Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

Пролетни математически състезания

Русе, 1 – 3 април 2016 г.

София, 2016 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 9.1. Да се намерят всички двойки реални числа (a, b), за които квадратните уравнения $ax^2 + bx + 2016 = 0$ и $bx^2 + ax + 2016 = 0$ имат общ реален корен.

Решение. Ако x_0 е общ реален корен на дадените уравнения, то

$$ax_0^2 + bx_0 + 2016 = bx_0^2 + ax_0 + 2016 = 0,$$

откъдето $(a - b)(x_0^2 - x_0) = 0$.

Ако $a = b \neq 0$, то двете уравнения съвпадат и остава да проверим кога общите им корени са реални. Имаме $a^2 - 8064a \geq 0 \iff a \in (-\infty, 0] \cup [8064, +\infty)$. Ако $a \neq b$, то за общия корен имаме $x_0^2 - x_0 = 0$, т.е. $x_0 = 0$ или $x_0 = 1$. Първата възможност очевидно отпада, а втората дава $a + b + 2016 = 0$, т.е. $b = -2016 - a$ при $a \neq -1008$.

Окончателно, търсените двойки са (a, a), където $a \in (-\infty, 0) \cup [8064, +\infty)$ и $(a, -2016 - a)$ при $a \neq 0, -2016, -1008$.

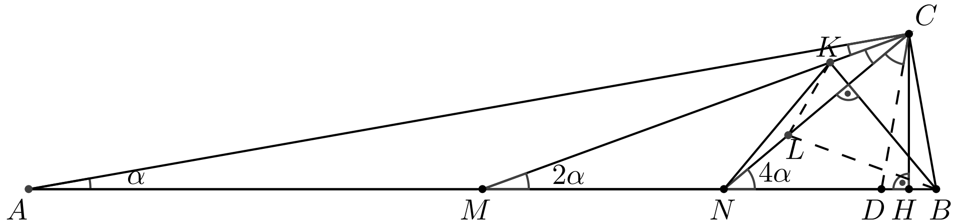
Оценяване. (6 точки) 1 т. за получаването на $(a - b)(x_0^2 - x_0) = 0$; 3 т. за случая $a = b$ (от тях 2 т. за разглеждане и решаване на $a^2 - 8064a \geq 0$); 2 т. за случая $a \neq b$.

Задача 9.2. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, височина CH и медиана CM. Точка N от отсечката MH е такава, че $MN = NC$ и $NH = HB + BC$.

а) Да се намери $\sphericalangle BAC$;

б) Ако точка K от отсечката MC е такава, че $KB \perp NC$, то да се намери $\sphericalangle KNC$.

Решение.



а) Нека точка D от отсечката NH е такава, че $ND = BC$; тогава $DH = HB$ и $\triangle DHC \cong \triangle BHC$ по първи признак. Тогава $DC = BC = ND$ и от свойството на медианата $CM = AM = BM$. Ако $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACM = \alpha$, то $\sphericalangle CMB = 2\alpha$ като външен. Тогава $\sphericalangle MCN = 2\alpha$ и $\sphericalangle CNB = 4\alpha$ като външен, $\sphericalangle NCD = 4\alpha$ и $\sphericalangle CDB = 8\alpha$ като външен. Следователно $\sphericalangle ABC = 8\alpha$ и $9\alpha = 90^\circ$, така че $\alpha = 10^\circ$.

б) Нека точка L от отсечката NH е такава, че $\sphericalangle CBL = 60^\circ$; тогава $\triangle BCL$ е равностранен и $K \in s_{CL}$. Така $\sphericalangle KLC = \sphericalangle KCL = \sphericalangle NMC$ и следователно четириъгълникът $LKMN$ е вписан. Имаме $\triangle BLM \cong \triangle CLM$ по трети признак, така че $\sphericalangle KNC = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{LK} = \sphericalangle LMN = \frac{1}{2}\sphericalangle BMC = 10^\circ$.

Оценяване. (6 точки) а) 1 т. за построяване на точката D; 2 т. за намиране $\sphericalangle BAC = 10^\circ$; б) 1 т. за построяване на равностранния $\triangle BCL$; 1 т. за факта, че четириъгълникът $LKMN$ е вписан; 1 т. за $\sphericalangle KNC = 10^\circ$.

Задача 9.3. Съществуват ли естествени числа m и n, за които

$$x^2 + (-1)^m x + 2 = 4^n + 15n$$

за някое цяло число x?

