Американска Фондация за България
Съюз на Математиците в България
Министерство на Образованието и Науката

Есенен Математически Турнир

София, 9–11 ноември, 2007 г.

София, 2007

Кратки решения на задачите

Задача 8.1. Да се намерят всички стойности на параметъра a, за които решенията на системата неравенства

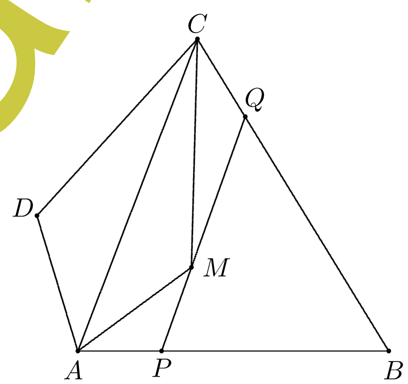
$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{3x-5}{3}+\dfrac{3x+5}{4} \geq \dfrac{x}{7}-\dfrac{1}{15} \\ (2x-a)^3+(2x+a)(1-4x^2)+16x^2a-6xa^2+a^3 \leq 2a^2+a \end{array}\right.$$

образуват интервал с дължина $\dfrac{32}{225}$.

Решение. След опростяване получаваме, че първото неравенство е еквивалентно на $\dfrac{135x-35}{28} \geq -\dfrac{1}{5}$, откъдето $x \geq \dfrac{49}{225}$. Второто неравенство е еквивалентно на $x \leq a^2$. Следователно системата има решение при $a^2 \geq \dfrac{49}{225}$ и решенията ѝ са интервал с дължина $\dfrac{32}{225}$ точно когато $a^2 - \dfrac{49}{225} = \dfrac{32}{225}$. Тогава $a^2 = \dfrac{9}{25}$, откъдето получаваме решенията $a = \dfrac{3}{5}$ и $a = -\dfrac{3}{5}$.

Задача 8.2. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Да се намери множеството от точки M, вътрешни за $ABCD$, такива че лицата на четириъгълниците $ABCM$ и $AMCD$ да са равни.

Решение. Нека $S_1 = S_{ABC}$, $S_2 = S_{ACD}$ и $S_1 > S_2$. Ако M е такава, че $S_{ABCM} = S_{AMCD}$, то поради $S_1 > S_2$ имаме, че M е вътрешна за $\triangle ABC$. Тогава $S_{ABCM} = S_1 - S_{ACM}$ и $S_{AMCD} = S_2 + S_{ACM}$. Оттук $S_1 - S_{ACM} = S_2 + S_{ACM}$, т.е. $S_{ACM} = \dfrac{1}{2}(S_1 - S_2)$. Тогава, ако h е разстоянието от M до AC, то $S_{ACM} = \dfrac{1}{2}(S_1 - S_2) = \dfrac{1}{2}AC.h$ откъдето $h = \dfrac{S_1 - S_2}{AC}$. Следователно точките M лежат върху отсечка $PQ||AC$ и разстоянието между PQ и AC е h.



Задача 8.3. Да се намерят всички тройки прости числа $p < q < r$, такива че $p + q = r$ и $(r-p)(q-p) - 27p$ е точен квадрат.

Решение. Очевидно $p = 2$, тогава $r - p = q$, откъдето получаваме $q(q -$

$2) - 54 = u^2$, откъдето $(q-1)^2 - u^2 = 55$. Имаме $(q-1-u)(q-1+u) = 55 = 1.55 = 5.11$. Разглеждаме два случая

Случай 1. $q-1-u = 1$ и $q-1+u = 55$, т.е. $q = u+2$, откъдето $q = 29$ и $r = 29+2 = 31$.

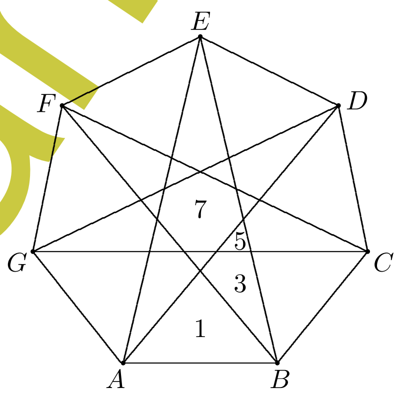
Случай 2. $q-1-u = 5$ и $q-1+u = 11$, т.е. $q = u+6$, откъдето $q = 9$, противоречие.

