Олимпиада Ломоносов – 2009г.

Задача 1. С колко едното от две положителни числа е по-голямо от другото, ако средно аритметичното им е $2\sqrt{3}$, а средногеометричното им е $\sqrt{3}$?

Задача 2. В пресни гъби съдържанието на вода се колебае от 90% до 99%, а след изсушаването им - от 30% до 45%. Колко най-много пъти може да се намали теглото на гъбите в резултат на изсушаването им?

Задача 3. Решете уравнението

$$\log_5\left(\frac{(x+1)^2}{x}-a\right)=\log_5\frac{(x+1)^2}{x}-\log_5 a,$$

където a е реален параметър.

Задача 4. Може ли двустенен ъгъл с мярка 90^0 да се пресече с равнина така, че пресечниците да сключват ъгъл от 70^0? Отговорът да се обоснове.

Задача 5. Какви стойности може да приема най-големият общ делител на естествените числа m и n, ако при увеличаването на m със 6, то се увеличава 4 пъти?

Задача 6. Намерете броя на решенията на уравнението

$$5\sin x+4=|5\cos x+2|$$

в интервала $[0;\pi]$.

Задача 7. Две окръжности се допират външно в точка A и до трета окръжност съответно в точки B и C. Продължението на хордата AB от първата окръжност пресича втората в точка D, продължението на хордата AC пресича първата окръжност в точка E, а продълженията на хордите BE и CD пресичат третата окръжност съответно в точки F и G. Намерете BG, ако $BC=5$ и $BF=12$.

Задача 8. Стенния часовник се развалил така, че минутната стрелка започнала в произволен момент да си сменя мигновено посоката на движение, но да се движи с предишната си скорост. Всички възможни показания на тази стрелка в минути съвпадат с интервала $[0;60)$.

а) Може ли тази стрелка в продължение на един час да покаже всяко едно от числата 15 и 45 безброй много пъти?

б) Колко най-много пъти в продължение на три часа може да се повтори най-рядкото показание на тази стрелка (измежду всички възможни показания за тези три часа)?

Задача 9. Намерете всички двойки (x,y) такива, че за числата $u=\sqrt{4+x^3-9x}-x-3^y$ и $v=2-x-3^y$ да са изпълнени едновременно следните три твърдения:
1)Ако $|u|>|v|$, то $u>0$; 2) Ако $|u|<|v|$, то $0>v$; 3) Ако $|u|=|v|$, то $u>0>v$.