Решение. Да допуснем, че такива числа съществуват. Ще докажем с индукция по n, че $A_n = 4^n + 15n - 1$ се дели на 9 за всяко естествено n. Имаме $A_1 = 18$, $A_{n+1} = 4.4^n + 15(n+1) - 1 = A_n + 3(4^n + 5)$ и е достатъчно да забележим, че $4^n + 5 \equiv 1^n - 1 \equiv 0 \pmod 3$.

Следователно $x^2 + (-1)^m x + 1 \equiv 0 \pmod 9$, откъдето $(2x + (-1)^m)^2 \equiv -3 \pmod 9$. Оттук следва, че $2x + (-1)^m$ се дели на 3 и тогава $-3 \equiv (2x + (-1)^m)^2 \equiv 0 \pmod 9$, което е невъзможно.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за разглеждане по модул 9; 3 т. за доказване, че $9|4^n + 15n - 1$; 2 т. за получаване на $(2x + (-1)^m)^2 \equiv -3 \pmod 9$; 1 т. за довършване на решението.

Задача 9.4. Дадено е естествено число $n \geq 3$. Естествените числа от 1 до n са записани по окръжност, така че всяко от тях се дели на разликата на своите два съседа.

а) Ако n е едноцифрено, определете всичките му възможни стойности.

б) Възможно ли е $n = 2016$?

в) Възможно ли е $n = 2017$?

Решение. Нечетно число може да се намира само между числа с различна четност, така че нечетните числа са групирани по двойки, оградени с четни. Тогава броят на нечетните числа от 1 до n е четен, което изключва случаите $n = 5$, 6, 9, 2017.

При $n = 3$ наредбата е 1, 2, 3. При $n = 4$ наредбата е 1, 3, 2, 4. При $n = 7$ наредбата е 1, 4, 3, 7, 2, 6, 5.

Ако n се дели на 4, $n = 4k$, $k \geq 2$, то можем да подредим числата така: $2k - 1$, $4k$, $2k$, $4k - 2$, 1, $4k - 1$, следвани от двойките числа j, $4k - j - 1$ за $j \in \{2, 3, ..., 2k - 2\}$. Там, където числата през едно имат разлика 1, условието явно е изпълнено. Остава да се уверим, че $2k - 1$ се дели на $4k - (2k + 1) = 2k - 1$, $2k$ се дели на $4k - (4k - 2) = 2$, $4k - 2$ се дели на $2k - 1$ и че 2 се дели на $4k - 1 - (4k - 3) = 2$. Това решава случаите $n = 8$ и $n = 2016$.

Оценяване. (7 точки) 0 т. за случая $n = 3$; по 0,5 т. за всеки от случаите $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, $n = 9$; 1 т. за случая $n = 7$; 1 т. за случая $n = 8$; 2 т. за случая $n = 2016$; 1 т. за случая $n = 2017$.

Задача 10.1. Ако $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$, то намерете $\sin\beta$.

Решение. Нека $\sin\beta = x$. От $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ следва, че $\cos\beta = \sqrt{1 - x^2}$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Тогава

$$\frac{3}{5} = \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha = \frac{4}{5}\sqrt{1 - x^2} - \frac{3}{5}x$$

и достигаме до уравнението

$$3x+3=4\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow 9(x+1)^2=16(x^2-1) \Leftrightarrow (x+1)(25x-7)=0.$$

Остава да съобразим, че $x \in (0,1)$ и единственото решение е $x=\dfrac{7}{25}$, т.е. $\sin\beta=\dfrac{7}{25}$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за определяне на $\cos\alpha$ и $\cos\beta$; 1 т. за достигане до ирационалното уравнение; 2 т. за решаването му; 1 т. за отхвърляне на случая $x=-1$.

Задача 10.2. Да се намерят стойностите на реалния параметър $a>2$, за които неравенството

$$(ax-1)^{6x^2-(2a+3)x+a}<1.$$

има точно едно целочислено решение.

