LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година

<u>Критерии за оценяване</u>
<u>4. клас</u>

1. Дадени са равностранен триъгълник и квадрат. Периметърът на триъгълника е *a* мм, а периметърът на квадрата е *b* см, където:
***a* е неизвестното число от равенството (2011 – *a*).5 = 9360 : 9, а**
***b* е равно на 3700 – (2011 + 199.7).**
Намерете дължините на страните на триъгълника и квадрата и ги сравнете.
7 т.

Намерено: 9360 : 9 = 1040;	0,5 т.
2011 – *a* = 1040 : 5; 2011 – *a* = 208;	1 т.
a = 2011 – 208 = 1803;	0,5 т.
1803 : 3 = 601 мм е страната на триъгълника;	1 т.
199 . 7 = 1393;	1 т.
b = 3700 – (2011 + 1393) = 3700 – 3404 = 296;	1 т.
296 : 4 = 74 см е страната на квадрата.	1 т.
Сравняване на страните на триъгълника и квадрата:	
74 см = 740 мм $>$ 601 мм.	1 т.

Забележка: Ако е направена техническа грешка при изчисленията, но после разсъжденията са верни, да се дават точките за верните разсъждения.

2. Пътешественик изчислил, че за две години е изминал 1665 км с кола, което е 5 пъти по-малко от пътя, изминат със самолет и със 166 км повече от пътя, изминат с влак.

а) Колко километра е изминал пътешественикът общо за двете години? 3 т.

б) Намерете по колко километра е изминал пътешественикът през всяка от двете години, ако през втората е изминал с 1499 км повече от първата година. 4 т.

Намерено:

а) 1665 . 5 = 8325 км е пътят, изминат със самолет;	1 т.
1665 – 166 = 1499 км е пътят, изминат с влак;	1 т.
1665 + 8325 + 1499 = 11 489 км е изминал пътешественикът;	1 т.
б) 11 489 – 1499 = 9990 км щеше да измине пътешественикът за двете години, ако през втората беше изминал толкова, колкото и през първата;	2 т.
9990 : 2 = 4995 км е изминал през първата година;	1 т.
4995 + 1499 = 6494 км е изминал през втората година.	1 т.

3. Три килограма ябълки струват колкото два килограма круши, а три килограма круши струват колкото един килограм череши.

а) Колко килограма ябълки могат да се купят с парите за два килограма череши? **3 т.**

б) Намерете цената на един килограм череши, ако 18 кг ябълки и 12 кг круши струват общо 16 лв. 56 ст. **4 т.**

Намерено:

а) Щом 1 кг череши струва колкото 3 кг круши, то 2 кг череши са колкото 3 . 2 = 6 кг круши; 1 т.

2 кг круши струват колкото 3 кг ябълки. Но 6 кг круши са 3 пъти повече (6 : 2 = 3) и струват колкото 3 . 3 = 9 кг ябълки; 2 т.

б) 18 кг ябълки са 6 пъти повече от 3 кг ябълки (18 : 3 = 6) и струват колкото 2 . 6 = 12 кг круши; 1 т.

18 кг ябълки и 12 кг круши струват колкото 12 + 12 = 24 кг круши; 1 т.

24 кг круши са 8 пъти повече от 3 кг круши (24 : 3 = 8) и струват колкото 8 кг череши. 1 т.

2 лв. 7 ст. (или 207 ст.) струва килограм череши. 1 т.

5. клас

1. Намерете числото, което е с 20,11 по-малко от произведението на числата *a, b* и *c*, където

$\boldsymbol{a} = 87,3\,.\,0,3 + 0,3\,.\,12,7$,

***b* е числото, за което е изпълнено равенството** $7,5 : b = 2,5\,.\,0,5 - 0,5$,

и *c* е равно на най-голямата десетична дроб, която се записва с две цифри след десетичната запетая и е по-малка от 1,1. **7 т.**

Намерено:

$a = 0,3.(87,3 + 12,7) = 0,3.100 = 30$; 2 т.

$7,5 : b = 1,25 - 0,5$; 1 т.

$7,5 : b = 0,75 \Rightarrow b = 7,5 : 0,75 = 10$; 1 т.

c = 1,09; 1 т.

$a.b.c = 30.10.1,09 = 327$; 1 т.

Търсеното число е равно на $327 - 20,11 = 306,89$. 1 т.

2. Даден е правоъгълник *ABCD* със страни *AB* = 24 м и *BC* = 14 м. Точка *M* е средата на страната *AB*, а точка *N* – средата на страната *BC*.

а) Намерете лицето на триъгълника *DMN*. **3 т.**

б) Ако разстоянието от средата *P* на страната *CD* до правата *DN* е равно на 3,36 м, намерете разстоянието от точка *M* до правата *DN*. **4 т.**

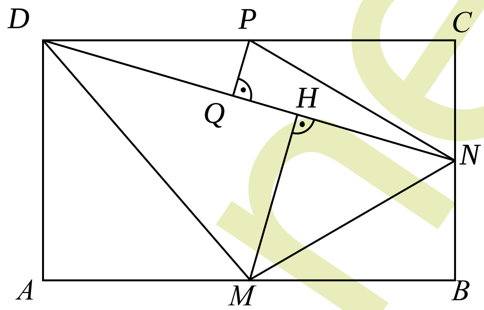
Намерено:

а) $S_{ABCD} = 24.14 = 336$ кв. м; 0,5 т.

$S_{DNC} = 84$ кв. м; $S_{AMD} = 84$ кв. м; $S_{MBN} = 42$ кв. м; 1,5 т.

$S_{MND} = 336 - (84+84+42) = 126$ кв. м. 1 т.

б) Построени разстоянията PQ = 3,36 м и MH. 1 т.



I начин: Намерено:

$S_{PND} = \dfrac{DP.NC}{2} = 42$ кв. м;

$S_{PND} = 0{,}5.DN.PQ \Leftrightarrow 42 = 0{,}5.DN.3{,}36$

$\Rightarrow 42 = 1{,}68.DN \Rightarrow DN = 42:1{,}68 = 25$ м; 2 т.

$S_{DMN} = 0{,}5.DN.MH \Leftrightarrow 126 = 0{,}5.25.MH$

$\Rightarrow 126 = 12{,}5.MH \Rightarrow MH = 126:12{,}5 = 10{,}08$ м. 1 т.

