ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
22 ОКТОМВРИ 2005 ГОДИНА

12 КЛАС

Задача 1. Докажете тъждеството $3-4\cos(2\alpha-3\pi)-\cos(5\pi+4\alpha)=8\cos^4\alpha$.

Задача 2. а) Да се докаже, че $\sqrt{5}\le\sqrt{3+x}+\sqrt{2-x}\le\sqrt{10}$ за всяка допустима стойност на x.

б) Да се реши уравнението $32\sqrt{6-x-x^2}-88\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{2-x}\right)+197=0$.

Задача 3. Намерете първия член на аритметична прогресия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, за която числата 1 и 2 се срещат сред пет последователни члена и $\left|a_6-\sqrt{2}\right|$ е възможно най-малко.

Задача 4. Даден е трапец ABCD (AB||CD). Точките M и N са среди съответно на бедрата AD и BC.

а) Докажете, че $S_{AND}=S_{BMC}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

б) Докажете, че ако $\angle AND=\angle BMC$, то AD = BC.

в) Ако $\angle AND=90^\circ$, $\angle BMC=60^\circ$, $AB=4$, $CD=2$ намерете дължините на AD и BC.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
22 ОКТОМВРИ 2005 ГОДИНА

11 КЛАС

Задача 1. Решете неравентвото: $\dfrac{x^4-4x^2+3}{1+x^2-x-x^3}\leq 0$.

Задача 2. Нека a е реален параметър и $a>0$. Намерете тези стойности на a, за които най-малката стойност на функцията $f(x)=ax^2+x+1$ в интервала $[-2,2]$ е равна на $-\dfrac{1}{2}$.

Задача 3. Триъгълник ABC е вписан в окръжност с радиус R. Върху лъчите $AB^{\rightarrow}$ и $AC^{\rightarrow}$ са избрани съответно точките M и N такива, че разстоянието от M до правата AC е равно на дължината на отсечката AC, а разстоянието от N до правата AB е равно на дължината на отсечката AB. Докажете, че триъгълниците AMN и ABC са подобни и пресметнете дължината на отсечката MN.

Задача 4. В триъгълник ABC $AB=3$, $AC=2$ и $\angle ACB=60°$. CN е ъглополовяща на външен ъгъл при върха C на триъгълник ABC, като N е от правата AB. Да се пресметнат дължините на отсечките BC, BN и CN.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
22 ОКТОМВРИ 2005 ГОДИНА

10 КЛАС

Задача 1. Да се намери числената стойност на израза

$$A=\frac{x}{y^2-1}+\left(\frac{y-x}{y^2+x^2}-\frac{2xy}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}\right).\left(1-\frac{x+y}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right),$$ ако x и y

удовлетворяват системата $\left|\begin{array}{l}\dfrac{5}{x^2+5xy}+\dfrac{7}{xy+5y^2}-\dfrac{2}{xy}=\dfrac{10}{x^2y+5xy^2}\\ \dfrac{3x-y-10}{2}=\dfrac{3x+y-15}{3}\end{array}\right.$.

Задача 2. Дадено е квадратното уравнение $(m-2)x^2-(2m+1)x+m-1=0$.

а) Намерете стойностите на параметъра m, за които корените на уравнението са реални и различни.

б) Намерете стойностите на параметъра m, за които корените на уравнението удовлетворяват равенството $x_1^2+x_2^2=x_1x_2^2+x_1^2x_2$.

в) Намерете рационалните стойности на параметъра m, за които корените на уравнението са цели числа.

Задача 3. Около окръжност k с център O е описан равнобедрен трапец ABCD (AB||CD). Нека M е допирната точка на k с бедрото BC.

а) Докажете, че $OM^2=BM.CM$.

б) Намерете лицето на трапеца, ако AB = 12 см, CD = 6 см.

Задача 4. Триъгълник ABC е равнобедрен AC = BC < AB, AL е негова ъглополовяща $(L\in BC)$, а MN е средна отсечка $(M\in AC\,, N\in BC)$. Да се намери периметърът на триъгълник ABC, ако CL : LB = 5 : 8 и $PM-PN=12$, където P е пресечната точка на AL и MN.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
22 ОКТОМВРИ 2005 ГОДИНА

9 КЛАС

Задача 1. Ако (a,b) е решението на системата $\left|\begin{array}{l}\dfrac{2x-y+3}{3}-\dfrac{x-2y+3}{4}=4\\ \dfrac{3x-4y+3}{4}+\dfrac{4x-2y-9}{3}=4\end{array}\right.$, да се пресметне стойността на израза $\left(\dfrac{6}{\sqrt{a}-2}+\dfrac{8}{\sqrt{b}-3}-\dfrac{4}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}\right).\dfrac{2}{2\sqrt{a}-1}$.