Решение. Нека $0<ax-1<1$. Тогава $x \in \left(\dfrac{1}{a},\dfrac{2}{a}\right)$. Но този интервал не съдържа цели числа. Следователно, $ax-1>1$, т.е. $x>\dfrac{2}{a}$. Тогава неравенството се свежда до

$$6x^2-(2a+3)x+a<0 \Leftrightarrow (2x-1)(3x-1)<0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2},\frac{a}{3}\right).$$

За разположението на числата $\dfrac{2}{a}$, $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{a}{3}$ имаме следните възможности:

(i) $1/2<a/3 \leqq 2/a$ при $a \in (2,\sqrt{6}]$;

(ii) $1/2<2/a<a/3$ при $a \in (\sqrt{6},4)$;

(iii) $2/a \leqq 1/2 < a/3$ при $a \in [4,+\infty)$.

В случай (i) няма решение. В случай (ii) имаме $x \in \left(\dfrac{2}{a},\dfrac{a}{3}\right)$, откъдето $a \in (3,4)$. Накрая в случай (iii) $x \in \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{a}{3}\right)$, откъдето $a \in [4,6]$. Окончателно $a \in (3,6]$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за отхвърляне на случая $0<ax-1<1$; 1 т. за $x>\dfrac{2}{a}$ и $x \in \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{a}{3}\right)$; по 1 т. за случаи (i), (ii) и (iii); 1 т. за окончателния отговор.

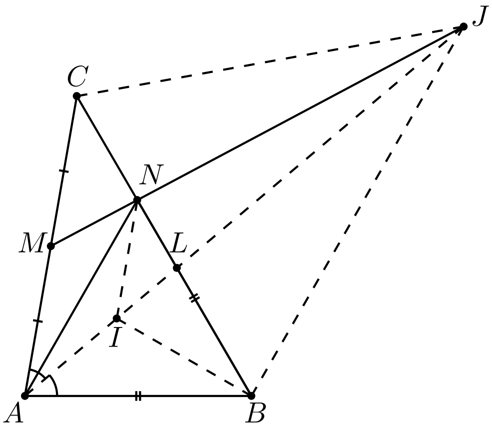
Задача 10.3. Даден е $\triangle ABC$ с център J на външновписаната окръжност към страната BC. Нека M е средата на страната AC и MJ пресича страната BC в точка N. Ако е известно, че $AB=BN$, то да се докаже, че $\sphericalangle BAC=2\sphericalangle ACB$.

Решение. Нека I е центъра на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. От $AM = CM$ следва, че $S_{ANJ} = S_{CNJ}$. Тогава

$$\frac{CN}{NL} = \frac{S_{CNJ}}{S_{LNJ}} = \frac{S_{ANJ}}{S_{LNJ}} = \frac{AJ}{LJ} = \frac{S_{ABJ}}{S_{LBJ}} = \frac{AB.r_a}{BL.r_a} = \frac{AB}{BL},$$

където r_a е радиусът на външновписаната окръжност към страната BC. Така достигаме до извода, че

$$\frac{CN}{NL} = \frac{AB}{BL} \Rightarrow AC \parallel IN.$$



От друга страна, BI е ъглополовяща в равнобедрения $\triangle ANB$ и следователно I лежи на симетралата на AN, но CI е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$, т.е. I лежи на описаната окръжност около $\triangle ANC$. Така достигаме до извода, че $ACNI$ е трапец, вписан в окръжност, т.е. той е равнобедрен и $\sphericalangle BAC = 2\sphericalangle IAC = 2\sphericalangle ACB$.

Оценяване. (7 точки) 4 т. за $ACNI$ - трапец; 2 т. за $ACNI$ - вписан; 1 т. за довършване на решението.

Задача 10.4. Дадена е редица от цели числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с положителна сума s. Казваме, че редицата $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е добра, ако са изпълнени неравенствата

$$\begin{aligned} a_1 &\geqq \left[\frac{s}{n}\right] \\ a_1 + a_2 &\geqq \left[\frac{2s}{n}\right] \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} &\geqq \left[\frac{(n-1)s}{n}\right]. \end{aligned}$$

Да се намери максималния възможен брой добри редици измежду:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n), (a_2, a_3, \ldots, a_1), \ldots, (a_n, a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

(С [x] означаваме най-голямото цяло число, което е по-малко или равно на x.)

Решение. Разглеждаме безкрайната редица

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1, \ldots.$$

и построяваме начупената линия с върхове

$$(0, 0), (1, a_1), (2, a_1 + a_2), (3, a_1 + a_2 + a_3), \ldots.$$

Очевидно, ако $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ е добра, то начупената линия е изцяло над правата $y = sx/n$. Ако редицата $(a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i-1})$ е добра, то точката лежи върху тази права. Така търсеният брой е НОД(s, n). Лесно се строи пример, за който тази стойност се достига.