II начин: Намерено:

$S_{PND} = \dfrac{DP.NC}{2} = 42$ кв. м и от 126 : 42 = 3 следва, че лицето на триъгълника *DPN* е 3 пъти по-голямо от лицето на *DNM*. 1 т.

Но двата триъгълника имат обща страна *DN* и от $S_{DNP} = 0{,}5.DN.PQ$ и $S_{DNM} = 0{,}5.DN.MH$ следва, че *MH* е 3 пъти по-голяма от *PQ*, т.е. *MH* = 3.3,36 = 10,08 м. 2 т.

3. Разстоянието между градовете *A* и *B* е 398,5 км. В 12 часа от град *A* за град *B* тръгнала лека кола със скорост 75 км/ч. Когато колата била изминала 30 км, от град *B* за град *A* тръгнал камион. Колата и камионът се срещнали в 15 ч 36 мин. Намерете с каква скорост се е движил камионът, ако преди срещата колата е спирала 6 минути, за да зареди с бензин. 7 т.

Намерено:

15 ч 36 мин – 12 ч = 3 ч 36 мин е времето, изминало от тръгването на леката кола до срещата; 1 т.

3 ч 36 мин – 6 мин = 3 ч 30 мин = 3,5 ч е пътувала леката кола до срещата; 1 т.

3,5 . 75 = 262,5 км е разстоянието от град *A* до срещата; 1 т.

398,5 – 262,5 = 136 км е пътвал камионът; 1 т.

30 : 75 = 0,4 ч е пътувала колата, преди тръгването на камиона; 1 т.

3 ч 36 мин = 3 + 36 : 60 = 3 + 0,6 =3,6 ч; 3,6 – 0,4 = 3,2 ч е пътувал камионът; 1 т.

136 : 3,2 = 42,5 км/ч е скоростта на камиона; 1 т.

<u>6. клас</u>

1. Пресметнете стойността на израза $M = (-a^2.a^{-3}):b^{-1} - b^{-1}.b^0.(-a)^1$**, където** $a = |-0{,}1+0{,}01| - 0{,}09:(-0{,}1) - (-3{,}7).0{,}03.(-90)$**, а *b* е числото, за което е вярно равенството** $\left(-\dfrac{7}{10} + 1\dfrac{14}{15} - \dfrac{3}{10}\right):(-b) = -\dfrac{4}{9} + 10:54$. **7 т.**

Намерено:

$a=\left|-0,09\right|+0,9-9,99=0,09+0,9-9,99=-9$; 2 т.

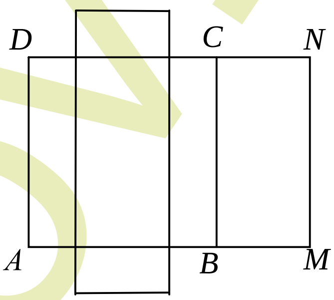
$\left(-1+1\dfrac{14}{15}\right):(-b)=-\dfrac{4}{9}+\dfrac{10}{54}\Rightarrow\dfrac{14}{15}:(-b)=-\dfrac{12}{27}+\dfrac{5}{27}$

$\Rightarrow\dfrac{14}{15}:(-b)=-\dfrac{7}{27}\Rightarrow(-b)=\dfrac{14}{15}:\left(-\dfrac{7}{27}\right)\Rightarrow b=\dfrac{18}{5}=3,6$; 2 т.

$M=\left(-\dfrac{a^2}{a^3}\right):\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{b}\cdot1\cdot(-a)=-\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}$; 2 т.

$M=-\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=-\dfrac{3,6}{-9}+\dfrac{-9}{3,6}=0,4-2,5=-2,1.$ 1 т.

2. На чертежа е дадена развивката на правоъгълен паралелепипед. Четириъгълникът *ABCD* е квадрат с лице 144 cm^2, а периметърът на правоъгълника *AMND* е 64 cm.



а) Намерете измеренията на паралелепипеда. **4 т.**

б) Определете с колко процента ще се измени обемът на паралелепипеда, ако едно от измеренията увеличим 6 пъти, а останалите две измерения намалим 2 пъти.

3 т.

Намерено:

а) $144=2^4.3^2=12^2\Rightarrow AB$ = 12 cm (едно от измеренията на паралелепипеда);

1 т.

От AD = MN = 12 cm и $P_{AMND}=2.AD+2.AM$ получаваме, че

$64=2.12+2.AM\Rightarrow AM=20\,\text{cm}$; 1 т.

BM = AM – AB = 20 – 12 = 8 cm (второто измерение на паралелепипеда);

1 т.

Третото измерение е равно на (AB – 8 cm) : 2 = 2 cm. 1 т.

б) Намерено:

обемът на паралелепипеда $V=a.b.c$, където измеренията на паралелепипеда са a = 12 cm, b = 8 cm, c = 2 cm (може да се намери и стойността му $V=a.b.c=12.8.2=192\ \text{cm}^3$); 1 т.

След изменението обемът ще е равен на $V_1=6.a\cdot\dfrac{b}{2}\cdot\dfrac{c}{2}=\dfrac{3}{2}a.b.c=1,5.V$ (може да се намери и стойността му $V_1=288\ \text{cm}^3$); 1 т.

Следователно обемът ще се увеличи с 50% (може да се намери и като се използват пресметнатите стойности на двата обема $\dfrac{288-192}{192}\cdot100\%=50\%$. 1 т.

3. В правоъгълна координатна система с мерна единица 1 cm изобразете точките $A(x;\,x)$, $B(-x;\,x)$ и $C(-x;\,-x)$,

където $x=\dfrac{-6^4.18^4}{(-16)^2.81^3}-2$. Намерете координатите на точките, разстоянието от които до правата *AB* е 2 cm, а до правата *BC* е 3 cm. **7 т.**

Намерено:

$$x=\frac{-2^4.3^4.2^4.3^8}{2^8.3^{12}}-2=-3.$$

2 т.

