ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
23 ОКТОМВРИ 2004 ГОДИНА

12 КЛАС

Задача 1. Дадена е функцията $f(x)=2x^2-(3m+4)x+m^2+m-6$, където m е реален параметър. Да се намерят стойностите на m, за които уравнението $f(x)=0$ има реални и различни корени. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $f(x)=0$, да се представи като функция на m изразът $x_1^2+x_2^2$ и да се намери най-малката му стойност.

Задача 2. Да се намерят всички реални числа x и y, за които са в сила условията: $5x-y$, $2x+3y$ и $x+2y$, в този ред, образуват аритметична прогресия; $(y+1)^2$, $xy+1$ и $(x-1)^2$, в този ред, образуват геометрична прогресия.

Задача 3. Дължините на страните на триъгълник образуват аритметична прогресия, а лицето му е равно на $\frac{4}{5}$ от лицето на равностранен триъгълник със същия периметър. Да се намери отношението на дължините на страните на дадения триъгълник.

Задача 4. Даден е ъгъл с връх O и точка M от вътрешността му. Права през точка M пресича раменете на ъгъла в точки A и B. Да се докаже, че произведението AM.BM е най-малко, когато триъгълникът OAB е равнобедрен.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
23 ОКТОМВРИ 2004 ГОДИНА

11 КЛАС

Задача 1. Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} \dfrac{-1}{\dfrac{8}{9-x^2}+1} \le 3-x \\[2ex] \dfrac{x^3-27}{x^2-9} < \dfrac{2x+9}{3} \end{array} \right.$.

Задача 2. Дадени са функциите $y=2-x^2$ и $y=2x+1$, графиките на които се пресичат в точки A и B, а O е началото на координатната система.
а) Намерете лицето на триъгълник OAB.
б) Ако точка C лежи на графиката на функцията $y=2-x^2$ така, че C и O са в различни полуравнини относно правата AB, намерете най-голямото възможно лице на триъгълник ABC.

Задача 3. Намерете стойностите на $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, ако

$$\sin\alpha+\cos\alpha.\cot g\alpha+\sin\alpha.tg\alpha+\cos\alpha=\frac{5}{12} \text{ и } \alpha\in\left(0^\circ,180^\circ\right).$$

Задача 4. Ъглополовящата на ъгъл ACB пресича описаната около триъгълник ABC окръжност в точка M.
а) Ако CM = CA + CB, докажете, че $\angle ACB=120^\circ$.
б) Нека точка N лежи върху отсечката CM и CN : NM = 1 : 2. Ако $CM=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(CA+CB\right)$, $\angle MBN=\angle ABC$ и периметърът на триъгълник ABC е равен на $1+\sqrt{3}$, намерете дължината на отсечката CM и лицето на четириъгълника AMBC.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
23 ОКТОМВРИ 2004 ГОДИНА

10 КЛАС

Задача 1. Да се пресметне числената стойност на израза

$$1+\left(\frac{x^2-9}{(x+2)(x^2+3x)}+\frac{x+3}{2x-x^2}\right):\frac{1}{4-x^2}, \text{ за } x=\frac{313}{213}.$$

Задача 2. Да се решат системите:

а) $\left|\begin{array}{l} 16x+6y-5xy=18 \\ 5x+3y-xy=9 \end{array}\right.$;

б) $\left|\begin{array}{l} \dfrac{2}{x+y}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}=k-1 \\ \dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{k}{2} \end{array}\right.$, където k е параметър и да се определят целите стойности на k, за които решението е двойка цели числа.

Задача 3. Външно за правоъгълния триъгълник ABC, с прав ъгъл при върха C, са построени квадратите ACMN и CBPQ. Височината към хипотенузата на триъгълник ABC я дели в отношение 3 : 5. Ако лицето на квадрата CBPQ е 20 cm^2 , да се пресметне лицето на квадрата ACMN.

Задача 4. Точката M е вътрешна за триъгълник ABC и е такава, че AM = BM. Външно за триъгълник ABC са построени равнобедрените триъгълници ACT и BCP с основи AC и BC, които са подобни на триъгълник ABM. Да се докаже, че:

а) триъгълниците AMT и ABC са подобни;

б) TM = CP;

в) TP разполовява CM.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
23 ОКТОМВРИ 2004 ГОДИНА

9 КЛАС

Задача 1. а) Да се опрости израза $F(x)=\left(\frac{x-4}{4x}+\frac{x-12}{4x-16}-\frac{x+4}{4x-x^2}\right):\frac{1}{2x}$.