Оценяване. (7 точки) 5 т. за намиране на броя и 2т. за построяване на пример.

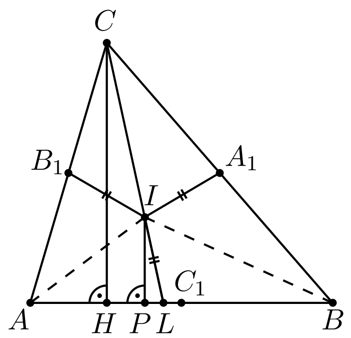
Задача 11.1. Числата $a_1 = 0$, a_2, a_3, a_4 и a_5 образуват в този ред аритметична прогресия с разлика d, $0 < d < 180$. Да се намери a_2, ако числата $|\sin a_1^\circ|, |\sin a_3^\circ|, \sqrt{2}|\sin a_4^\circ|, \sqrt{3}|\sin a_5^\circ|$ са различни и са последователни членове на аритметична прогресия.

Решение. От условието следва, че $a_2 = d$, $a_3 = 2d$, $a_4 = 3d$ и $a_5 = 4d$. Тогава числата $0, |\sin 2d|, \sqrt{2}|\sin 3d|, \sqrt{3}|\sin 4d|$ са последователни членове на аритметична прогресия. Следователно $3|\sin 2d| = \sqrt{3}|\sin 4d|$, откъдето $\sin 2d(\sqrt{3} - 2|\cos 2d|) = 0$.

Ако $\sin 2d = 0$, то числата от втората прогресия не са различни. Ако $\cos 2d = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то $d = 15, 75, 105, 165$. Директно се проверява, че при всяка от тези стойности на d се получава решение.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за $a_2 = d$, $a_3 = 2d$, $a_4 = 3d$ и $a_5 = 4d$; 1 т. за $3|\sin 2d| = \sqrt{3}|\sin 4d|$; 3 т. за получаване на $d = 15, 75, 105, 165$; 1 т. за проверка, че всеки от тези случаи дава решение.

Задача 11.2. В остроъгълен $\triangle ABC$, $BC > AC$ е вписана окръжност k с център I. Нека CH, $H \in AB$ и CL, $L \in AB$ са съответно височината и ъглополовящата от върха C, а точките A_1, B_1 и C_1 са средите съответно на BC, AC и AB. Ако допирната точка на k със страната AB е среда на отсечката HC_1, да се докаже, че I е център на описаната окръжност за $\triangle LA_1B_1$.



Решение. Да означим допирната точка на k и страната AB с P. При стандартни означения за триъгълник имаме $AC_1 = \dfrac{c}{2}$, $AH = b\cos\alpha$ и $AP = \dfrac{b+c-a}{2}$. Тъй като P е среда на HC_1 получаваме $AC_1 - AP = AP - AH$, откъдето намираме:

$$a - b = \frac{c}{2} - b\cos\alpha.$$

След заместване $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ получаваме $a + b = 2c$. От това равенство намираме $AL = \dfrac{cb}{a+b} = \dfrac{b}{2}$ и $\triangle ALI \cong \triangle AB_1I$. Аналогично $\triangle BLI \cong \triangle BA_1I$. Следователно $IL = IB_1 = IA_1$.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за получаване на $a + b = 2c$; 3 т. за $IL = IB_1 = IA_1$.

Задача 11.3. Нека A е множеството от всички четирицифрени числа, записани с цифрите 1, 2 или 3, като последната цифра не е 3. Нека B е множество от четирицифрени числа със следното свойство: за всяко число a от A съществува число b от B, което се различава от a в най-много една позиция. Да се намери най-малкия възможен брой елементи на B.

Решение. Директно се проверява, че множеството:

$$\{1111, 2221, 3331, 1321, 3211, 2131, 1232, 2312, 3122\}$$

има исканото свойство.

