Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Първи кръг, 6 – 7 клас
1 Септември, 2014 г., Созопол

Задача 1. Възрастта на Динко е двуцифрено число n.

Красимира казала: „n е кратно на 3 и n е четно.“

Невена казала: „n е кратно на 3 и последната цифра на n е 5.“

Йовка казала: „n е кратно на 5 и сборът от цифрите на n е 12.“

Всяка от трите казала едно вярно и едно грешно твърдение. На колко години може да е Динко? (Намерете всички възможности.)

Задача 2. Намерете всички цифри a, за които числата

$$\overline{100a}, \overline{1001a}, \overline{10011a}, \overline{100111a}, \dots, \overline{100\underbrace{11\dots1}_{n}a}, \dots$$

имат общ делител, различен от 1.

Задача 3. а) Диагоналите на четириъгълника $ABCD$ се пресичат в точката O. Докажете, че $\dfrac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \dfrac{BO}{DO}$.

б) На страните AB и BC на триъгълника ABC са избрани съответно точките M и N така, че $AB = 2.AM$ и $BC = 3.CN$. Отсечките CM и AN са равни и се пресичат в токата O. Ако $AO = 6$ cm, намерете CO.

Задача 4. Ина опекла дребни сладки и ги оставила да изстинат на масата в кухнята. През нощта Дора влязла в кухнята, изяла една сладка и след това една четвърт от останалите. По-късно Мила слязла в кухнята и изяла една сладка и след това една четвърт от останалите. На сутринта Ина намерила в кухнята само 60 сладки. Колко сладки опекла Ина?

Задача 5. Стените на дървен куб със страна $n \geq 3$, където n е естествено число, са боядисани в червено. След това кубът е нарязан на n^3 кубчета със страна 1. От получените кубчета A имат по три червени стени, B имат по две червени стени, C имат по една червена стена и D нямат нито една червена стена.

Определете кои от равенствата $A = B$, $A = C$, $A = D$, $B = C$, $B = D$ и $C = D$ са възможни и колко е n, когато съответното равенство е изпълнено.

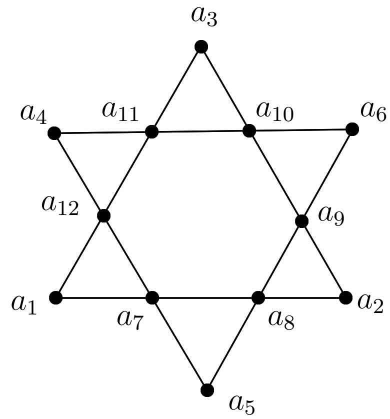
Задача 6. Числото 3720147410273 е 13 цифрено и има следните свойства:

1. Има четири последователни цифри, които образуват числото 2014.
2. Ако запишем цифрите му в обратен ред, ще получим същото число.

Намерете броя на всички такива 13 цифрени числа. (Първата цифра на всяко число е различна от 0.)

Задача 7. На чертежа с $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_{12}$ са означени естествените числа от 1 до 12, подредени в някакъв ред. Ако сборът на четирите числа върху всяка отсечка е един и същ, намерете най-малката възможна стойност на сбора

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6.$$



Задача 8. Намерете обема на правоъгълен паралелепипед с пълна повърхнина 2014 и целочислени ръбове, най-малкият от които е кратен на 5.

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Първи кръг, 8 – 9 клас
1 Септември, 2013 г., Созопол

Задача 1. Всяко от четирите числа a, $a+1$, $a+2$ и $a+3$ има точно 6 положителни делители. Съществуват точно 20 различни естествени числа, всяко от които е делител на поне едно от тези числа, като едно от тези 20 числа е 27. Намерете всички възможни стойности на a. (Числата 1 и n са делители на естественото число n.)

Задача 2. Дадени са 26 тежести с тегла съответно $1, 2, 3, \ldots, 26$ грама и везна. Казваме, че няколко от тежестите образуват *добро* множество, ако както и да поставим част от тях (или всичките) на везната, тя не се уравновесява. (Например, тежестите $1, 2, 4, 8, 16$ образуват добро множество, докато множеството от тежестите $2, 7, 8, 15, 25$ не е добро, защото $7 + 8 = 15$.)