б) Ако *f(x)* е опростеният вид на $F(x)$, да се построи графиката на функцията $y=f(x)$.

в) Да се реши неравенството $|f(x)|\leq 5$.

Задача 2. Един автомобил разходва 8 л бензин за изминаване на 100 км разстояние, а друг – 12 л за същото разстояние. Двата автомобила изминали общо 2400 км и са изразходвали 208 л бензин. По колко километра е изминал всеки от автомобилите?

Задача 3. Окръжностите k_1 и k_2 се пресичат в точки M и N, а отсечките AB и CD минават съответно през точки M и N, като A и C принадлежат на k_1, а B и D – на k_2 и отсечките AB и CD нямат обща точка. Да се докаже, че AC и BD са успоредни.

Задача 4. Даден е четириъгълникът ABCD, в който AD = BC. Точките M, P, N и K са средите съответно на AC, AB, BD и CD. Да се докаже, че:
а) четириъгълникът MPNK е ромб;
б) правата, която минава през средите на диагоналите на ABCD, образува равни ъгли с BC и AD.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
23 ОКТОМВРИ 2004 ГОДИНА

8 КЛАС

Задача 1. Да се докаже, че сумата от разстоянията на произволна точка от основата на равнобедрен триъгълник до бедрата му е равна на височината на триъгълника към бедрото му.

Задача 2. Плувец преплувал по течението на една река 1500 м за 22,5 минути. Ако плува срещу течението със същата скорост по отношение на водата, той ще остане неподвижен спрямо брега. За колко часа ще измине 5 км по тази река един сал?

Задача 3. Дължината на страната AB на успоредника ABCD е решение на уравнението $\frac{(2x+1)^2}{2}+\frac{10x-3}{6}=2(x-1)(1+x)-\frac{x-42}{3}$, а дължината на височината към CD е решение на уравнението $|4x-2|+|4x-2(x+0,5)|=9$. Ако P е вътрешна точка за успоредника ABCD, да се намери сумата от лицата на триъгълниците PAD и PBC.

Задача 4. Да се реши уравнението

$\frac{(-2x-1)^3+4(x+1)^2(2x-1)}{3}=\frac{4a^2+1}{6}-\frac{(x+1)(6,5+a)}{3}$, където a е параметър, и да се намерят стойностите на a, за които корените на уравнението са решения и на неравенството $|x+1|>\frac{1}{2}$.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
23 ОКТОМВРИ 2004 ГОДИНА

7 КЛАС

Задача 1. Пресметнете стойността на израза: $\left(\dfrac{5^2.6^2-5^2.6}{6^2.5^2+6^2.5}\right)^3.\left(\dfrac{6}{5}\right)^3$.

Задача 2. Ако $a : b = 2 : 3$ и $a + b = c$, да се пресметне стойността на израза $\dfrac{2a-b+3c}{6a+b-c}$.

Задача 3. Обиколката на един триъгълник е 58 см. Намерете дължините на страните му, ако $\dfrac{3}{4}$ от дължината на най-малката е равна на $\dfrac{2}{3}$ от дължината на средната и на $\dfrac{1}{2}$ от дължината на най-дългата.

Задача 4. Точките M и N са съответно от страните AB и AC на триъгълника ABC, като AM : MB = 3 : 4, AN : NC = 2 : 1, а P е средата на отсечката MC. Ако лицето на триъгълник ABC е 77 см^2, пресметнете лицето на триъгълник MNP.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
23 ОКТОМВРИ 2004 ГОДИНА

6 КЛАС

Задача 1. Сравнете по големина стойностите на изразите:
$A = 2004\frac{1}{2005}.2005 - 2003\frac{1}{2004}.2004$ и $B = \left(\frac{2.3.4.5.6}{3.10} - (3,231 + 1,231 - 2,462)\right) : \frac{8,54}{1,22}$.

Задача 2. За опаковане на подаръци панделка с дължина 7,56 м разделили на две части. Намерете дължината на всяка част, ако първата част е с 80% по-къса от втората част.