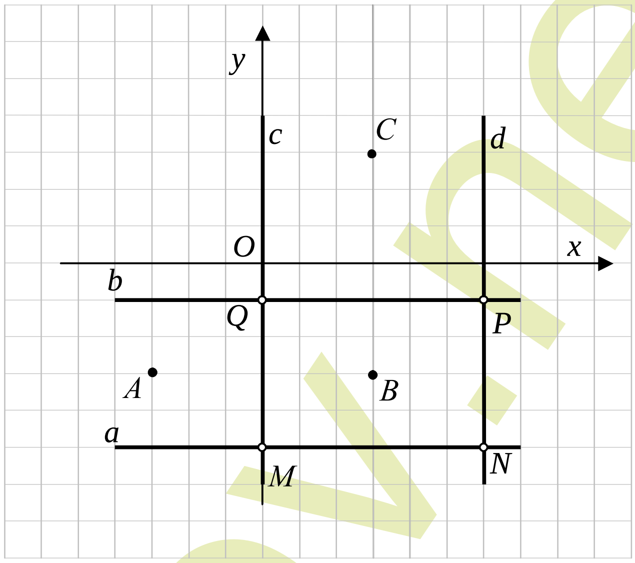
Изобразени точките $A(-3;\ -3)$, $B(3;\ -3)$ и $C(3;\ 3)$.

1 т.

Построени правите a и b, които са на разстояние 2 cm от AB, и правите c и d, които са на 3 cm от BC. 2 т.

Намерени координатите на пресечните им точки $M(0;\ -5)$, $N(6;\ -5)$, $P(6;\ -1)$ и $Q(0;\ -1)$.

2 т.



7. клас

1. а) Решете уравнението $\frac{1}{7}\cdot\frac{7x+5}{2}-\frac{15x+24}{28}=\frac{3x-2}{4}-x$ **.** **3 т.**

б) Една бригада боядисала половината от определена площ за 2 часа и 30 минути. След това тя увеличила производителността си с 2 m^2 на час и боядисала останалата половина от площта за 2 часа и 20 минути. Намерете колко квадратни метра са били боядисани за първите 3 часа. 4 т.

а) Получено последователно

$\frac{7x+5}{14}-\frac{15x+24}{28}=\frac{3x-2}{4}-x$ 0,5 т.

$14x+10-15x-24=21x-14-28x$ 1 т.

$6x = 0$ 1 т.

Намерено $x = 0$. 0,5 т.

б) Въведени x m^2/h и $x + 2$ m^2/h са производителностите на бригадата преди и след увеличението. 0,5 т.

Изразени боядисаните площи $\frac{5}{2}x\,\mathrm{m}^2$ и $\frac{7}{3}(x+2)$ m^2 преди и след увеличението.

1 т.

Съставен модела $\frac{5}{2}x=\frac{7}{3}(x+2)$ и намерено $x = 28$. 1,5 т.

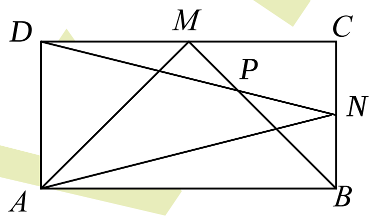
Намерена бояядисаната площ за първите 2 ч 30 мин $\frac{5}{2}\cdot 28=70\,\mathrm{m}^2$. 0,5

Намерена боядисаната площ за следващите 30 мин $\frac{1}{2}\cdot 30=15$ m^2, т.е. общо за първите 3 часа $70 + 15 = 85$ m^2. 0,5 т.

2. Точките *M* и *N* са средите съответно на страните *CD* и *BC* на правоъгълника *ABCD*.

а) Докажете, че ∡*CDN* = ∡*BAN*. **2 т.**

б) Ако *P* е пресечната точка на правите *MB* и *DN*, докажете, че ∡*MAN* = ∡*DPM*. **5 т.**



а) Доказано $\triangle CDN \cong \triangle BAN$. 1 т.

Извод $\measuredangle CDN = \measuredangle BAN$. 1 т.

б) Доказано $\triangle DAM \cong \triangle CBM$; 1 т.

$\measuredangle DMA = \measuredangle CMB = \alpha$. 1 т.

Следователно $\measuredangle MAB = \measuredangle DMA = \alpha$ като кръстни при $AB \parallel CD$. 1 т.

Изразено:

$\measuredangle MAN = \measuredangle MAB - \measuredangle NAB = \alpha - \beta$, където $\measuredangle CDN = \measuredangle BAN = \beta$; 1 т.

От $\measuredangle BMC$ външен за $\triangle DMP$ следва, че $\measuredangle BMC = \measuredangle DPM + \measuredangle MDP$, т.е. $\Rightarrow \measuredangle DPM = \alpha - \beta = \measuredangle MAN$. 1 т.

3. Дадени са уравненията $3ax - x = 3a^2 - a\left|4x(3a+x) - (3a+2x)^2\right|$ **и** $a(x+12) = -2x - 24$**, където *a* е параметър.**

а) Решете уравненията. **3 т.**

б) Намерете стойностите на *a*, за които двете уравнения са еквивалентни. **4 т.**

3. а) За доказано $\left|12ax + 4x^2 - 9a^2 - 12ax - 4x^2\right| = \left|-9a^2\right| = 9a^2$ 0,5 т.

и получено $(3a-1)x = -3a^2(3a-1)$. 0,5 т.

За намерено: при $a = \frac{1}{3} \Rightarrow$ всяко число е решение; при $a \neq \frac{1}{3} \Rightarrow x = -3a^2$. 1 т.

За решаване на второто уравнение: при $a = -2$ всяко число е решение; при $a \neq -2$ $\Rightarrow x = -12$. 1 т.

б) При $a = \frac{1}{3}$ двете уравнения не са еквивалентни, тъй като решение на първото е всяко число, а второто има единствен корен -12. Аналогично и при $a = -2$ двете уравнения не са еквивалентни. 1 т.

При $a \neq \frac{1}{3}$ и $a \neq -2$ и двете уравненията имат по един корен и те ще са еквивалентни, ако корените им са равни, т.е. $-3a^2 = -12$. 1 т.

$-3a^2 = -12 \Leftrightarrow -3a^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow -3(a^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow -3(a-2)(a+2) = 0$. 1 т.

Последното равенство е изпълнено при $a = -2$ и $a = 2$. Тъй като $a \neq -2$, единствено решение е $a = 2$, т.е. двете уравнения са еквивалентни при $a = 2$. 1 т.

