Турнир по елементарна математика "Проф. Борислав Боянов"
Първи кръг, 14 февруари 2010

Задача 1. Да се реши неравенството:

$$\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1 \quad .$$

Задача 2. За аритметична прогресия с 2010 члена, сумата на първата половина от членовете е три пъти по-малка от сумата на втората половина от членовете. Да се намери колко пъти сумата на първата третина от членовете е по-малка от сумата на последната третина от членовете.

Задача 3. Основите на трапец са $AB = 9$ и $CD = 3$. Отсечката MN е успоредна на основите, $M \in BC$ и $N \in AD$. Да се намери отношението $S_{ABMN} : S_{NMCD}$, ако $MN = 7$.

Задача 4. Да се реши системата:

$$\left| \begin{array}{l} \left(x^2+y^2\right)^2 = 2xy \\ |x+y| = \dfrac{\sqrt{5}}{4} \end{array} \right. \quad .$$

Задача 5. Да се реши уравнението:

$$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = \cos x \quad .$$

Задача 6. Да се реши неравенството:

$$\sqrt{x^2-x} < (x+2)\,|x-3| \quad .$$

Задача 7. Да се намерят всички реални стойности на b, за които уравнението $\log_{x+b}\left(4\,x + b^2\right) = 2$ има единствен корен.

Задача 8. В правоъгълния триъгълник ABC катетите са $AC = 8$ и $BC = 6$, а M е средата на хипотенузата. Да се намери лицето на триъгълника, който правата, минаваща през центровете на вписаните в $\triangle ACM$ и $\triangle BCM$ окръжности, отсича от $\triangle ABC$.

Задача 9. В правилна четириъгълна пирамида $ABCDV$ е вписана сфера с радиус $R = 2$. Втора сфера, с радиус $r = 1$ се допира до първата, до основата $ABCD$ и до околните стени ABV и ADV. Да се намери радиусът на сферата, която се допира до всички околни стени и до вписаната в пирамидата сфера.

Задача 10. Символът $[x]$ означава най-голямото цяло число, не по-голямо от x (примери: $[7] = 7$, $\left[\dfrac{22}{7}\right] = 3$, $\left[-\dfrac{7}{2}\right] = -4$).

Да се реши уравнението:

$$\left[\frac{2009}{x}\right] + \left[\frac{2010}{x}\right] + \left[\frac{2011}{x}\right] = 2010 \quad .$$