Да допуснем, че съществува множество B с 8 числа. От принципа на Дирихле следва, че без ограничение можем да приемем, че броят на числата в B с първа цифра 3 е не повече от 2. От всяко такова число с промяна на втората, третата или четвъртата цифра можем да получим 5 други числа (втората и третата цифра могат да се променят по два начина, а третата цифра по един). Следователно число с първа цифра 3, *покрива* 6 числа (към горните пет числа прибавяме и самото число) и тъй като имаме 18 числа с първа цифра 3 получаваме, че числата с първа цифра 1 или 2 са поне $18 - 12 = 6$. Понеже в B има 8 числа заключаваме, че има две числа с първа цифра 3 и не съществува число, което се различава от всяко от тези две числа в една цифра. Без ограничение двете числа с първа цифра 3 са 3111 и 3222. Тогава в B трябва да има числа $a331, b321, c231, d132, e312, f332$ където всяко от числата a, b, c, d, e, f е 1 или 2. Тъй като $|B| = 8$ получаваме

$$M = \{3111, 3222, a331, b321, c231, d132, e312, f332\}$$

Числата 1121 и 2121 могат да се различават в една цифра само от числото $b321$. Ако $b = 1$ числото 2121 няма да е покрито от число от B, а ако $b = 2$ числото 1121 няма да е покрито от число от B.

Следователно търсеният минимален брой е 9.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за пример с 9 числа; 5 т. за доказателство, че $|B| > 8$.

Задача 11.4. Нека n е естествено число и P_n е множеството от всички наредени двойки от естествени числа (a, b), за които $1 \le a \le n$, $1 \le b \le n$ и a и b не са взаимно прости. Означаваме

$$S_n = \sum_{(a,b)\in P_n} \binom{n}{a}\binom{n}{b} \text{ при } n > 1.$$

Съществува ли естествено число $n > 1$, което дели S_n?

Решение. Първо ще докажем, че ако $(a, b) = 1$, то n дели $\binom{n}{a}\binom{n}{b}$. Наистина, ако $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, то всяко от простите числа p_i е взаимно просто с a или с b. Ако $(p_i, a) = 1$ от равенството $\binom{n}{a} = \frac{n}{a}\binom{n-1}{a-1}$ следва, че $p_i^{\alpha_i}$ дели $\binom{n}{a}$.

Да допуснем, че n дели S_n. Тогава от

$$(2^n - 1)^2 = \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}\right)^2$$

и от горното твърдение следва, че n дели $(2^n - 1)^2$. Оттук следва, че n е нечетно число и нека p е най-малкия прост делител на n, а α е степента на p в каноничното разлагане на n

на прости множители, т.е. $n = p^\alpha s$ и $p \nmid s$. Тогава p дели $(2^s)^{p^\alpha} - 1$, откъдето получаваме, че p дели $2^s - 1$. Това означава, че $(p-1, s) \neq 1$, което е противоречие с това, че p е най-малкия прост делител на n и n е нечетно число. Следователно такова n не съществува.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за доказателство, че ако $(a, b) = 1$, то n дели $\binom{n}{a}\binom{n}{b}$; 3 т. за доказателство, че n дели $(2^n - 1)^2$; 2 т. за довършване на решението.

Задача 12.1. Виж задача 11.2

Задача 12.2. Да се реши неравенството $\dfrac{6}{2x+1} > \dfrac{1 + \log_2(2+x)}{x}$.

Решение. Неравенството има смисъл при $x \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0 + \infty)$.

Случай 1. При $x > 0$ неравенството е еквивалентно на $\dfrac{4x-1}{2x+1} > \log_2(2+x)$. Тъй като $\dfrac{4x-1}{2x+1} \leq 1 < \log_2(2+x)$ при $x \in (0, 1]$, да разгледаме $x \in (1, +\infty)$. Функцията $\dfrac{4x-1}{2x+1}$ расте от 1 до 2 в този интервал и понеже $\log_2(2+x) \geq 2$ при $x \geq 2$, остава да разгледаме $x \in (1, 2)$. В този интервал имаме $\log_2(2+x) \geq \log_2 \dfrac{3}{2}$, докато $\dfrac{4x-1}{2x+1} \leq \dfrac{7}{5}$. Тъй като $\log_2 \dfrac{3}{2} > \dfrac{7}{5}$, неравенството няма решение и в този интервал.

Случай 2. При $x \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ неравенството се преобразува в $\dfrac{4x-1}{2x+1} < \log_2(2+x)$. Имаме $\log_2(2+x) < 1$, докато $\dfrac{4x-1}{2x+1} > 1$ при $x \in \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$. Накрая, лесно се вижда,че неравенството е изпълнено за всяко x в интервала $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Окончателно $x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Оценяване. (6 точки) по 3 т. за всеки от двата случая.