8. клас

1. В правоъгълна координатна система *Oxy* са дадени точките *A*(*a*; 0) и *B*(0; *b*), където $a = 2\left(\sqrt{54}+\sqrt{1,5}\right)-\sqrt{150}+\left(1-\sqrt{6}\right)^2-\sqrt{(-2)^6}$,

$$b=\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

а) Намерете линейната функция, чиято графика е правата *AB*; 3 т.

б) Постройте вектора $\overrightarrow{OC}$, ако $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}$ и докажете, че точка *C* лежи на правата *AB*. 4 т.

Намерено:

а) $a=6\sqrt{6}+\sqrt{6}-5\sqrt{6}+1-2\sqrt{6}+6-8=-1$; 1 т.

$b=\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$; 1 т.

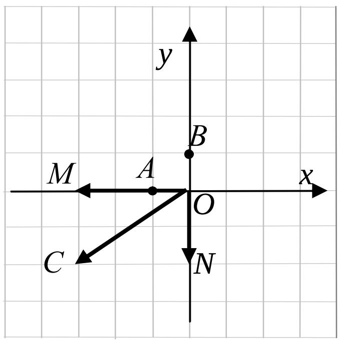
Ако търсената линейна функция е $y=f(x)=kx+n$, за получено $0 = k.(-1) + n$ и $1 = k.0 + n$, намерени $k = 1$, $n = 1$ и функцията $y=x+1$. 1 т.

б) Построени: точките $A(-1; 0)$ и $B(0; 1)$; 0,5 т.

вектори $\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{ON}=-2\overrightarrow{OB}$; 1 т.

вектор $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$; 0,5 т.

Намерени координатите на точка $C(-3; -2)$. 1 т.

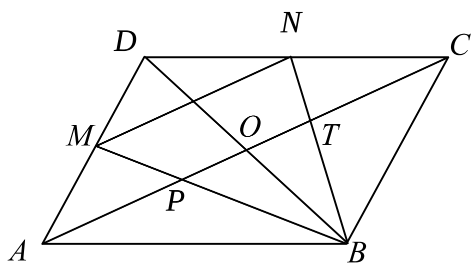


Проверено, че $f(-3)=-2$ (т.е. $-2 = -3 + 1$) и следователно *C* лежи на правата *AB*, която е графиката на линейната функция $y=f(x)=x+1$. 1 т.

2. Ъглополовящата на $\angle ABD$ в успоредника *ABCD* пресича диагонала *AC* в точка *P*, а страната *AD* – в точка *M*, като *AP* : *PC* = 1 : 2.

а) Докажете, че правите *BP* и *BC* са перпендикулярни. 3 т.

б) Ако *N* е средата на *CD* и *BN* = 12 cm, намерете дължините на диагонала *AC* и отсечката *MN*. 4 т.



а) Доказано: *AP* : *PO* = 2 : 1 (*O* е пресечната точка на диагоналите на успоредника); 1 т.

P е медицентър на $\triangle ABD$; 1 т.

BM е медиана и ъглополовяща в $\triangle ABD \Rightarrow AB = BD$ и следователно $BM \perp AD$.

Но $AD \parallel BC \Rightarrow BM \perp BC$. 1 т.

б) Нека $BN \cap AC = T$. За доказано:

T е медицентър на $\triangle BDC$; 1 т.

$BT = \frac{2}{3}BN = 8\,\text{cm}$; $CT = 2TO = TP$ и BT е медиана в правоъглния $\triangle BPC$.

1 т.

Намерено:

$PC = 2BT = 16$ cm и $AC = 1{,}5.16 = 24$ cm; 1 т.

$MN = \frac{1}{2}AC = 12$ cm (средна отсечка в $\triangle ADC$). 1 т.

3. От съд с вместимост 50 литра, пълен догоре с чист спирт, отлели известно количество и го допълнили с вода. След това отлели два пъти по-голямо количество от първия път и отново допълнили с вода. Колко литра спирт са отлели първия път, ако накрая в съда е останал спиртен разтвор с концентрация 12%. **7 т.**

Нека първият път са отлели x литра чист спирт. Първото смесване е отразено в таблицата::

	Концентрация на спирта	Общо количество, литри	Чист спирт, литри	
Чист спирт	1	$50-x$	$50-x$	0,5 т.
Вода	0	x	0	0,5 т-
Разтвор I	$\frac{50-x}{50}$	50	$50-x$	1 т.

Второто смесване е отразено във втората таблица:

	Концентрация на спирта	Общо количество, литри	Чист спирт, литри	
Разтвор I	$\frac{50-x}{50}$	$50-2x$	$\frac{50-x}{50}(50-2x)$	0,5 т.
Вода	0	$2x$	0	0,5 т-
Разтвор II	12%	50	6	1 т.

За съставен модел $\frac{50-x}{50}(50-2x)=6$. 1 т.

За получено уравнението $x^2-75x+1100=0$ и намерено $x_1=55$, $x_2=20$. 1 т.

Тъй като $2x < 50$, то $x_1=55$ не е решение. Окончателно количеството на отлетия първия път спирт е 20 литра. 1 т.

9. клас

1. Решете:

а) уравнението $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}=2$ **3 т.**

б) системата $\begin{vmatrix} x^2+6xy+2y^2-3x=0 \\ 2x^2+3xy-3y^2-4x=0 \end{vmatrix}$ **4 т.**

а) Намерени допустими стойности $x\in[-1,5;\,4]$. 0,5 т.

Направени преобразуванията:

$\sqrt{2x+3}=2+\sqrt{4-x}\Leftrightarrow 2x+3=4+4\sqrt{4-x}+4-x\Leftrightarrow 3x-5=4\sqrt{4-x}$. 0,5 т.

При $3x-5\geq 0$, т.е. $x\geq\frac{5}{3}$ уравнението е еквивалентно на: 0,5 т.

$(3x-5)^2=16(4-x)\Leftrightarrow 9x^2-14x-38=0$. 0,5 т.

Намерени корените $x_1=3,\ x_2=-\frac{13}{9}$. 0,5 т.

Извод, че само $x_1=3$ е решение, тъй като $x_1=3\in[-1,5;\,4]$ и $3>\frac{5}{3}$, а

$x_2=-\frac{13}{9}<\frac{5}{3}$. 0,5 т.