Намерете добро множество с 6 тежести и докажете, че не съществува добро множество със 7 тежести.

Задача 3. Във всяка от клетките на дъска 2014×1 е поставен по един пул. Всеки пул е черен от едната страна и бял от другата. Имаме право да изберем пул, обърнат с черната страна нагоре, да го отстраним от дъската и да обърнем двата пула, които се намират в съседните му по страна квадратчета (ако в съседните квадратчета няма пулове, не обръщаме нито един пул, а ако има само един пул, го обръщаме). Определете всички начални разположения на пуловете, при които можем да вземем всички пулове от дъската.

Задача 4. Определете най-малката възможна стойност на $a + b + c + d$, ако a, b, c, d са естествени числа, за които $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} = \dfrac{9}{14}$.

Задача 5. Дадени са прости числа p, q и r, за които $p + q < 111$ и

$$\frac{p+q}{r} = p - q + r.$$

Да се намери най-голямата стойност на произведението pqr.

Задача 6. Някои от върховете на правилен 2014-ъгълник A са свързани с отсечки така, че прекараните отсечки не се пресичат във вътрешни точки. Да се докаже, че могат да се изберат поне 672 от върховете на A, всеки два от които не са свързани с отсечка.

Задача 7. Точка M е среда на страната AB на триъгълник ABC. Правата CM пресича описаната окръжност около $\triangle ABC$ в точка P, а точката Q е симетрична на P спрямо M. Правата BQ пресича страната AC в точка R. Ако $CRMB$ е вписан четириъгълник, да се намери $\sphericalangle BRC$.

Задача 8. В $\triangle ABC$ е построена ъглополовящата AP, $(P \in BC)$. Точката M лежи на отсечката AP, а точката N е симетрична на M спрямо средата на BC. Правата CN пресича правата AB в точка E (B е между A и E), а правата BN пресича правата AC в точка D (C е между A и D). Да се докаже, че $CD = BE$.

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Първи кръг, 10 – 12 клас
1 Септември, 2014 г., Созопол

Задача 1. Да се докаже, че за всеки три числа $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ е изпълнено неравенството:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{7}{5}.$$

Задача 2. Да се намери най-малкото естествено число n, което има поне 6 различни делители $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_6 < \cdots$, за които $d_3 + d_4 = d_5 + 6$ и $d_4 + d_5 = d_6 + 7$.

Задача 3. В остроъгълен $\triangle ABC$ са построени височините AH_a и BH_b и точка M е средата на страната AB. Около $\triangle AMH_a$ и $\triangle BMH_b$ са описани окръжности, които се пресичат повторно в точка P. Да се докаже, че точката P лежи на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 4. Един квадрат със страна 1 е оцветен в три цвята. Кое е най-голямото реално число α, такова, че в квадрата винаги могат да бъдат намерени две едноцветни точки на разстояние поне α?

Задача 5. Нека $f(x)$ е полином с цели коефициенти, за който съществуват различни цели числа a и b такива, че $f(a)$ и $f(b)$ са взаимнопрости. Да се докаже, че съществуват безбройно много стойности на x, в които стойностите на $f(x)$ са две по две взаимнопрости.

Задача 6. Дадени са числата $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 3$. Да се докаже, че е в сила поне едно от неравенствата:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1} + x_{i-2}} \geq \frac{n}{2}.$$

Индексите, различни от $1, 2, \ldots, n$ се разглеждат по модул n, т.е. $x_0 = x_n$, $x_{-1} = x_{n-1}$, $x_{n+1} = x_1$ и $x_{n+2} = x_2$.

Задача 7. За $\triangle ABC$ симетричната права CG_c, $(G_c \in AB)$ на медианата CM_c спрямо ъглополовящата CL_c се нарича симедиана на триъгълника през върха C. За всеки триъгълник има три симедиани AG_a, BG_b и CG_c, които определят симедианния $\triangle G_aG_bG_c$. Може ли за някакъв $\triangle ABC$ симедианният $\triangle G_aG_bG_c$ да е равностранен, а $\triangle ABC$ да не е равностранен?