Задача 2. Точка M е среда на страната BC на успоредник ABCD, а P е пресечната точка на AM с BD. Лицето на триъгълника BPM е $1\,cm^2$. Да се намери лицето на успоредника ABCD.

Задача 3. Да се докаже, че ако a, b и c са дължини на страните на триъгълник, то уравнението $b^2x^2+\left(b^2+c^2-a^2\right)x+c^2=0$ няма реални корени.

Задача 4. Отсечката AB е хорда в окръжност, а C е средата на по-малката дъга AB. Хордите CD и CE пресичат AB съответно в точките M и N. Да се докаже, че:
а) около четириъгълника с върхове точките D, E, N и M може да се опише окръжност;
б) ако AN = BM, четириъгълникът с върхове точките D, E, N и M е трапец.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
22 ОКТОМВРИ 2005 ГОДИНА

8 КЛАС

Задача 1. Да се реши неравенството $\dfrac{(x+1)^3}{3}-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{3x^2+7}{\dfrac{3}{2}}\right)\le\dfrac{2x^3+3x}{6}$ и да се провери дали числото $n=\dfrac{2{,}5.2005+2004.2{,}5}{2005^2-2004^2}+\dfrac{25^3.6^5}{(-2)^6.15^5}$ е решение на неравенството.

Задача 2. Разстоянието между два града A и B е 111 км. В 6 часа и 36 минути от A за B тръгнал велосипедист, а 39 минути по-късно от B за A тръгнал друг велосипедист. Да се намери скоростта на всеки от велосипедистите, ако е известно, че са се срещнали в 12 часа на обяд същия ден и скоростта на втория велосипедист е с 20 % по-голяма от скоростта на първия.

Задача 3. В успоредника ABCD мерките на ъглите при върховете B и C се отнасят както 1 : 2. Медианата CM на триъгълник ABC $(M\in AB)$ има дължина k и е ъглополовяща на ъгъл BCD. Диагоналът AC пресича MD в точка P. Да се намери периметърът на ABCD и отношението MP : PD. Да се докаже, че $DM+CA>3k$.

Задача 4. За кои стойности на параметъра a уравненията
$(-x+1)^2-(a-2)^2-a(a-x-1)=3-(a-x)(x+a)$ и $3ax-1=x-\left|4x(3a+x)-(3a+2x)^2\right|$ са равносилни?

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
22 ОКТОМВРИ 2005 ГОДИНА

7 КЛАС

Задача 1. Да се намери между кои две цели числа се намира числената стойност на израза $\left(\dfrac{\left(6-4\dfrac{1}{2}\right):0{,}03}{\left(3\dfrac{1}{20}-2{,}65\right).4+\dfrac{2}{5}}-\dfrac{\left(0{,}3-\dfrac{3}{20}\right).1\dfrac{1}{2}}{\left(1{,}88+2\dfrac{3}{25}\right).\dfrac{1}{80}}\right):2{,}1$.

Задача 2. На спортен празник 75% от учениците от един клас взели участие в състезанието по волейбол, а останалите в турнира по футбол. След празника $\frac{1}{3}$ от волейболистите и $\frac{5}{7}$ от футболистите отишли на кино, като учениците от едната група били с двама повече. Колко са учениците в този клас?

Задача 3. Три бригади започнали едновременно оран. Установената по план ежедневна норма за I бригада се отнася към нормата на II бригада както 5 : 4, а II : III – както 2 : 1,5 . Първа бригада увеличила ежедневната си норма с 10%, II – с 20%, III – с 10%. В резултат, за едно и също време, първа бригада изорала 14 хектара повече от втора бригада. По колко хектара е изорала всяка от бригадите за това време?

Задача 4. Да се изобразят точките $M(0;-6)$, $N(-6;0)$ и $P(6;-6)$ в правоъгълна координатна система.
а) Да се намери лицето на триъгълник MNP.
б) Да се намери обемът на тялото, получено от завъртането на триъгълник MNP около MP.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
22 ОКТОМВРИ 2005 ГОДИНА

6 КЛАС

Задача 1. Стойността на израза $A = 32.0{,}997.25.1{,}25 - 57.5.\frac{2}{3}.25.\frac{1}{19}$ да се раздели на решението на уравнението $\left(5 - 3\frac{2}{9}\right).x = \frac{2}{3} + 23:1{,}5$. Да се сравнят полученото частно и разликата на най-малкото общо кратно на числата 21 ; 12 и 14 и естествено число, което не е нито просто, нито съставно.