Задача 3. За приготвянето на 12 маслени пасти са необходими 6 яйца, 360 г брашно, 420 г захар и 120 г краве масло. Колко пасти могат да се приготвят от 15 яйца, 660 г брашно, 700 г захар и 250 г масло? Отговорът да се обоснове.

Задача 4. Правоъгълник има лице 600 см^2 и дължините на страните му са кратни на 5. Намерете броя на различните правоъгълници, удовлетворяващи това условие. Посочете дължините на страните на правоъгълника с най-малка обиколка.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
23 ОКТОМВРИ 2004 ГОДИНА

5 КЛАС

Задача 1. Да се намери неизвестното число, означено с буква:

$$x.2003:(1816+187).2004=0.$$

Задача 2. Кое от числата $a=93.356+93.194+550.17$ и

$$b=86.224+34.224+(420-20.15).276$$ е по-голямо?

Задача 3. Запишете най-голямото и най-малкото четирицифрени числа с помощта на цифрите 3, 4, 0 и 8, без тези цифри да се повтарят. Намерете сбора на тези две числа.

Задача 4. За Димитровденския маратон един състезател започнал подготовка на 1 октомври и пробягал 1 км, а всеки следващ ден пробягвал с 1 километър повече от предишния ден и приключил подготовката си на 23 октомври. Колко километра е пробягал състезателят през целия период?

Задача 5. Мечо Пух има три братовчедки – Роси, Боси и Чоси. Роси и Боси са общо на 7 години, Боси и Чоси – общо на 9 години, а Роси и Чоси – общо на 8 години. Колко е произведението от годините на трите?

Задача 6. Лицето на правоъгълник е два пъти по-голямо от лицето на квадрат с обиколка 36 см. Намерете обиколката на правоъгълника, ако едната му страна е 27 см.

Задача 7. При покриване на тротоар, широк 2 м, работници наредили 180 квадратни плочки със страна 2 дм. Плочките не стигнали за целия тротоар и останал правоъгълен участък, дълъг 2м 5дм. Да се намери лицето на целия тротоар. Колко плочки са били необходими за целия тротоар?

Задача 8. Разстоянието от град Видин до град Русе е 400 км. От Видин за Русе едновременно тръгват сал и параход. Параходът пристигнал в Русе и веднага потеглил обратно. След 20-часово пътуване двата плавателни съда се срещнали. Намерете скоростта на сала, ако се знае, че скоростта на парахода в спокойна вода е три пъти по-голяма от тази на сала, при това параходът е пътувал в двете посоки едно и също време.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
23 ОКТОМВРИ 2004 ГОДИНА

4 КЛАС

Задача 1. Пресметнете: $(126.7):9-98+(384+477):(49:7)$.

Задача 2. Да се сравнят по големина числата a, b и c, ако

$$3.a=522-219;\ b:3=1000-966;\quad 412:c=4\ .$$

Задача 3. Ана и Бояна имат общо 117 лв, а Бояна и Мая имат общо 210 лв. Ана, Бояна и Мая имат общо 229 лв. Колко лева има Бояна?

Задача 4. Любо прочел част от книгата “Хари Потър и стаята на тайните” за 3 дни, а останалите 185 страници от нея – за 5 дни. Любо прочитал по един и същи брой страници на ден. Колко страници има книгата?

Задача 5. Червената шапчица носела на баба си баница за 1 лв 20 ст в кошница, която струвала с 90 ст повече от баницата. Вълкът изял баницата и счупил кошницата. Докато бягала от него, Червената шапчица си изгубила шапката, която струвала 5 пъти повече от баницата. Ловците убили вълка и продали кожата му за 96 лв. Колко лева останали за ловците, след като възстановили точно загубите на Червената шапчица?

Задача 6. Разстоянието между два града е 584 км. От тях едновременно един срещу друг тръгнали два камиона. Единият камион се движи със скорост 79 км/ч, а другият – с 12 км/ч по-бавно. След колко часа двата камиона са се срещнали?

Задача 7. Квадрат има страна 32 дм. Намерете лицето на правоъгълник, ако едната му страна е 34 дм, а обиколката му е равна на обиколката на квадрата.

Задача 8. Врата има форма на правоъгълник с размери 80 см и 2м. На нея е изрязано правоъгълно прозорче с размери 5 дм и 2 дм. Намерете колко боя е необходима за боядисването на вратата от двете страни, ако за 1 кв. дм се изразходват 3 г боя.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА