избора на точките M и N.

Задача 11.4. Нека A е множество с $n \geq 5$ елемента. Да се намери минималното естествено число m със следното свойство: За всеки 10 триелементни подмножества на A съществува оцветяване на елементите на A в m цвята така, че никое от избраните триелементни подмножества на A не съдържа три едноцветни елемента.

Решение. Да изберем произволни 5 елемента от A и да образуваме всичките $\binom{5}{2} = 10$ триелементни подмножества. Ако сме използвали само два цвята, то ще има едноцветно триелементно подмножество. Следователно $m \geq 3$. Ще покажем, че 3 цвята са достатъчни. При $n \leq 6$ е достатъчно да оцветим елементите на A така, че да няма три едноцветни елемента.

При $n = 7$ е достатъчно да изберем три елемента, които не образуват някое от избраните множества (поради $\binom{7}{2} = 21 > 10$ това е възможно) и да ги оцветим в първия цвят. В другите два цвята оцветяваме по 2 от останалите 4 елемента.

Нека $8 \leq n \leq 10$. Ще покажем, че съществува подмножество на A с $n-5$ елемента в което не се съдържа никое от избраните 10 триелементни подмножества. Всички $n-5$ елементни подмножества на A са $\binom{n}{n-5}$, докато едно триелементно подмножество "покрива" точно $\binom{n-3}{n-8}$ такива $n-5$ елементни подмножества. Тъй като $\binom{n}{n-5} > 10\binom{n-3}{n-8}$, за $8 \leq n \leq 10$, то получаваме исканото.

Да оцветим елементите на това $n-5$ елементно множество в първия цвят. Ако в останалите 5 елемента има триелементо подмножество, което не е измежду избраните, го оцветяваме във втория цвят, а останалите два елемента оцветяваме в третия цвят.

Ако всички триелементни подмножества измежду останалите 5 елемента са избрани, то задачата се свежда до случая $n = 5$.

Нека $n \geq 11$. Тъй като в десетте триелементни подмножества елементите на A се срещат с повторения общо 30 пъти, то съществува елемент $a \in A$, който се среща не повече от два пъти. Да разгледаме множеството $A \setminus \{a\}$ и всички триелементни подмножества, които не съдържат a. От доказаното по-горе следва, че можем да оцветим това множество в три цвята така, че да няма едноцветно триелементно множество. За елемента a има най-много два забранени цвята (онези, които правят двете множества в които участва a, едноцветни), т.е. a също може да бъде оцветен без да има едноцветно подмножесто.

Задача 12.1. Редицата $x_1, x_2, \ldots$ е дефинирана с равенствата $x_1 = 2$ и $x_{n+1} = \dfrac{1+2x_n}{2+x_n}$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че:

а) редицата с общ член $\dfrac{1}{1+x_n} - \dfrac{1}{2}$ е геометрична прогресия и да се намери нейното частно;

б) редицата с общ член $\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{1+x_1} + \cdots + \dfrac{1}{1+x_n}\right)$ е сходяща и да се намери нейната граница.

Решение. а) Ако $y_n = \dfrac{1}{1+x_n} - \dfrac{1}{2}$, то

$$y_{n+1} = \frac{1}{1 + \dfrac{1+2x_n}{2+x_n}} - \frac{1}{2} = \frac{1-x_n}{6(1+x_n)} = \frac{y_n}{3}$$

и следователно редицата (y_n) е геометрична прогресия с частно $\dfrac{1}{3}$ (и първи член $-\dfrac{1}{6}$).

б) От а) следва, че

$$z_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+x_1} + \cdots + \frac{1}{1+x_n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6n} \cdot \frac{1 - 1/3^n}{1 - 1/3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

и значи $\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{2}$.

Задача 12.2. Нека $ABCD$ е вписан в окръжност четириъгълник. Точка E върху лъча $DA^{\rightarrow}$ е такава, че $\angle ABC = 2\angle EBD$. Да се докаже, че

$$DE = \frac{AC.BD}{AB+BC}.$$

Първо решение. Нека F е такава точка върху правата AD, че $\angle ABF = \angle CBD$ и A е между D и F. Понеже $\angle BAF = \angle BCD$, то $\triangle ABF \sim \triangle CBD$. Следователно (1) $\dfrac{BF}{BD} = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AF}{CD}$. От друга страна, от $\angle ABC = 2\angle EBD$ следва, че BE е ъглополовяща на $\angle FBD$ и значи (2) $\frac{BF}{BD} = \frac{EF}{ED}$. От (1) и (2) получаваме, че

$$\frac{AB}{CB} = \frac{EF}{ED} = \frac{AF + AD - DE}{DE} = \frac{AB.CD + BC.(AD - DE)}{BC.DE}.$$

Оттук и теоремата на Птоломей следва, че

$$DE(AB + BC) = AB.CD + BC.AD = AC.BD.$$

Второ решение. Нека $\angle ABC = \beta$, $\angle EBD = \varphi$ и $\angle ADB = \psi$. От синусовата теорема имаме, че

$$\frac{DE}{BD} = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \psi)}, \quad \frac{AC}{AB + BC} = \frac{\sin\beta}{\sin\psi + \sin(\beta + \psi)}.$$