Забележка. Вместо с допустимите стойности и неравенството $3x-5\geq 0$ може да се направи директна проверка дали намерените корени са решения. За директната проверка (без допустими стойности и $3x-5\geq 0$) и направен извод, че само $x_1=3$ е решение. 1,5 т.

б) За последователните преобразувания:

$$\begin{vmatrix} x^2+6xy+2y^2-3x=0 & |.4 \\ 2x^2+3xy-3y^2-4x=0 & |.(-3) \end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix} 4x^2+24xy+8y^2-12x=0 \\ -6x^2-9xy+9y^2+12x=0 \end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix} -2x^2+15xy+17y^2=0 \\ x^2+6xy+2y^2-3x=0 \end{vmatrix}$$

1 т.

Проверено, че двойката (0; 0) е решение на системата. 0,5 т.

При $y\neq 0$ първото уравнение е еквивалентно на $2\left(\frac{x}{y}\right)^2-15\frac{x}{y}-17=0$. 0,5 т.

Намерено: $\frac{x}{y}=-1$ или $\frac{x}{y}=\frac{17}{2}$. 1 т.

Намерено решението на системата при $\frac{x}{y}=-1$ и $y\neq 0$ – двойката $(-1;1)$. 0,5 т.

Намерено решението на системата при $\frac{x}{y}=\frac{17}{2}$ и $y \neq 0$ – двойката $\left(\frac{289}{167};\frac{34}{167}\right)$.

0,5 т.

2. Даден е изразът $M=\sqrt{\frac{a+9}{3}-2\sqrt{a}}-\sqrt{3}$**.**

а) Опростете израза *M*. **3 т.**

б) Намерете числената стойност на *M* при $a=\frac{1}{9}\left(\frac{x_1}{x_2^{\,2}}+\frac{x_2}{x_1^{\,2}}\right)$**, където** x_1 **и** x_2 **са корените на уравнението** $3x^2-9x-2=0$. **4 т.**

а) Извършени преобразуванията:

$$M=\sqrt{\frac{a+9}{3}-2\sqrt{a}}-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{a+9-6\sqrt{a}}}{\sqrt{3}}-\sqrt{3};$$ 1 т.

$$M=\frac{\sqrt{\left(\sqrt{a}-3\right)^2}}{\sqrt{3}}-\sqrt{3};$$ 1 т.

$$M=\frac{\left|\sqrt{a}-3\right|}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\frac{\left|\sqrt{a}-3\right|-3}{\sqrt{3}};$$ 0,5 т.

$$M=\frac{\left|\sqrt{a}-3\right|-3}{\sqrt{3}}=\begin{cases}\frac{\sqrt{a}-6}{\sqrt{3}} & \text{при } a\geq 9\\ -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}} & \text{при } 0\leq a<9\end{cases}.$$ 0,5 т.

б) Намерено $x_1+x_2=3$ и $x_1x_2=-\frac{2}{3}$. 0,5 т.

Преработено a във вида $a=\frac{\left(x_1+x_2\right)^3-3x_1x_2\left(x_1+x_2\right)}{9\left(x_1x_2\right)^2}$. 1,5 т.

Намерено $a = 8\frac{1}{4}$. 1 т.

От $a = 8\frac{1}{4}<9\Rightarrow M=-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}=-\sqrt{\frac{33}{4.3}}=-\frac{\sqrt{11}}{2}$. 1 т.

Забележка: Ако в а) е забравен модулът, за а) се отнема 1 т., а ако в б) е намерено a, но е заместено в грешния израз, или не е проверено, че $8\frac{1}{4}<9$, се отнема 0,5 т.

3. Дадено е уравнението $\dfrac{2\sqrt{2}a}{x-\sqrt{2}}-\dfrac{2a^2x+2x+4a}{x^2-2}+\dfrac{2}{x+\sqrt{2}}=-1.$

Намерете стойностите на реалния параметър *a*, за които:

а) корените на уравнението са реални противоположни числа. 3 т.

б) уравнението има единствен реален корен. 4 т.

а) Намерени допустими стойности $x\neq\pm\sqrt{2}$. 0,5 т.

Извършени преобразуванията:

$$\frac{2\sqrt{2}a}{x-\sqrt{2}}-\frac{2a^2x+2x+4a}{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}+\frac{2}{x+\sqrt{2}}=-1 \;\Big|.\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\neq 0;$$ 0,5 т.

$$2\sqrt{2}ax+4a-2a^2x-2x-4a+2x-2\sqrt{2}=-x^2+2 \Leftrightarrow x^2+2a\left(\sqrt{2}-a\right)x-2\sqrt{2}-2=0.$$

0,5 т.

Корените на уравнението са реални противоположни числа, ако $D>0$ и $x_1+x_2=0$, 0,5 т.

т.е. $a^2\left(\sqrt{2}-a\right)^2+2\sqrt{2}+2>0$ и $2a\left(\sqrt{2}-a\right)=0$. 0,5 т.

Неравенството е винаги вярно, а от равенството намираме $a=0$ или $a=\sqrt{2}$. И в двата случаи $x_{1,2}=\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}$,т.е са допустими стойности. 0,5 т.

б) Тъй като $D>0$ за всяко a, уравнението $x^2+2a\left(\sqrt{2}-a\right)x-2\sqrt{2}-2=0$ винаги има два различни реални корена x_1 и x_2. 0,5 т.

Следователно даденото уравнение ще има единствен корен, ако точно един от корените x_1 и x_2 е недопустима стойност, т.е. е равен на $\sqrt{2}$ или $-\sqrt{2}$. 1 т.

Намерени условия при които:

$\sqrt{2}$ е корен на уравнението $x^2+2a\left(\sqrt{2}-a\right)x-2\sqrt{2}-2=0$, а именно $2\sqrt{2}a^2-4a+2\sqrt{2}=0$ 0,5 т.

и получено, че няма такива реални стойности на *a*. 0,5 т.

$-\sqrt{2}$ е корен на уравнението $x^2+2a\left(\sqrt{2}-a\right)x-2\sqrt{2}-2=0$, а именно $2\sqrt{2}a^2-4a-2\sqrt{2}=0$ 0,5 т.

и получено, че $a_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, които са търсените стойности на параметъра. 1т.

<u>10. клас</u>

1. а) Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията $y=-x^2+6x-4$ при $x\in[0;4]$. **3 т.**

б) Намерете за кои стойности на параметъра *a* най-малката стойност на функцията $f(x)=a\left(x^2-6x+4\right)^2-a\left(6x-x^2\right)-1$ при $x\in[0;4]$ е равна на −13.

4 т.

а) Намерено:

абсцисата на върха на параболата $x = 3$ и ординатата $y(3) = 5$; 1 т.

$y(0) = -4$ и $y(4) = 4$. 0,5 т.

Начертана параболата при $x\in[0;4]$ или обосновано, че при $x\in[0;4]$ функцията расте, а при $x\in[3;4]$ – намалява. 1 т.

Извод, че най-малката стойност на функцията е -4, а най-голямата е 5. 0,5 т.

б) Въведено помощно неизвестно $t=-x^2+6x-4$ и изразена функцията чрез t

$f(x)=a\left(-x^2+6x-4\right)^2-a\left(-x^2+6x-4\right)-4a-1=g(t)=at^2-at-4a-1$ 1 т.

Направен извод, че $t\in[-4;5]$. 0,5 т.

При $a > 0$ намерено, че най-малката стойност на $g(t)$ е равна на $g\left(\frac{1}{2}\right)$ и

$\frac{a}{4}-\frac{a}{2}-4a-1=-13\Rightarrow a=\frac{48}{17}$. 1 т.

При $a < 0$ намерено, че най-малката стойност на $g(t)$ е равна на

$g(-4)=g(5)=16a-1$ и $16a-1=-13\Rightarrow a=-\frac{3}{4}$. 1 т.

Извод, че при $a = 0$, функцията е равна на константата -1, т.е. $a = 0$ не е решение.

0,5 т.

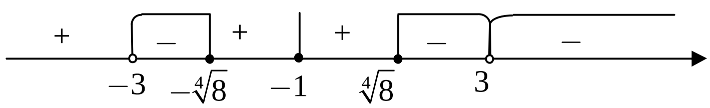
2. Решете неравенството $\frac{\left(x^4-8\right)\left(x^2-2x-3\right)^{2010}}{\left(9-x^2\right)^{1009}.(2x-6)^{1001}}\le 0$ и проверете дали числото $a=\left(\frac{3}{\sqrt[3]{9}}-\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{72}+\sqrt[3]{96}+\sqrt[3]{128}\right)$ е негово решение. **7 т.**

Намерени допустими стойности $x \neq \pm 3$. 0,5 т.

Получено: $\dfrac{\left(x-\sqrt[4]{8}\right)\left(x+\sqrt[4]{8}\right)\left(x^2+\sqrt{8}\right)\left(x+1\right)^{2010}}{-2^{1001}\left(x+3\right)^{1009}} \leq 0$. 1 т.

Извод, че $x^2+\sqrt{8}>0$ и $\left(x+1\right)^{2010} \geq 0$ за всяко x. 0,5 т.

Извод, че $x=\pm\sqrt[4]{8}$ и $x = -1$ са решения. 0,5 т.



1 т.

Намерено, че решение на неравенството е $x \in \left(-3; -\sqrt[4]{8}\right] \cup \{-1\} \cup \left[\sqrt[4]{8}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.

1 т.

Намерено

$$a=\left(\frac{3}{\sqrt[3]{9}}-\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{72}+\sqrt[3]{96}+\sqrt[3]{128}\right)=6+3\sqrt[3]{\frac{32}{3}}+3\sqrt[3]{\frac{128}{9}}-\sqrt[3]{4.72}-\sqrt[3]{4.96}-\sqrt[3]{4.128}=$$

$$6+2\sqrt[3]{4.9}+4\sqrt[3]{2.3}-2\sqrt[3]{4.9}-4\sqrt[3]{2.3}-8=-2.$$ 2 т.

Проверено, че $-3<-2<-\sqrt[4]{8}$ и следователно -2 е решение на неравенството.

0,5 т.

3. Нека $f\left(x\right)=x^2-2mx+8$, където m е реален параметър. Намерете стойностите на m, за които:

а) уравнението $f\left(x\right)=0$ има реални корени x_1 и x_2, за които $\left|x_1-x_2\right| \leq 1$.

3 т.

б) неравенството $f\left(x\right) \geq 0$ е изпълнено за всяко цяло число x. 4 т.

а) Намерено:
уравнението има реални корени, ако $D \geq 0$, т.е. при $m \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}; +\infty\right)$;

1 т.

$\left|x_1-x_2\right| \leq 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2-8} \leq 1$; 0,5 т.

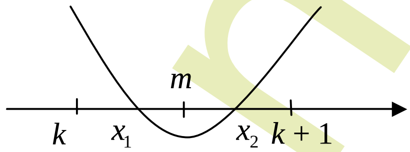
$\Leftrightarrow m \in \left[-\dfrac{\sqrt{33}}{2}; \dfrac{\sqrt{33}}{2}\right]$; 1 т.

сечението $m \in \left[-\dfrac{\sqrt{33}}{2}; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}; \dfrac{\sqrt{33}}{2}\right]$. 0,5 т.

б) Разгледан случая $D \le 0 \Leftrightarrow m \in \left[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right]$. 1 т.

При $D > 0$ направени:

извод, че $|x_1 - x_2| \le 1 \Leftrightarrow m \in \left[-\frac{\sqrt{33}}{2}; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}; \frac{\sqrt{33}}{2}\right]$ е необходимо условие неравенството $f(x) \ge 0$ да е изпълнено за всяко цяло число x; 0,5 т.



извод, че за да е изпълнено неравенството за всяко цяло число x, параболата трябва да е разположена, както е показано на чертежа. 0,5 т.

Разгледан случая $m \in \left[2\sqrt{2}; \frac{\sqrt{33}}{2}\right]$: Тъй като $2 < m < 3$ и $f(2) = 12 - 4m > 0$, то на чертежа трябва k да е равно на 2. Следователно достатъчно е да е изпълнено $f(3) = 17 - 6m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{17}{6}$, т.е. $m \in \left[2\sqrt{2}; \frac{17}{6}\right]$. 1 т.

Аналогично при $m \in \left[-\frac{\sqrt{33}}{2}; -2\sqrt{2}\right]$ получено, че $m \in \left[-\frac{17}{6}; -2\sqrt{2}\right]$. 0,5 т.

Краен извод $m \in \left[-\frac{17}{6}; \frac{17}{6}\right]$. 0,5 т.

11. клас

1. Редицата $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е геометрична прогресия, за която $a_7 = 8\left(\sqrt{2} - 1\right)$ и $2a_3 + a_5 = 2$. Намерете:

а) първия член и частното на прогресията; 5 т.

б) най-малкото n, за което е изпълнено неравенството $|a_n| \ge 64\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

2 т.

а) Получена:

системата $\begin{cases} a_1 q^6 = 8\left(\sqrt{2} - 1\right) \\ 2a_1 q^2 + a_1 q^4 = 2 \end{cases}$; 1 т.

уравнението $\frac{q^4}{2 + q^2} = 4\left(\sqrt{2} - 1\right) \Leftrightarrow q^4 - 4\left(\sqrt{2} - 1\right)q^2 - 8\left(\sqrt{2} - 1\right) = 0$. 1 т.

Намерено:

$q = \pm\sqrt[4]{8}$; 1,5 т.

$a_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}$; 1 т.

двойките $\left(a_1=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}};\, q=-\sqrt[4]{2}\right)$ и $\left(a_1=\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}};\, q=\sqrt[4]{2}\right)$. 0,5 т.

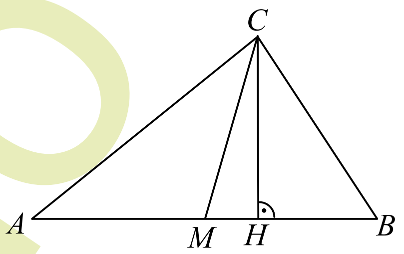
б) Получено неравенството $2^{\frac{3}{4}(n-1)}\geq 2^{\frac{15}{2}}$. 1 т.

Намерено най-голямо цяло решение на неравенството $n = 11$. 1 т.

2. Даден е триъгълник *ABC* с най-голяма страна *AB*, височина *CH* и медиана *CM*. Ако положителните числа *m, n,* и *s* са последователни членове на геометрична прогресия, а отсечките *AH, CH* и *BH* имат съответно дължини $\sqrt[3]{mns}$, $\sqrt{\frac{mn+ns+sm}{3}}$ и $\frac{1}{3}(m+n+s)$, да се докаже, че дължините на отсечките *AH, CM* и *BH* са последователни членове на аритметична прогресия. 7 т.

Намерено, че:

$n^2 = ms$ и $AH = n$. 1 т.



Дължините на AH, CM, BH ще образуват аритметична прогресия, ако $2CM = AB$. 0,5 т.

Точка H е вътрешна за AB, тъй като AB е най-голяма и ако има тъп ъгъл в $\triangle ABC$, то той може да е само при върха C. 0,5 т.

I начин:

$AB = AH + BH = n+\frac{1}{3}(m+n+s)=\frac{1}{3}(m+4n+s)$; 1 т.

$MH=\left|AH-\frac{1}{2}AB\right|=\frac{1}{6}|2n-m-s|$; 1 т.

$CM^2=MH^2+CH^2=\frac{1}{36}(18n^2+m^2+s^2+8mn+8ns)$; 2 т.

Доказано, че $4CM^2=AB^2$. 1 т.

II начин:

$2CM = AB \Leftrightarrow \measuredangle ACB = 90^\circ \Leftrightarrow AC^2+BC^2=AB^2 \Leftrightarrow AH^2+BH^2+2CH^2=AB^2$. 1 т.

$AB = AH + BH = n+\frac{1}{3}(m+n+s)=\frac{1}{3}(m+4n+s)$. 1 т.

Доказано, че $AH^2+BH^2+2CH^2=AB^2$. 3 т.

3. а) За кои стойности на параметъра *k* уравнението $k=\frac{2^{x-1}+5}{2^x+6}$ има реални корени. 2 т.

б) За кои положителни стойности на параметъра *a* множеството от стойностите на функцията $y=\dfrac{a^{x-1}+5}{a^x+3a}$ не съдържа нито едно четно число.

5 т.

а) Получено:

$2^x(2k-1)=10-12k$; 0,5 т.

При $k=\dfrac{1}{2}$ уравнението няма решение, а при $k\neq\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2^x=\dfrac{10-12k}{2k-1}$. 0,5 т.

Извод, че уравнението има реални корени при $\dfrac{10-12k}{2k-1}>0$, 0,5 т.

т.е. $k\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{6}\right)$. 0,5 т.

б) От равенството $y=\dfrac{a^{x-1}+5}{a^x+3a}\Rightarrow y.a^x+3ay=\dfrac{1}{a}\cdot a^x+5\Rightarrow a^x\left(y-\dfrac{1}{a}\right)=5-3ay$.

0,5 т.

$y=\dfrac{1}{a}$ не е стойност на функцията, тъй като за никое x не е изпълнено равенството. 0,5 т.

От $y\neq\dfrac{1}{a}\Rightarrow a^x=\dfrac{5-3ay}{y-\dfrac{1}{a}}$. Тъй като $a^x\in(0;+\infty)$, то стойностите на y са решенията на неравенството $\dfrac{5-3ay}{y-\dfrac{1}{a}}>0$, то $y\in\left(\dfrac{1}{a};\dfrac{5}{3a}\right)$. 1 т.

Множеството от стойностите на функцията $y\in\left(\dfrac{1}{a};\dfrac{5}{3a}\right)$ няма да съдържа четно число, ако за някое цяло неотрицателно число k е изпълнено, че $2k\leq\dfrac{1}{a}<\dfrac{5}{3a}\leq 2k+2$. 0,5 т.

За получено: $2k\leq\dfrac{1}{a}\leq\dfrac{3}{5}(2k+2)\Rightarrow k\leq 1,5$, т.е. k = 0 или k = 1. 1 т.

При k = 0 $\Rightarrow a\geq\dfrac{5}{6}$, 0,5 т.

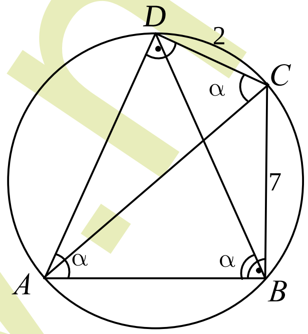
при k = 1 $\Rightarrow \dfrac{5}{12}\leq a\leq\dfrac{1}{2}$ 0,5 т.

