

Решения на задачите от националното състезание по елементарна математика „Турнир проф. Борислав Боянов” – 2011 год., Първи кръг

Задача 1. Ясно е, че знакът на $x-1$ е отрицателен при $x < 1$ и неотрицателен при $x \geq 1$, а знакът на $x+1$ е отрицателен при $x < -1$ и неотрицателен при $x \geq -1$. Така задачата се свежда до разглеждането на три случая.

I случай. Нека $x \in (-\infty; -1)$. Тогава уравнението е

$$-x+1-x-1=2 \Leftrightarrow x=-1, \text{ което не е решение в този случай.}$$

II случай. Нека $x \in [-1; 1]$. Тогава уравнението е

$$-x+1+x+1=2 \Leftrightarrow 0 \cdot x=0, \text{ т.е. решение е всяко } x \in [-1; 1].$$

III случай. Нека $x \in [1; +\infty)$. Тогава уравнението е

$$x-1+x+1=2 \Leftrightarrow x=1, \text{ което е решение в този случай.}$$

Окончателно, обединявайки трите случая, получаваме, че решенията на уравнението са всички числа от интервала $[-1; 1]$.

Задача 2. От това, че четириъгълникът е описан около окръжност следва, че $a+b=10$, където $AB=a, CD=b, a>b$. Прилагайки два пъти косинусовата теорема съответно за

триъгълниците $\triangle ACB$ и $\triangle ACD$, получаваме

$$\begin{cases} 7^2 = b^2 + 25 - 10b \cos(180^\circ - \beta) \\ 7^2 = a^2 + 25 - 10a \cos \beta \end{cases}$$

($\beta = \angle ABC$). Изразяваме косинуса и от двете уравнения и приравняваме. След опростяване достигахме до уравнението $a(24-b^2) = b(a^2-24)$. Това, заедно с $a+b=10$ ни води до $a=6, b=4$.

Задача 3. Първо определяме ДМ от изискването подкоренните величини да са неотрицателни. Така получаваме ДМ: $x \in [-2; 2]$. След това повдигаме двете страни на неравенството на втора степен (те са неотрицателни и повдигането води до равносилно неравенство!) и получаваме:

$$\sqrt{4-x^2} \leq x-2.$$

Остава да забележим, че от ДМ-то дясната страна е неположителна. Лявата страна пък е неотрицателна. Тогава единствената възможност неотрицателно число да е равно на неположително е те и двете да са равни на нула. Така получаваме единственото решение на неравенството $x=2$.

Задача 4. Да означим $AB=c, BC=a, CA=b$. От синусовата теорема веднага

получаваме $\frac{c}{\sin 60^\circ} = 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow c=7$. Сега, ако I е център на вписаната окръжност, а

Н е петата на перпендикуляра, спуснат от I към BC , то от $\triangle IHC$ получаваме

$$\frac{IH}{HC} = \tan 30^\circ \Leftrightarrow \frac{r}{\frac{a+b-7}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow a+b=13. \quad (1)$$

От косинусовата теорема пък лесно следва, че $a^2 + b^2 - ab = 49$. (2)

Решавайки така получената система от (1) и (2), намираме $a=5, b=8$ или обратното.

Задача 5. Уравнението има смисъл за $x > 0$. Полагайки $\sqrt{x} = t > 0$ и отчитайки, че за едно положително t получаваме точно едно положително x , то задачата се свежда до намирането на онези стойности на реалния параметър a , за които уравнението

(1) $at^2 + t - 1 = 0$ има точно едно положително решение.

Разглеждаме три случая. Първият е когато $a = 0$ (тогава уравнението е от първа степен). Получаваме, че $t = 1$, т.е $a = 0$ е решение на задачата.

Вторият случай е когато дискриминантата на (1) е равна на нула. Тогава уравнението има един двоен корен, който е равен на 2 и това ни води до едно положително x . Така получаваме, че и $a = -\frac{1}{4}$ е решение на задачата.

