

Олимпиада „ Ломоносов ” – математика
Московски Държавен Университет – 2010 год.
Заклучителен етап 10-11 клас
Вариант I

1. Решете неравенството $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{(\log_2 3)^{4-x^2}} \leq (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-(\log_2 3)^{2x-1}}$.
2. Върху основата AC на равнобедрения триъгълник ABC е взета точка E , а върху бедрата AB и BC съответно точките D и F така, че $DE \parallel BC$ и $EF \parallel AB$. Каква част от лицето на $\triangle ABC$ е лицето на $\triangle DEF$, ако $BF : EF = 2 : 3$?
3. Двама инвеститора вложили пари в общ бизнес. След това единият от тях добавил още 1 млн лева, в резултат на което неговият дял се увеличил с 0,04, а когато добавил още 1 млн лева, дялът му се увеличил с още 0,02. Колко пари още трябва да добави той, за да увеличи дялът си още с 0,04?
4. Решете неравенството $\frac{1}{\sqrt{-x-2}} - \frac{1}{\sqrt{x+4}} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{(x+4)(-x-2)}}$.
5. Числата 54 и 128 са членове на геометрична прогресия. Намерете всички естествени числа, участващи в дадената прогресия.
6. Проекциите на крива в координатното пространство върху равнините Oxz и Oyz удовлетворяват съответно уравненията $5x + \cos z = 0$ и $z = \varphi$, където $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{y-3}$. Намерете функцията $y = f(x)$, графиката на която се състои от тези и само тези точки, които при дадените условия биха могли да бъдат проекции на точки от дадената крива върху равнината Oxy .
7. Намерете стойностите на реалния параметър a , за които системата
$$\begin{cases} 25^x - 13.5^x + a < 0 \\ 12 \sin^4(\pi x) - \cos(4\pi x) = 11 \end{cases}$$
 има поне едно решение.
8. Върху ръба AS на триъгълната пирамида $SABC$ са взети точки M и N , такива, че $AM = MN = NS$. Намерете лицето на триъгълника NBC , ако лицата на триъгълниците ABC , MBC и SBC са равни съответно на 1, 2 и $\sqrt{37}$.
9. На дъската е написан квадратният тричлен $x^2 + 9x + 47$. Таня (по свое усмотрение) увеличава или намалява с 1 коефициента пред x , след което Ваня увеличава или намалява с фиксирано число m свободния член, а след това тези действия се повтарят. Щом полученият на дъската многочлен има цял корен, Ваня получава оценка шест. Може ли тя да си осигури шестица при произволни действия на Таня, ако а) $m = 2$; б) $m = 3$?

10. Диагоналите на трапец $ABCD$ с основи $AD = 3$ и $BC = 1$ се пресичат в точка O . Две окръжности, пресичащи основата BC съответно в точките K и L , се допират една към друга в точка O , а до правата AD съответно в точките A и D . Пресметнете $AK^2 + DL^2$.