Следователно единственото решение е $p = 2$, $q = 29$ и $r = 31$.

Задача 8.4. Даден е правилен седмоъгълник $ABCDEFG$. Страните AB, BC, CD, DE, EF, FG и GA ще наричаме срещуположни съответно на върховете E, F, G, A, B, C и D. Ако M е вътрешна точка за седмоъгълника, ще казваме, че правата съединяваща M с връх на седмоъгълника, пресича негова страна (без върховете) в "правилна точка", ако страната е срещуположна на върха. Да се докаже, че броят на правилните точки, които се получават от произволна вътрешна точка е нечетно число.

Решение. Ако AM пресича DE, т.е. се получава "правилна точка", то M е вътрешна за триъгълника ADE. Броят на правилните точки, които се получават от дадена точка M, е равен на броя на триъгълниците измежду ADE, BEF, CFG, DGA, EAB, FBC и GCD, за които M е вътрешна точка. Тези триъгълници определят 22 части във вътрешността на седмоъгълника (Фиг. 1):

- 7 триъгълника, една от страните на които е страна на седмоъгълника,
- 7 четириъгълника, един от върховете на които е връх на седмоъгълника,
- 7 триъгълника, две от страните на които са страни на четириъгълниците
- 1 седмоъгълник.



Фиг. 1

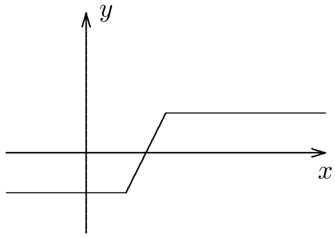
Всяка от тези части е обща точно за 1, 3, 5 или 7 от горните триъгълници. Следователно броят на правилните точки, които се получават от произволна вътрешна точка е 1, 3, 5 или 7.

Задача 9.1. Дадени са функциите $f(x) = |x-1| - |x-2|$ и $g(x) = |x-3|$.

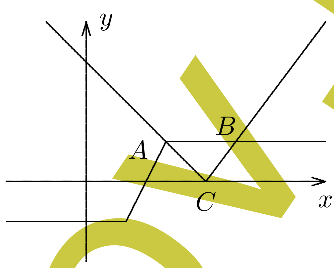
а) Да се построи графиката на функцията $f(x)$.

б) Да се намери лицето на фигурата, ограничена от графиките на функциите $f(x)$ и $g(x)$.

Решение. а) Тъй като $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x \in (-\infty, 1] \\ 2x-3 & \text{при } x \in [1, 2] \\ 1 & \text{при } x \in [2, +\infty) \end{cases}$, графиката се състои от три части, както е показано на Фиг. 1.



Фиг. 1



Фиг. 2

б) Двете графики се пресичат в точките $A(2;1)$ и $B(4;1)$, а интересуващата ни фигура е триъгълник ABC, където $C(3;0)$ е точка от графиката на $g(x)$ (вж. Фиг. 2). Търсеното лице е $S_{ABC} = \dfrac{AB.h_c}{2} = \dfrac{2.1}{2} = 1$.

Задача 9.2. Нека a, b и c са реални числа, за които $a+b+c = 0$ и $a^4+b^4+c^4 = 50$. Да се намери $ab+bc+ca$.

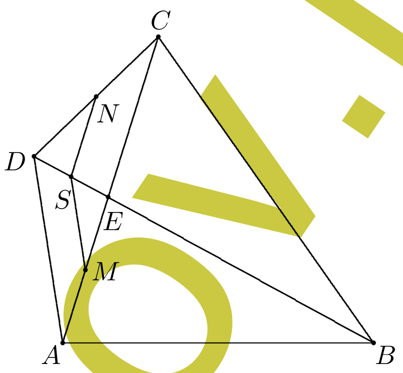
Решение. Имаме последователно $a^2+b^2+c^2 = (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) = -2(ab+bc+ca)$ и $50 = a^4+b^4+c^4 = (a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) = 4(ab+bc+ca)^2-2((ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)) = 2(ab+bc+ca)^2$. Следователно $ab+bc+ca = \pm 5$. Тъй като $ab+bc+ca = -(a^2+b^2+c^2)/2 < 0$, получаваме $ab+bc+ca = -5$. Например числата $a = 0$, $b = \sqrt{5}$ и $c = -\sqrt{5}$ имат исканото свойство.