Задача 8. В клас с n ученика в продължение на k дни всеки ден се избират трима за изпитване. Всеки двама могат да бъдат избрани в една тройка най-много един път. Да се докаже, че за най-голямото такова k са изпълнени равенствата:

$$\frac{n(n-3)}{6} \leq k \leq \frac{n(n-1)}{6}.$$

Съюз на математиците в България

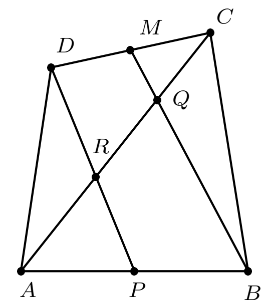
Пети български фестивал на младите математици

Втори кръг, 6 – 7 клас
2 Септември, 2014 г., Созопол

Задача 1. Карлсон получил плик с шоколадови бонбони и плик с малинови бонбони. Той изял $\frac{3}{4}$ от шоколадовите бонбони и $\frac{2}{3}$ от малиновите бонбони. След кратка почивка Карлсон изял $\frac{2}{3}$ от останалите шоколадови бонбони и $\frac{3}{4}$ от останалите малинови бонбони. След това Карсон забелязал, че са останали общо 10 бонбона. Общо колко бонбона е получил Карлсон?

Задача 2. Намерете най-голямото естествено число n, за което съществуват различни естествени числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ със следното свойство: сборът на всеки три числа от дадените е просто число.

Задача 3. Даден е четириъгълникът $ABCD$. Точките P и M са средите съответно на страните AB и CD. Диагоналът AC пресича DP в точката R и BM в точката Q. Ако $\frac{MQ}{BQ} = \frac{3}{8}$, намерете $\frac{DR}{RP}$.



Задача 4. По колко начина можем да подредим 4 момчета и 8 момичета едно зад друго, така че всяко момче да е между две момичета?

Задача 5. На кораб с три палуби пътуват повече от 600, но по-малко от 650 пътници. Когато всички пътници излезли на палубите, се оказало, че броят на пътниците на първата палуба с 20 повече от 20% от броя на пътниците на втората, а на третата палуба има с 25% повече пътници, отколкото на първата. Колко са пътниците на кораба?

Задача 6. Намерете всички естествени числа, чиито квадрат е шестцифрено число от вида $\overline{AB73AB}$.

Задача 7. По колко начина можем да подредим числата $1, 2, \dots, 10$ в редица $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ така, че нито едно от числата a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, $\dots$, $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ да не се дели на 3?

Задача 8. В редица са наредени 2014 естествени числа. Ана и Вера, редувайки се (първа е Ана втора е Вера) вземат по едно число от края на редицата, или най-лявото или най-дясното. Може ли Ана да играе така, че сборът от нейните числа да е не по-малък от сборът на числата на Вера?

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Втори кръг, 8 – 9 клас
2 Септември, 2013 г., Созопол

Задача 1. Дадени са безбройно много естествени числа $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$, като за всяко $n \geq 1$ е изпълнено неравенството $a_{n+1} \leq a_1 + \cdots + a_n$. Да се докаже, че всяко естествено число може да се представи като сбор на няколко (възможно едно) от дадените числа.

Задача 2. Държава има n града, някои свързани с двупосочни авиолинии. Има $r > 2014$ маршрути между градове, включващи не повече от 1 прекачване (посоката на движение е важна). Намерете най-малкото възможно n и най-малкото възможно r за това n.

Задача 3. Точката D е среда на дъгата ACB от описаната окръжност около $\triangle ABC$. Окръжност през точките D и C пресича отсечките CA и CB съответно в точки M и N. Да се докаже, че $AM = BN$.

Задача 4. Нека a, b, c са дължините на страните на триъгълник. Да се докажат неравенствата:

$$\sqrt{2}(a+b+c) \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} < \sqrt{3}(a+b+c).$$

Задача 5. Намерете всички $a, b, c \in \mathbb{N}$, за които е изпълнено, че $4^a + 2^b + 1 = c^2$ и $b < 2a$.