Задача 12.3. Да се намери най-малкото просто число p от вида $8k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, за което не съществува естествено число n, такова, че $p + 2^n$ е точен квадрат.

Решение. Тъй като $17 + 2^3 = 5^2$, $41 + 2^3 = 7^2$, $73 + 2^3 = 9^2$, $89 + 2^5 = 11^2$, $97 + 2^7 = 15^2$, $113 + 2^3 = 11^2$, $137 + 2^5 = 13^2$, $193 + 2^5 = 15^2$ и $233 + 2^7 = 19^2$, първият сериозен кандидат за решение е $p = 241$.

Да допуснем, че $241 + 2^n = x^2$ за някои естествени n и x. Ако $n = 2m$ е четно, то $241 = (x - 2^m)(x + 2^m)$, откъдето лесно получаваме $x = 121$ и $2^m = 120$, противоречие.

Нека $n = 2m + 1$ е нечетно. Непосредствено се проверява, че 2^{2m+1} дава остатъци 2, 8 и 32 по модул 63 (показателят на 2 по модул 63 е 6), което означава, че $241 + 2^{2m+1} \equiv 21, 54, 60 \pmod{63}$. Остава да проверим, че сравненията $x^2 \equiv 21, 54, 60 \pmod{63}$ нямат решение. За първото и третото това е очевидно, а второто води до $y^2 \equiv 6 \pmod 7$, което също няма решение.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за хипотезата $p = 241$, подкрепена с примерите за по-малките p; 1 т. за случая на четно n; 1 т. за започване на работа по подходящ модул; 4 т. за довършване.

Задача 12.4. Дадена е шахматна дъска $m \times k$, оцветена по обичайния начин. Разрешена е следната операция: да се избере поле и неговият цвят, както и цветовете на всички полета, които могат да се достигнат с ход на коня от това поле (ако има такива), да бъдат променени (от бяло в черно или обратно). Винаги ли е възможно да се се приложат краен брой от разрешените операции така, че накрая всички полета да са се сменили цвета си на противоположния?

Решение. Да разгледаме граф с върхове – клетките на дъската и ребро между два върха тогава и само тогава, когато двата върха са съседни с ход на коня. Тогава нашата операция е: избираме връх и го преоцветяваме заедно с всичките му съседи (ако има такива). Ще докажем с индукция по броя на върховете n, че исканото винаги е възможно.

При малките стойности на n твърдението е очевидно. Нека то е вярно за някое n и да разгледаме произволен граф с $n + 1$ върха.

Да фиксираме един връх v и да приложим индукционното предположение за графа от останалите n върха, като всеки път, когато се налага, правим преоцветяване и на v. Да означим с $F(v)$ поредицата от ходове, при която сме постигнали преоцветяване на останалите върхове. Ако след тази поредица и v е сменил в крайна сметка цвета си, твърдението е доказано. Да предположим, че накрая v е отново в първоначалния си цвят, и да отбележим, че същото разсъждение може да се направи за всеки от върховете.

Ако $n + 1$ е четно число, следваме следната процедура – отделяме върховете един по един и всеки път изпълняваме съответните за отделения връх операции $F(v)$. Накрая всеки връх ще е променил цвета си нечетен брой пъти и твърдението е доказано.

Ако $n+1$ е нечетно, в графа има връх от четна степен. Отделяме този връх и неговите съседи и върху всеки от останалите върхове (които са четен брой) прилагаме, както по-горе, операциите $F(v)$. В края останалите върхове ще са преоцветявани нечетен брой пъти (т.е. ще са променили цвета си), а отделените върхове ще са преоцветявани четен брой пъти и остава за тях да приложим операцията от условието за отделения връх с четна степен.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за преформулиране на задачата за графи и хипотеза, че твърдението е вярно за всякакви графи; 1 т. за прилагане на индукционното предположение както в горното решение, 2 т. за случая на четно $n + 1$ и 3 т. за случая на нечетно $n + 1$.

<u>Задачите са предложени от:</u>

Петър Бойваленков – 9.1, 9.3, 12.3;
Ивайло Кортезов – 9.2. 9.4;
Стоян Боев – 10.1, 10.3;
Иван Ланджев – 10.2, 10.4;
Емил Колев – 11.1, 11.3;
Пламен Пенчев – 11.2 (12.1), 12.2;
Александър Иванов – 11.4, 12.4.