Съюз на Математиците в България
Американска Фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен Математически Турнир
София, 9 – 11 ноември 2012 г.

Тема за 8. клас

Задача 1. Да се намерят стойностите на параметъра a, при които за всяко реално x е в сила неравенството

$$x^3 + a^3 \leq (x+a)^3 - 3a(x-1)^2.$$

Задача 2. Върху страните $AB = 1$, BC и CA на равностранен триъгълник ABC са избрани съответно точки M, N, Q, така че отсечките AN, BQ и CM да разделят триъгълника ABC на четири триъгълника и три четириъгълника. Оцветяваме всеки триъгълник в синьо или жълто, така че триъгълниците с общ връх да са разноцветни. Ако синята и жълтата част имат равни лица, да се пресметне $AM + BN + CQ$.

Задача 3. Да се докаже, че за всяко естествено число n съществува кратно на 41, което е от вида

$$\overline{a\underbrace{111...1}_{n}b}.$$

Задача 4. Едно естествено число n ще наричаме обикновено, ако има нечетен брой различни начини за представяне на n като сбор на две или повече поредни естествени числа. Колко са обикновените числа, по-малки от 2012?

Време за работа: 4.5 часа

Съюз на Математиците в България
Американска Фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен Математически Турнир
София, 9 – 11 ноември 2012 г.

Тема за 9. клас

Задача 1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$\left|3x - a^2 + 2a - 5\right| = \left|2x - 2a^2 + a + 7\right|$$

има два различни реални корена, които са равноотдалечени от числото 6.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC, за който $AC > BC$. Окръжност с център M върху ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ пресича правата AC в точките A и P, а правата BC – в точките B и Q. Правите PQ и AB се пресичат в точка L. Да се докаже, че точките C, L и M лежат на една права.

Задача 3. Петър и Николай играят следната игра: в началото Петър си намисля едно от полетата на една шахматна дъска 100×100. След това Николай може да посочи произволно поле от дъската и да попита Петър колко минимум хода са необходими на шахматния цар да стигне от посоченото поле до намисленото. След като получи отговора, Николай може да зададе отново въпрос или да отгатне полето, намислено от Петър, и т.н. Петър отговаря на всички въпроси коректно. Колко въпроса най-малко са необходими на Николай, за да отгатне намисленото поле?

Задача 4. Да се докаже, че съществуват безбройно много прости числа p от вида $4k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, такива, че p дели $2^q - 1$ за някое просто число q.

Време за работа: 4.5 часа

Съюз на Математиците в България
Американска Фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен Математически Турнир
София, 9 – 11 ноември 2012 г.

<u>Тема за 10. клас</u>

Задача 1. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$, $AC > BC$) с височина CH. Окръжността k с диаметър CH пресича катетите AC и BC в точките P и Q съответно. Ако PQ разполовява CG, където G е медицентърът на $\triangle ABC$, то

а) да се докаже, че G лежи на окръжността k;

б) да се намери отношението $AH : BH$.

Задача 2. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които съществува точно едно реално число, което е корен на уравнението

$$|ax - 1| = ax^2 - (2a - 1)x + 1.$$

Задача 3. Нека $N = 2012^{2013}$. Да се намери максималният брой елементи на множество A, изпълняващо условията:

(1) елементите на A са естествени числа, ненадминаващи N;

(2) за всеки два различни елемента a и b от A, N дели ab.

Задача 4. В равнината са разположени два еднакви, противоположно ориентирани равностранни триъгълника $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ със страна единица. Каква е най-малката възможна дължина на най-дългата измежду отсечките AA_1, BB_1 и CC_1?

Време за работа: 4.5 часа

Съюз на Математиците в България
Американска Фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен Математически Турнир
София, 9 – 11 ноември 2012 г.

Тема за 11. клас

Задача 1. Дадена е безкрайна геометрична прогресия $a_1, a_2, a_3, \dots$, за която $a_1 - 3a_2 + 2a_3 = 0$ и
$$0 < a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \leq 2012.$$
Да се определи колко най-много могат да бъдат членовете на редицата, които са естествени числа.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC, за който $AC = 3$, $BC = 4$ и $\measuredangle ACB = 60^\circ$. Нека CL, $L \in AB$ е ъглополовящата на $\measuredangle ACB$, а точка O е от отсечката CL. Ако M е петата на перпендикуляра от O към BC и $AM \perp BO$, да се намери дължината на отсечката CO.

Задача 3. Нека A е множеството от всички редици с дължина 2012, съставени от 0, 1 и 2. С T означаваме множество с минимален брой елементи, имащо следното свойство: За всяка редица $a_1, a_2, \dots, a_{2012}$ от A съществува редица $b_1, b_2, \dots, b_{2012}$ от T, за която $a_i \neq b_i$ за всяко $i = 1, 2 \dots, 2012$. Да се докаже, че
$$\frac{3^{2011}}{2^{2010}} \leq |T| \leq 3^{1006}.$$

Задача 4. Да се намерят всички полиноми $f(x)$ с цели коефициенти, които притежават следното свойство: съществува константа $c > 0$, такава че за всяко цяло число $n > c$, числото $f(n)$ е различно от нула и дели $n!$.

Време за работа: 4.5 часа

Съюз на Математиците в България
Американска Фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен Математически Турнир
София, 9 – 11 ноември 2012 г.

Тема за 12. клас

Задача 1. Нека $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ са такива редици от положителни числа, че

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{b_n}\right) \quad \text{и} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{1}{a_n}\right) \quad \text{за всяко } n \in \mathbb{N}.$$

Да се докаже, че редиците са сходящи.

Задача 2. Точка D върху страната AB на $\triangle ABC$ и точка E върху отсечката CD са такива, че $AD = 2BD$, $\sphericalangle AED = \sphericalangle ACB$ и $2 \sphericalangle BED = \sphericalangle ABC$. Да се докаже, че $\triangle ABC$ е равнобедрен.

Задача 3. Да се докаже, че ако $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $abc = 1$, то

$$\frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{b^2+b+1} + \frac{1}{c^2+c+1} \geq 1.$$

Задача 4. Да се намерят всички полиноми $f(x)$ с цели коефициенти, които притежават следното свойство: съществува константа $c > 0$, такава че за всяко цяло число $n > c$, числото $f(n)$ е различно от нула и дели $n!$.

Време за работа: 4.5 часа