Задача 9.3. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ диагоналите AC и BD се пресичат в точка E, точка M е среда на AE и точка N е среда на CD. Известно е, че диагоналът BD разполовява $\sphericalangle ABC$. Да се докаже, че четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност тогава и само тогава, когато четириъгълникът $MBCN$ е вписан в окръжност.

Решение. Нека четириъгълникът $ABCD$ е вписан. От $\sphericalangle ABD = \sphericalangle CBD$ следва, че $AD = CD$. Да означим средата на DE с S. Тъй като SM и SN са средни отсечки съответно в $\triangle DEA$ и $\triangle DEC$, имаме $SM = AD/2 =$

$CD/2 = CN$ и $SN \| AC$. Следователно четириъгълникът $MCNS$ е равнобедрен трапец, в частност – вписан четириъгълник. От друга страна, имаме $\sphericalangle MSB = \sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$, откъдето заключаваме, че четириъгълникът $MBCS$ е вписан. Следователно точките M, B, C, N и S лежат на една окръжност, т.е. четириъгълникът $MBCN$ е вписан.

Нека четириъгълникът $MBCN$ е вписан и да означим пресечната точка на правата BD и окръжността, описана около $\triangle ABC$ с D_1. Ще докажем, че $D_1 \equiv D$. Нека точката D_1 е между B и D (случаят, когато D е между B и D_1, се разглежда аналогично). Ако N_1 е средата на CD_1, както по-горе се вижда, че четириъгълникът $MBCN_1$ е вписан. Следователно точките M, B, C, N и N_1 лежат на една окръжност. Но последното е невъзможно ако $D \neq D_1$, защото тогава N_1 лежи на средната отсечка през N в $\triangle CDE$, което означава, че N_1 е вътрешна за $\triangle MCN$.



Задача 9.4. Да се намери най-малкото естествено число, което е делител на $2^n + 15$ за някое естествено число n и се представя във вида $3x^2 - 4xy + 3y^2$ за някои цели числа x и y.

Решение. Нека $d = 3x^2 - 4xy + 3y^2 | 2^n + 15$ за някои цели x и y и някое естествено n. Очевидно d е нечетно и следователно x и y са с различна четност. Тогава имаме $d \equiv 3 \pmod 4$. Освен това от представянето $3d = (3x - 2y)^2 + 5y^2$ следва, че $3d \equiv (3x - 2y)^2 \pmod 5$ и понеже $(d, 5) = 1$, заключаваме, че $3d \equiv \pm 1 \pmod 5 \iff d \equiv \pm 2 \pmod 5$.

От $d \equiv 3 \pmod 4$ и $d \equiv \pm 2 \pmod 5$ следва, че $d \equiv 3 \pmod{20}$ или $d \equiv 7 \pmod{20}$. Очевидно $d = 3$ не е възможно, а ако $d = 7$, то $2^n \equiv -1 \pmod 7$ за някое n, което също е невъзможно. Следващата възможност $d = 23$ се реализира например при $n = 3$ и $x = 2$, $y = -1$. Следователно търсеното число е $d = 23$.

Задача 10.1. Да се намерят всички цели числа b и c, за които уравнението $x^2 - bx + c = 0$ има два реални корена x_1 и x_2, удовлетворяващи $x_1^2 + x_2^2 = 5$.

Решение. Тъй като корените са реални, имаме $D = b^2 - 4c \geq 0$. От формулите на Виет имаме

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = b^2 - 2c,$$

т.е. $b^2 - 2c = 5$. Оттук $2c = b^2 - 5 \geq -5$, откъдето $c \geq -\dfrac{5}{2}$. От друга страна $5 - 2c = b^2 - 4c \geq 0$, откъдето $c \leq \dfrac{5}{2}$. Следователно c е едно от числата -2, -1, 0, 1 или 2. Цели стойности за b се получават само при $c = -2$ (съответно $b = \pm 1$) и $c = 2$ (съответно $b = \pm 3$).

Окончателно решенията са $b = \pm 1$, $c = -2$ и $b = \pm 3$, $c = 2$.