Следователно

$$DE = \frac{AC.BD}{AB + BC} \Leftrightarrow \sin\varphi(\sin\psi + \sin(\beta + \psi)) = \sin\beta \sin(\varphi + \psi)$$

$$\Leftrightarrow \sin\varphi(\sin\psi + \sin\beta\cos\psi + \cos\beta\sin\psi) = \sin\beta(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)$$

$$\Leftrightarrow \sin\varphi(1 + \cos\beta) = \sin\beta\cos\varphi \Leftrightarrow \tan\varphi = \tan\beta/2 \Leftrightarrow \varphi = \beta/2.$$

Задача 12.3. Да се намерят всички полиноми P с реални коефициенти такива, че $P(x-1)P(x+1) > P^2(x) - 1$ за произволно реално число x.

Решение. Да допуснем, че $\deg P = n \geq 2$ и нека $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots$, $a_0 \neq 0$. Тогава

$$P(x \pm 1) = a_0(x \pm 1)^n + a_1(x \pm 1)^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots$$

$$= a_0x^n + (a_1 \pm na_0)x^{n-1} + (a_2 \pm na_1 + n(n-1)a_0/2)x^{n-2} + \dots$$

и следователно

$$P(x-1)P(x+1) = a_0^2x^{2n} + 2a_0a_1x^{2n-1} + (a_1^2 + 2a_0a_2 - na_0^2)x^{2n-2} + \dots.$$

От друга страна,

$$P^2(x) = a_0^2x^{2n} + 2a_0a_1x^{2n-1} + (a_1^2 + 2a_0a_2)x^{2n-2} + \dots$$

и значи

$$1 > P^2(x) - P(x-1)P(x+1) = na_0^2x^{2n-2} + \dots.$$

Последното обаче не е вярно за всяко достатъчно голямо x, което е противоречие. Следователно $P(x) = ax + b$ и тогава $1 > P^2(x) - P(x-1)P(x+1) = a^2$, откъдето $a \in (-1, 1)$.

Задача 12.4. Да се намерят всички естествени числа a, b, c, за които уравнението $(x+y)^a(x^2+y^2)^b = 8(xy)^c$ има безбройно много решения в естествени числа.

Решение. Първо ще докажем, че ако (x, y) е решение на уравнението, то $x = y$.

Нека $a + b \geq 3$. От неравенствата $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ и $x^2 + y^2 \geq 2xy$ следва, че

$$8(xy)^c = (x+y)^a(x^2+y^2)^b \geq 2^{a+b}(xy)^{a/2+b} \geq 8(xy)^{a/2+b}.$$

Можем да считаме, че $xy > 1$ (иначе $x = y = 1$) и следователно $2c \geq a + 2b$. Нека $d = (x, y)$, $x = dx_1$, $y = dy_1$, като $(x_1, y_1) = 1$. Заместваме в даденото уравнение и получаваме

$$(x_1+y_1)^a(x_1^2+y_1^2)^b = 8d^{2c-a-2b}(x_1y_1)^c.$$

Тъй като $2c - a - 2b \geq 0$, следва, че x_1y_1 дели $(x_1+y_1)((x_1+y_1)^2 - 2x_1y_1)$. Това е невъзможно при $x_1y_1 > 1$, защото ако например $x_1 > 1$ и p е прост делител на x_1, то p дели $x_1 + y_1$, т.е. p дели y_1, което противоречи на $(x_1, y_1) = 1$. Следователно $x_1 = y_1$ и $x = y$.

Нека сега $a = b = 1$. Тогава $(x+y)(x^2+y^2) = 8(xy)^c$ и ако $c \geq 2$, както по-горе следва, че $x = y$. При $c = 1$ получаваме, че

$$8xy = (x+y)(x^2+y^2) \geq 2\sqrt{xy}2xy.$$

Оттук $xy \leq 4$ и лесно се вижда, че $x = y = 2$

От доказаното следва, че a, b, c имат исканото свойство тогава и само тогава, когато съществуват безбройно много естествени числа x, за които

$$(2x)^a(2x^2)^b = 8(x^2)^c,$$

т.е. $2^{a+b-3}x^{a+2b-2c} = 1$. Оттук $a + b = 3$, $a + 2b = 2c$ и значи $a = c = 2$, $b = 1$.

Задачите са предложени от:

Петър Бойваленков - 10.2., 10.3; Иван Тонов - 9.4.; Стоян Боев - 9.2., 10.1., 10.4.; Иван Ланджев - 9.3.; Керопе Чакърян - 9.1.; Александър Иванов - 11.2, 11.3; Емил Колев - 11.1, 11.4; Николай Николов - 12.2, 12.3; Олег Мушкаров - 12.1, 12.4.

Брошурата е подготвена от Емил Колев, Петър Бойваленков, Иван Ланджев и Николай Николов