Накрая, ако дискриминантата е положителна, т.е $a > -\frac{1}{4}$, е ясно, че за да има решение задачата, то двата корена на (1) трябва да са с различни знаци. Това ни води до $t_1 \cdot t_2 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{a} < 0 \Leftrightarrow a > 0$, което е и решението на задачата в този случай.

Окончателно, от трите случая намираме, че решение на задачата е всяко $a \in [0; +\infty) \cup \left\{-\frac{1}{4}\right\}$.

Задача 6. От условието на задачата непосредствено следват няколко неща, а именно:

(1) $-1 \leq -\frac{b}{2} \leq 1 \Leftrightarrow b \in [-2; 2]$ (Координатата по x на върха на параболата е в интервала $[-1; 1]$);

(2) $b^2 - 4c \geq 0 \Leftrightarrow c \leq \frac{b^2}{4}$ (Дискриминантата е неотрицателна)

(3) $f(1) = 1 + b + c \geq 0$.

Сега $f(\alpha) \leq (\alpha + 1)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + b\alpha + c \leq \alpha^2 + 2\alpha + 1 \Leftrightarrow (b - 2)\alpha \leq 1 - c$. (4)

От (2) получаваме, че $1 - c \geq 1 - \frac{b^2}{4} = \frac{(2 - b)(2 + b)}{4}$. (5)

Ще докажем, че $(b - 2)\alpha \leq \frac{(2 - b)(2 + b)}{4}$. (6)

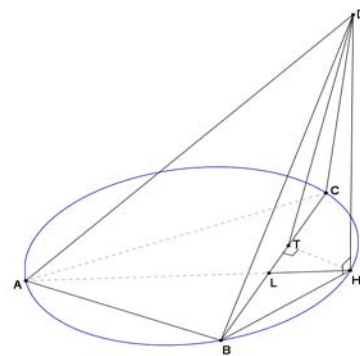
Наистина, лявата страна е неположителна (от (1)), а дясната – неотрицателна (пак от (1)).

Сега от (5) и (6) следва (4), т.е доказахме дясното неравенство от условието на задачата.

Лявото неравенство е $f(\alpha) \leq (\alpha + 1)^2 \Leftrightarrow (b + 2)\alpha \geq 1 - c$.

Но от условието $\alpha \geq 1$ и (1) следва, че $(b + 2)\alpha \geq b + 2$, а от (3) имаме $b + 2 \geq 1 - c$. С това е доказано и лявото неравенство.

Задача 7. Без да ограничаваме общостта ще допуснем, че ортогоналната проекция H на върха D върху основата лежи на дъгата BC както е на чертежа в дясно. Нека T е петата на перпендикуляра от H към BC . По теоремата за трите перпендикуляра следва, че $DT \perp BC$, т.е. $\angle HTD < 90^\circ$, откъдето е ясно, че околната стена BCD не може да сключва остър ъгъл с равнината на основата, та камо ли 60° . И така стените, които сключват с основата ъгли от по 60° са ABD и ACD .



Сега вече лесно следва, че H лежи на ъглополовящата на $\angle BAC$, т.е. AH е диаметър на окръжността и $\angle ABH = 90^\circ$, т.е. $\angle HBD = 60^\circ$. Тогава $\frac{DH}{HB} = \tan 60^\circ \Leftrightarrow DH = \sqrt{3}HB$.

$\frac{DH}{AB} = \tan 30^\circ \Leftrightarrow HB = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$ и следователно $DH = AB = a$. Тогава

$$V_{ABCD} = \frac{S_{ABC} \cdot DH}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a \Leftrightarrow a = 1. \quad \text{От } \triangle BHD \Rightarrow \frac{DH}{DB} = \sin 60^\circ \Rightarrow DB = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Накрая намираме лесно по Питагоровата теорема от $\triangle ABD$, че $AD = \frac{\sqrt{21}}{3}$.

Задача 10. Виж http://www.fmi.uni-sofia.bg/turniri/resh_1_kryg_2011