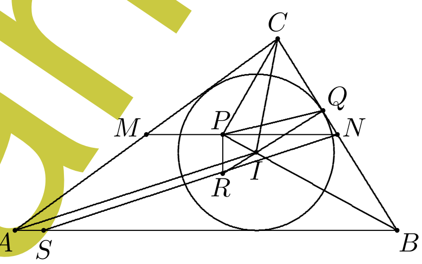
Задача 10.2. Даден е $\triangle ABC$ ($AC > BC$) със средна отсечка MN (M лежи на AC, а N лежи на BC). Ъглополовящата на ъгъл B пресича правата MN в точка P. Вписаната окръжност в $\triangle ABC$ има за център точката I и се допира до BC в точка Q. Перпендикулярите, издигнати от P и Q, съответно към MN и BC се пресичат в точка R. Нека S е пресечната точка на правите AB и RN.

а) Да се докаже, че четириъгълникът $PCQI$ е вписан.

б) Да се изрази дължината на отсечката BS чрез дължините a, b, c на страните на $\triangle ABC$.

Решение. а) Очевидно

$$\angle ABP = \angle BPN = \angle PBN = \beta/2.$$



Следователно $BN = CN = PN$, откъдето $\angle BPC = 90^\circ$. Тъй като и $\angle CQI = 90^\circ$, четириъгълникът $PCQI$ е вписан.

б) Пресмятаме

$$\sphericalangle PCI = \sphericalangle PCB - \sphericalangle ICB = \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Тъй като $\angle RPN = \angle IQN = 90^\circ$, четириъгълникът $RPQN$ е вписан. Оттук и от а) получаваме

$$\angle NSB = \angle PNR = \angle PQR = \angle PCI = \frac{\alpha}{2}.$$

Следователно AI и SN са успоредни, откъдето $\dfrac{BS}{AB} = \dfrac{BN}{BL}$, където L е пресечната точка на ъглополовящата на ъгъл BAC с BC. Замествайки в горното равенство, получаваме

$$\frac{BS}{c} = \frac{a/2}{ac/(b+c)},$$

откъдето $BS = \dfrac{b+c}{2}$.

Задача 10.3. За естественото число $m > 1$ означаваме с $f(m)$ сумата на всички естествени числа, по-малки от m и взаимно прости с m. Да се намерят всички естествени числа n, за които съществуват естествени числа k и l такива, че $f(n^k) = n^l$.

Решение. Ако $m > 2$, естествените числа, по-малки от m и взаимно прости с m се разбиват на двойки от вида $(k, m-k)$, $m-k \neq k$, като броят на двойките е $\dfrac{\varphi(m)}{2}$, където $\varphi(m)$е функцията на Ойлер, и сумата на числата във всяка двойка е m. Следователно $f(m) = \dfrac{m\varphi(m)}{2}$. Това равенство остава вярно и за $m = 2$. Като вземем предвид и това, че $\varphi(n^k) = n^{k-1}\varphi(n)$, получаваме

$$f(n^k) = \frac{n^k\varphi(n^k)}{2} = \frac{n^{2k-1}\varphi(n)}{2}.$$

Така условието става $n^{2k-1}\varphi(n) = 2n^l$.

Ако $l > 2k-1$, получаваме $\varphi(n) = 2n^{l-2k+1} \geq 2n$, което е невъзможно. При $l = 2k-1$ получаваме $\varphi(n) = 2$. Лесно се установява, че това равенство е изпълнено само при $n = 3, 4$ и 6. Нека $l < 2k-1$. Тогава $n^{2k-1-l}\varphi(n) = 2$, което е изпълнено само при $n = 2$ и $2k-1-l = 1$, т.е. $l = 2k-2$.

Окончателно, търсените естествени числа са $n = 2, 3, 4$ и 6.

Задача 10.4. Да се намерят всички двойки естествени числа (m, n), $m \leq n$, за които съществува таблица от нули и единици с m реда и n стълба, удовлетворяваща следното условие:

Ако в една клетка е записана нула (съответно единица), то броят на нулите (съответно единиците) в реда на тази клетка е равен на броя на нулите (съответно единиците) в стълба на клетката.

Решение. С a_{pq} ще означаваме числото записано в p-ия ред и q-ия стълб на таблицата, като броенето на редовете се извършва от горе на долу, а на стълбовете от ляво на дясно. С $A_0(p)$ (съответно $A_1(p)$) ще означаваме броят на нулите (съответно единиците) в p-ия ред. Аналогично, с $B_0(q)$ (съответно $B_1(q)$) ще означаваме броят на нулите (съответно единиците) в q-ия стълб.

Лема. Да разгледаме четирите клетки, които се получават при пресичане на i-ия и j-ия ред и k-ия и l-ия стълб на таблицата и съответните числа a_{ik}, a_{il}, a_{jk} и a_{jl}. Ако точно 3 от тези цифри са равни, то $m = n$.

Доказателство. Без ограничение, нека $a_{ik} = a_{il} = a_{jk} = 0$ и $a_{jl} = 1$. Тогава поради $a_{jl} = 1$ от условието следва $A_1(j) = B_1(l)$. Също така от $a_{ik} = a_{il} = a_{jk} = 0$ намираме $A_0(j) = B_0(k) = A_0(i) = B_0(l)$. Следователно $A_1(j) = B_1(l)$ и $A_0(j) = B_0(l)$, което означава, че $m = n \quad \diamond$.

При $m = n$ например таблица само с нули (или с нули по главния диагонал и единици в останалите клетки) има исканото свойство

Да допуснем, че $n > m$. Ясно е, че разместване на стълбовете и редовете на таблицата не променя основното свойство. Следователно можем да считаме, че в първия ред от ляво на дясно най-напред са поставени единиците, а в първия стълб от горе на долу най-напред са поставени също единиците. При това, поради $a_{11} = 1$ получаваме, че единиците в първия ред са колкото единиците в първия стълб. Нека този брой е t. От Лемата сега следва, че $a_{pq} = 1$ за всички $p, q = 1, 2, \ldots, t$.

Случай 1. Нека $n > m = t$. Тогава $n > t$ и $a_{pq} = 0$ за всички $q > t$. Следователно $n - t = t$, т.е. $n = 2t = 2m$.

Случай 2. Нека $n > m > t$. Ако $a_{pq} = 1$ за някои $p > t$ и $1 \leq q \leq t$ то от Лемата следва (поради $a_{pq} = a_{11} = a_{1q} = 1$ и $a_{p1} = 0$), че $m = n$. Следователно $a_{pq} = 0$ за $p > t$ и $1 \leq q \leq t$ и аналогично $a_{pq} = 0$ за $q > t$ и $1 \leq p \leq t$.

Да допуснем, че $a_{pq} = 0$ за някои $p > t$ и $q > t$. Отново от Лемата следва, че $m = n$. Следователно $a_{pq} = 1$ за всички $p > t$ и $q > t$. Сега поради $a_{mn} = 1$ следва $m - t = n - t$, т.е. $m = n$.

Окончателно получихме, че $m = n$ или $n = 2m$ (например таблица, съставена от две долепени $m \times m$ таблици, едната с нули, а другата с единици, има исканото свойство).

Задача 11.1. Дадени са различни остри ъгли α и β, за които

$$(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)(1 + \mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}\beta) = 2.$$

Да се докаже, че $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Решение. След заместване $\cos^2 \alpha = \dfrac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$ и $\cos^2 \beta = \dfrac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\beta}$ и преобразования даденото неравенство се записва във вида

$$(\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}\beta - 1)(\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta)^2 = 0.$$

Понеже α и β са различни остри ъгли, то $\mathrm{tg}\alpha \neq \mathrm{tg}\beta$, откъдето $\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}\beta = 1$, т.е. $\sin\alpha\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta$. Оттук $\cos(\alpha+\beta) = 0$ и тъй като α и β са остри ъгли, получаваме $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Задача 11.2. Да се намерят всички стойности на параметъра a, за които неравенството

$$\sqrt{x - x^2 - a} + \sqrt{6a - 2x - x^2} \leq \sqrt{10a - 2x - 4x^2}$$

има единствено решение.

Решение. Да положим $u = x - x^2 - a$ и $v = 6a - 2x - x^2$. Тогава е изпълнено равенството $10a - 2x - 4x^2 = 2(u+v)$. Даденото неравенство може да се запише във вида $\sqrt{u} + \sqrt{v} \leq \sqrt{2(u+v)}$. То е еквивалентно на $2\sqrt{u}\sqrt{v} \leq u + v$, което е изпълнено за всички стойности от дефиниционната област $\left| \begin{array}{l} u \geq 0 \\ v \geq 0 \end{array} \right.$.
Следователно неравенството има само едно решение точно когато системата $\left| \begin{array}{l} x^2 - x + a \leq 0 \\ x^2 + 2x - 6a \leq 0 \end{array} \right.$ има единствено решение. Това е възможно в следните случаи:

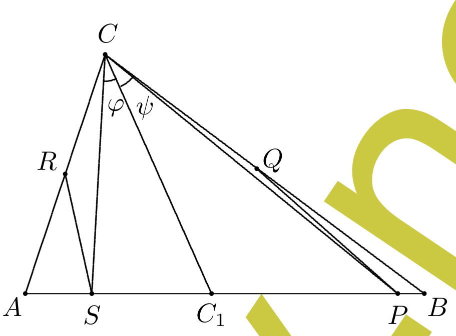
Случай 1. Едно от неравенствата има единствено решение, което е решение на другото неравенство. Следователно или $D_1 = 1 - 4a = 0$, откъдето $a = \frac{1}{4}$, което е решение, или $D_2 = 1 + 6a = 0$, откъдето $a = -\frac{1}{6}$, което не е решение.

Случай 2. Уравненията $x^2 - x + a = 0$ и $x^2 + 2x - 6a = 0$ имат общ реален корен. След умножаване на първото уравнение с 6 и събиране с второто получаваме $7x^2 - 4x = 0$, т.е. $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{4}{7}$. При $x_1 = 0$ получаваме $a = 0$, а при $x_2 = \frac{4}{7}$ намираме $a = \frac{12}{49}$. Директна проверка показва, че $a = 0$ е решение и $a = \frac{12}{49}$ не е.

Окончателно търсените стойности са $a = 0$ и $a = \frac{1}{4}$.

Задача 11.3. В триъгълник ABC е прекарана ъглополовящата CC_1. Точките $P \in C_1B$, $Q \in BC$, $R \in AC$ и $S \in AC_1$ са такива, че $C_1P = PQ = QC$ и $CR = RS = SC_1$. Да се докаже, че CC_1 е ъглополовящата на $\sphericalangle SCP$.

Решение. Да означим $\sphericalangle SCC_1 = \varphi$, $\sphericalangle PCC_1 = \psi$ и $\sphericalangle PC_1C = \delta$. От $\triangle PQC$ имаме $\cos\left(\dfrac{\gamma}{2}-\psi\right) = \dfrac{CP}{2CQ}$, а от синусовата теорема за $\triangle PC_1C$ получаваме $\dfrac{CP}{PC_1} = \dfrac{\sin\delta}{\sin\psi}$. Тъй като $CQ = QP = PC_1$, от горните равенства намираме $\cos\left(\dfrac{\gamma}{2}-\psi\right)\sin\psi = \dfrac{\sin\delta}{2}$. Аналогично от $\triangle SCR$ и $\triangle SC_1C$ получаваме $\cos\left(\dfrac{\gamma}{2}-\varphi\right)\sin\varphi = \dfrac{\sin\delta}{2}$.



Следователно

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}-\psi\right)\sin\psi = \cos\left(\frac{\gamma}{2}-\varphi\right)\sin\varphi,$$

откъдето $\sin\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)+\sin\left(2\psi-\dfrac{\gamma}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{\gamma}{2}\right)+\sin\left(2\varphi-\dfrac{\gamma}{2}\right)$, т.е. $2\varphi+2\psi-\gamma = 180^\circ$ или $\varphi=\psi$. Тъй като $\gamma > \varphi+\psi$, то $2\varphi+2\psi-\gamma < \gamma < 180^\circ$, т.е. първото равенство е невъзможно. Остава $\varphi=\psi$, което означава, че CC_1 е ъглополовяща на $\sphericalangle SCP$.

Задача 11.4. В една държава има 1000 града $A_1, A_2, \ldots, A_{1000}$, като някои от тях са свързани с авиолинии. Известно е, че i-ият град е свързан с d_i други града, като при това $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_{1000}$ и $d_j \ge j+1$ за всяко $j = 1, 2, \ldots, 999 - d_{999}$. Да се докаже, че ако летището на който и да е град A_k бъде затворено, то ще е възможно да долетим от произволен град A_i до произволен друг град A_j, $i, j \neq k$ (възможно с прекачвания).

Решение. Нека е затворено летището в k-ия град за някое $1 \le k \le 1000$. Означаваме останалите градове с $B_1, \ldots, B_{999}$ като можем да считаме, че $B_i = A_i$ за $i = 1, \ldots, k-1$ и $B_i = A_{i+1}$ за $i = k+1, \ldots, 1000$. Да означим броя на авиолиниите излизащи от B_i с d'_i. Очевидно $d'_i \ge d_i - 1$ за всяко $i = 1, \ldots, 999$. Без ограничение на общността можем да приемем, че $d'_1 \le d'_2 \le \ldots \le d'_{999}$.

Нека X е множеството от градовете достижими от B_{999} (след закриване на летището в град A_k). Очевидно $x = |X| \ge d'_{999} + 1 \ge d_{999}$. Да допуснем, че има градове, недостижими от B_{999} (в противен случай няма какво да се доказва). Нека означим множеството на тези градове с Y и нека B_u е градът с най-голям номер в Y. Тъй като $999 - x \leq 999 - d_{999}$ имаме

$$d'_u \geq d'_{999-x} \geq d_{999-x} - 1 \geq (999 - x + 1) - 1 = 999 - x,$$

т.е. $|Y| \geq 1000 - x$. Оттук получаваме

$$|X \cap Y| = |X| \cup |Y| - |X \cup Y| \geq x + (1000 - x) - 999 \geq 1,$$

противоречие.

Задача 12.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\sin 2x \sin 4x - \sin x \sin 3x = a$$

има единствено решение в интервала $[0, \pi)$.

Решение. Да забележим, че ако α е решение на даденото уравнение, то $\pi - \alpha$ също е негово решение. Значи ако $\alpha_0 \in [0, \pi)$ е единствено решение на уравнението в интервала $[0, \pi)$, то $\alpha_0 = 0$ или $\alpha_0 = \pi/2$. Ако $t = \cos 2x$, то уравнението е еквивалентно последователно на

$$(\cos 2x - \cos 6x) - (\cos 2x - \cos 4x) = 2a \iff \cos 4x - \cos 6x = 2a \iff$$

$$(2t^2 - 1) - (4t^3 - 3t) = 2a \iff 4t^3 - 2t^2 - 3t + 2a + 1 = 0.$$

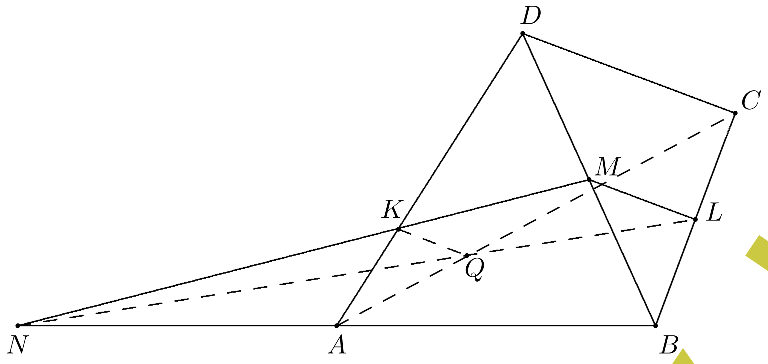
При $\alpha_0 = 0$ следва, че $a = 0$ и получаваме $(t - 1)(4t^2 + 2t - 1) = 0$. Квадратният тричлен в скобите има две реални нули в $(-1, 1)$ и следователно $a = 0$ не е решение на задачата.

При $\alpha_0 = \pi/2$ следва, че $a = 1$ и получаваме $(t + 1)(4t^2 - 6t + 3) = 0$. Квадратният тричлен в скобите няма реални нули и следователно $a = 1$ е решение на задачата.

Задача 12.2. Всички ръбове на триъгълна пирамида $ABCD$ имат равни дължини. Нека M е средата на ръба DB, N е точката върху продължението на ръба AB, за която $2NA = NB$ и P е точка върху височината на $\triangle BCD$ през върха D. Да се намери $\sphericalangle MPD$, ако сечението на пирамидата с равнината (NMP) е трапец.

Решение. Тъй като сечението е четириъгълник правата MP пресича страната BC. Нека $L = MP \cap BC$, $K = NM \cap AD$ и $Q = NL \cap AC$. Тъй като правите KM и QL не са успоредни, то $ML \parallel KQ$. От друга страна NM и DA са медиани в $\triangle BDN$ и следователно

$$\frac{NQ}{QL} = \frac{NK}{KM} = \frac{2}{1}.$$



Но AC е медиана в $\triangle NCB$ и щом $\dfrac{NQ}{QL} = \dfrac{2}{1}$ следва, че NL е медианата към BC, т.е. L е средата на BC. Следователно $L = P$, $MP \parallel DC$ и

$$\sphericalangle MPD = \sphericalangle BLD - \sphericalangle BLM = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Задача 12.3. Да се намерят всички реални числа r, за които неравенството

$$r(ab + bc + ca) + (3 - r)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

е изпълнено за произволни реални $a, b, c > 0$.

Решение. При $a = b = c$ следва, че

$$ra^2 + (3 - r)\frac{1}{a} \geq 3 \iff (a - 1)(r(a^2 + a + 1) - 3) \geq 0 \ \forall a > 0.$$

Оттук лесно следва, че $r = 1$ (Докажете!). Обратно нека $r = 1$. Записваме неравенството във вида $\dfrac{2 + abc}{3} \geq \dfrac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$. От неравенството между средното геометрично и средното хармонично следва, че

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc}$$

и е достатъчно да проверим, че $\dfrac{2 + x^3}{3} \geq x$, където $x = \sqrt[3]{abc} > 0$. Последното е еквивалентно на очевидното неравенство $(x - 1)^2(x + 2) \geq 0$.

Задача 12.4. Нека p и q са прости числа и $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редицата от цели числа, дефинирана с равенствата:

$$a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ и } a_{n+2} = pa_{n+1} - qa_n$$

при $n \geq 0$. Да се намерят p и q, ако съществува k такова, че $a_{3k} = -3$.

Решение. Нека p и q са нечетни прости числа. От рекурентната зависимост следва, че $a_2 = p$ и $a_3 = p^2 - q$. Следователно a_0 и a_3 са четни числа. Тъй като

$$a_{3k+3} = pa_{3k+2} - qa_{3k+1} = p(pa_{3k+1} - qa_{3k}) - qa_{3k+1} = (p^2 - q)a_{3k+1} - pqa_{3k}$$

и $p^2 - q$ е четно число, по индукция следва, че a_{3k} е четно число за всяко $k \geq 0$, противоречие с условието. Да предположим сега, че $q = 2$. Тогава $p \neq 2$, защото в противен случай всички числа a_n, $n \geq 2$ са четни. Нека $p \geq 3$. Ще докажем, че в този случай $a_n > 0$ при $n \geq 1$, което отново е противоречие.

По индукция ще докажем, че $a_{n+1} > a_n \geq 0$ за $n \geq 0$. За $n = 0$ твърдението е очевидно. Да допуснем, че твърдението е вярно за $n = k$, т.е. $a_{k+1} > a_k \geq 0$. Тогава

$$a_{k+2} = pa_{k+1} - a_k = (p-2)a_{k+1} + 2(a_{k+1} - a_k) > a_{k+1} > 0$$

и значи $a_{k+2} > a_{k+1} > 0$.

Остава да разгледаме случая $p = 2$, $q > 2$. От рекурентната връзка следва, че при $n \geq 0$ имаме $a_{n+2} \equiv 2a_{n+1} \pmod q$ и по индукция заключаваме, че $a_{n+1} \equiv 2^n \pmod q$. Да предположим, че $a_{3k} = -3$ за някое $k \geq 1$. Тогава $-3 = a_{3k} \equiv 2^{3k-1} \pmod q$. От друга страна пак от рекурентната връзка следва, че $a_{n+2} \equiv 2a_{n+1} - a_n \pmod{q-1}$. Следователно

$$a_{n+2} - a_{n+1} \equiv a_{n+1} - a_n \equiv \cdots \equiv a_1 - a_0 = 1 \pmod{q-1}$$

и значи $a_{n+1} \equiv n+1 \pmod{q-1}$ за $n \geq 0$. Тогава $-3 = a_{3k} \equiv 3k \pmod{q-1}$ и от малката теорема на Ферма следва, че $2^{3k+3} \equiv 1 \pmod q$. Тогава $1 \equiv 2^{3k+3} \equiv 16.2^{3k-1} \equiv -48 \pmod q$, т.е. $q = 7$. В този случай $a_3 = 2^2 - 7 = -3$ и следователно търсените прости числа са $p = 2$ и $q = 7$.

Задачите са предложени от:

Петър Бойваленков - 8.1, 9.4; Ивайло Кортезов - 11.1; Иван Тонов - 8.3, 9.2; Чавдар Лозанов - 8.2, 8.4; Иван Ланджев - 10.2, 11.4; Стоян Атанасов - 9.1, 9.3; Керопе Чакърян - 10.1, 10.3 Александър Иванов - 11.2; Емил Колев - 10.4, 11.3; Николай Николов - 12.1, 12.3; Олег Мушкаров - 12.2, 12.4.

Брошурата е подготвена от Емил Колев