Задача 2. Ученик трябвало да реши 105 задачи за четири дни. През първия ден той решил $\frac{1}{5}$ от всичките задачи. През втория ден решил $\frac{1}{3}$ от останалите и те били с 12,5% по-малко от решените през третия ден. Колко задачи е решил този ученик през четвъртия ден?

Задача 3. Върху страните на правоъгълен триъгълник външно са построени квадрати. Да се намерят обиколката и лицето на получената фигура, ако катетите са 3 см и 4 см, а хипотенузата е 5 см.

Задача 4. Да се намери броят на трицифрените числа, които:
а) в записа си не съдържат нула и сборът от цифрите е 5;
б) в записа си може да съдържат нула и сборът от цифрите е 5;
в) не се делят на 13.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
22 ОКТОМВРИ 2005 ГОДИНА

5 КЛАС

Задача 1. Да се намери разликата $A-B$, ако $A=11+22+33+44+55+66+77+88+99$ и $B=9+20+31+42+53+64+75+86+97$.

Задача 2. Да се намерят числата a, b и c, ако $a=\left(42444:2-6073.3\right):3$, $b=\left(250.4-666\right).3$, $111111-c=110112$. Кое число трябва да се прибави към c, за да се получи сборът на числата a и b?

Задача 3. При деление на едно число с 15 Боби получил частно 433 и остатък 14. Като направил проверка забелязал, че при преписването на числото е разменил цифрите на стотиците и единиците. Кое число е трябвало да дели Боби и кое е вярното деление?

Задача 4. Сборът от дължините на реките Искър и Марица е 873 км, на Марица и Струма – 864 км, на Струма и Искър – 793 км. По колко километра е дълга всяка от реките Искър, Марица и Струма?

Задача 5. Пипи украсила стаята си с 15 балончета – зелени, червени и сини. Броят на зелените балончета бил 7 пъти по-голям от броя на сините. Колко са червените балончета?

Задача 6. Вълк, заек и горичка се намират на прав път в този ред. Вълкът забелязва заека на 22 метра от себе си и хуква след него. За времето за което вълкът прави един скок от 5 метра, заекът прави един скок от 3 метра. Ще успее ли заекът да се скрие от вълка в горичката, към която тича, ако тя е на 21 метра от него в момента в който вълкът го забелязва?

Задача 7. Дължината на страната на правоъгълник е равна на 15 см, а лицето му на 135 кв.см. Да се намери лицето на квадрат, чийто периметър е равен на периметъра на правоъгълника.

Задача 8. Учениците от четвърти и пети класове в едно училище са общо 227. На състезание по математика всеки четвъртокласник решил по 5 задачи, а всеки петокласник – по 7 задачи. Общо били решени 1375 задачи. Намерете колко са учениците от четвърти клас и колко задачи общо са решили петокласниците.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА

ДИМИТРОВДЕНСКО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – ГРАД ВИДИН
22 ОКТОМВРИ 2005 ГОДИНА

4 КЛАС

Задача 1. Пресметнете стойността на израза: $\left(315.3-910:7\right)-\left(854:7+732:4\right)$.

Задача 2. Намерете x от равенството $a:x+b=c$, ако $a.5=90$, $b=702:3$ и $c=\left(402-375\right).9$.

Задача 3. На излизане от зоологическата градина Митко казал: „Когато гледах мечките, лъвовете, дивите кози и щъркелите запомних, че краката им общо са 56, рогата им са 6 , крилата им са 12, а лъвовете са с 2 повече от мечките.”
По колко животни от всеки вид е видял Митко?

Задача 4. Татко Барба решил да номерира бурканите в килера. Той използвал всички числа от 1 до 30, но за нещастие сбъркал и написал два пъти числото 23, три пъти числото 5 и четири пъти числото 12. Колко буркана е номерирал татко Барба?

Задача 5. Иво прави сандвичи като разполага с три продукта: кашкавал, салам и шунка. На всеки сандвич слага от един, от два или от трите продукта. Колко различни вида сандвичи може да приготви?

Задача 6.

B		4
C	10	
16	2	A

В магическия квадрат сборът на числата във всеки ред, стълб и диагонал е един и същ. Попълнете квадрата с липсващите числа и намерете сбора $A+B+C$.

Задача 7. Иван и Петър се намират на 75 км разстояние и тръгват един срещу друг едновременно. Иван върви пеша със скорост 5 км в час, а Петър кара велосипед със скорост 10 км в час. След колко часа:
а) двамата ще се срещнат; б) разстоянието между тях ще бъде 15 км?

Задача 8. Храбрият шивач имал правоъгълна маса с дължина 9 дм и ширина 6 дм. Той ушил покривка, която висяла по 2 дм от всяка страна на масата. Ако иска да постави дантела по края на покривката, колко метра дантела трябва да купи?

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА 3 ЧАСА