Окончателно $a\in\left[\dfrac{5}{12};\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5}{6};+\infty\right)$. 0,5 т.

<u>12. клас</u>

1. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с диаметър AC. Намерете косинуса на $\measuredangle ABD$ и лицето на четириъгълника, ако $BC = 7$, $CD = 2$ и $AD = BD$.

7 т.



Намерено $\measuredangle ABC = \measuredangle ADC = 90^\circ$. 1 т.

Въведено $\measuredangle ABD = \measuredangle BAD = \measuredangle ACD = \alpha$ и изразени ъглите на $\triangle BDC$: $\measuredangle DBC = 90^\circ - \alpha$, $\measuredangle BDC = 2\alpha - 90^\circ$. 1 т.

Приложена синусова теорема в $\triangle BDC$:

$$\frac{2}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{7}{\sin(2\alpha - 90^\circ)}.$$ 1 т.

Получено уравнението $4\cos^2\alpha + 7\cos\alpha - 2 = 0$. 1 т.

Намерено:

$\cos\alpha = \frac{1}{4}$; 1 т.

$AC = \frac{2}{\cos\alpha} = 8$; 0,5 т.

$AD = 2\sqrt{15}$; $AB = \sqrt{15}$; 1 т.

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = 2\sqrt{15} + \frac{7\sqrt{15}}{2} = \frac{11\sqrt{15}}{2}$. 0,5 т.

2. От върховете B и C на куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ са спуснати перпендикуляри BM и CN към диагонала му AC_1 $(M \in AC_1, N \in AC_1)$.

а) Намерете отношението $AM : MN : NC_1$. **2 т.**

б) Ако правата BM пресича равнината (ADD_1) в точка E, а правата CN пресича равнината $(A_1B_1C_1)$ в точка F, докажете, че правите EF и BC са перпендикулярни. **5 т.**

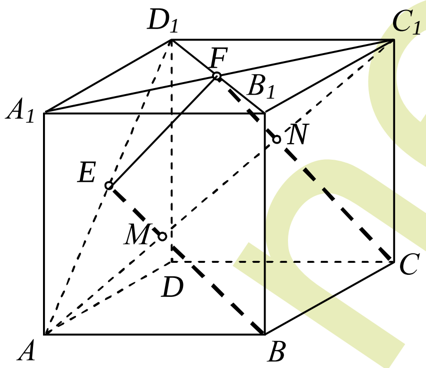
а) В $\triangle ABC_1$: $AB = a$, $BC_1 = a\sqrt{2}$ и $\measuredangle ABC_1 = 90^\circ \Rightarrow AC_1 = a\sqrt{3}$. Но BM е височина към хипотенузата $\Rightarrow AM.a\sqrt{3} = a^2 \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}AC_1$. 1 т.

Аналогично от $\triangle ACC_1$ $\Rightarrow C_1N = \frac{1}{3}AC_1$.

Тогава $AM : MN : NC_1 = 1:1:1$. 1 т.

б) BM и AC_1 лежат в равнината (ABC_1D_1), която пресича (ADD_1) в правата AD_1. Но $BM \cap AD_1 = E \Rightarrow BM \cap (ADD_1) = E$. 1 т.

От $\triangle AEM \sim \triangle C_1BM \Rightarrow \frac{AE}{BC_1} = \frac{AM}{MC_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow$



т. E е средата на AD_1. 1 т.

В равнината (ACC_1A_1) $CN \cap A_1C_1 = F \Rightarrow CN \cap (A_1B_1C_1) = F$ и аналогично F е средата на A_1C_1. 1 т.

I начин: EF е средна отсечка в триъгълника AD_1B_1 $\Rightarrow EF \parallel AB_1$, но $BC \perp (ABB_1) \Rightarrow BC \perp AB_1 \Rightarrow EF \perp BC$. 2 т.

II начин: E се проектира в (ABC) в E_1 – среда на AD, F се проектира в (ABC) в F_1 – среда на AC. Но $E_1F_1 \parallel CD, CD \perp BC \Rightarrow E_1F_1 \perp BC \Rightarrow EF \perp BC$ (теорема за трите перпендикуляра). 2 т.

3. а) Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(x) = \frac{1+\sin x}{2,25 - \cos^2 x}$. **3 т.**

б) Намерете стойностите на реалния параметър *a*, за които системата $\begin{cases} ay^2 - (a+2)y + a + 1 = 0 \\ (2,25 - \cos^2 x)y = 1 + \sin x \end{cases}$ **има решение.** **4 т.**

а) За полагане $\sin x = t \in [-1;1]$ и получено $f(x) = g(t) = \frac{1+t}{1,25+t^2}$. 1 т.

Намерено:

$g'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 1,25}{(1,25+t^2)^2}$; 0,5 т.

Критични точки $t_1 = -2,5$ и $t_2 = 0,5$ и интервали на растене и намаляване; 0,5 т.

Най-голямата стойност на функцията в интервала $[-1;1]$ е $g(0,5)=1$, а най-малката стойност е $g(-1)=0$. 1 т.

б) Изразено от второто уравнение $y=\dfrac{1+\sin x}{2,25-\cos^2 x}$ и направен извод, че $y\in[0;1]$ и следователно системата има решение когато уравнението $\varphi(y)=ay^2-(a+2)y+a+1=0$ има поне един корен в интервала $[0;1]$. 1 т.

Разгледан случая $a = 0$ е решение. 0,5 т.

Разгледан случая, когато уравнението има единствен корен в интервала $[0;1]$:

$\varphi(0).\varphi(1)\le 0 \Leftrightarrow (a+1)(a-1)\le 0 \Leftrightarrow a\in[-1;1]$. 1 т.

Разгледан случая когато уравнението има два корена в интервала $[0;1]$:

$$\begin{cases} D=-3a^2+4\ge 0 \\ a\varphi(0)\ge 0 \\ a\varphi(1)\ge 0 \\ 0<\dfrac{a+2}{2a}<1 \end{cases}$$

и направен извод, че няма решение. 1 т.

Окончателен отговор $a\in[-1;1]$. 0,5 т.