Задача 6. За всяко естествено число m означаваме с $\tau(m)$ броя на естествените делители на m. Да се намерят всички естествени числа n, за които от $d|n$, $d \in \mathbb{N}$, следва $\tau(d)|\tau(n)$.

Задача 7. През един ден определен брой хора посещават по веднъж една библиотека. Известно е, че не всички са влезли по едно и също време, но измежду всеки трима от тях има двама, които са се срещнали в библиотеката. Да се докаже, че могат да се изберат два момента от време такива, че всеки читател през този ден е бил в библиотеката в поне един от тях.

Задача 8. Да се намери броя на пермутациите $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$ на числата $1, 2, \ldots, 25$, за които всяко от числата a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, $\ldots$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{25}$ не се дели на 3.

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Втори кръг, 10 – 12 клас
2 Септември, 2014 г., Созопол

Задача 1. Всяка от клетките на таблица 2014×2014 е оцветена в черно или бяло. Известно е, че всеки квадрат 2×2 съдържа четен брой черни клетки, а всеки кръст (квадрат 3×3 без четирите ъглови клетки) съдържа нечетен брой черни клетки. Да се докаже, че четирите ъглови клетки на таблицата са едноцветни.

Задача 2. Точката с координати (p^m, q^n), където p и q са прости числа, а m и n са естествени числа, лежи на окръжността с център началото на координатната система и радиус r, където r е естествено число. Да се намери r.

Задача 3. Николай и Петър делят торта с формата на триъгълник. Първоначално Николай избира една точка P във вътрешността на триъгълника, а след това Петър разрязва тортата по избрана от него права през P, избира за себе си едно от парчетата, и оставя другото на Николай. Каква най-голяма част от тортата може да бъде сигурен, че ще получи Николай, ако избере точката P по възможно най-добрия начин?

Задача 4. Да се намерят всички полиноми $P, Q \in R[x]$, такива че:

- $P(2) = 2$;
- $Q(x)$ няма отрицателни корени;
- $(x-2)P(x^2-1)Q(x+1) = P(x)Q(x^2) + Q(x+1)$.

Задача 5. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Лъчите AB и DC се пресичат в точка E. Лъчите AD и BC се пресичат в точка F. Ъглополовящата на $\sphericalangle DCF$ пресича EF в точка K. Нека I_1 и I_2 са центровете на вписаните окръжности в $\triangle ECB$ и $\triangle FCD$. Нека M е проекцията на I_2 върху CF и нека N е проекцията на I_1 върху BC. Нека P е симетрична на N относно I_1. Ако P, M, K лежат на една права, то да се докаже, че в $ABCD$ може да се впише окръжност.

Задача 6. Реалните положителни числа a, b, c са такива, че е изпълнено неравенството $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$. Да се намери най-малката стойност на израза $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{c}$.

Задача 7. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ ъглите при върховете A и C са равни и ъглополовящата на ъгъла при върха B минава през средата на страната CD. Ако $CD = 3AD$, да се намери отношението $\dfrac{AB}{BC}$.

Задача 8. Правоъгълна таблица, запълнена с естествени числа наричаме *добра*, ако за всеки 2 нейни реда съществува стълб, за който числата в двете му пресечни клетки с тези 2 реда са от различна четност. Да се докаже, че за всяко $n > 2$ от добра таблица $n \times n$ може да се изтрие 1 стълб, така че получената таблица с n реда и $n-1$ стълба също да е добра.

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Трети кръг, 6 – 7 клас
4 Септември, 2014 г., Созопол

Задача 1. От шоколадовата фабрика Чарли взел кутия шоколадови моливи и кутия моливи със захарна глазура. Раздал на приятелите си $\frac{5}{9}$ от шоколадовите моливи и 64% от моливите със захарна глазура и му останали общо 42 молива. Общо колко молива взел Чарли от фабриката?

Задача 2. Учителят казал: *Измислих две естествени числа, по-големи от 1. Познайте кои са те.*

Ани знаела произведението на числата, а Боян знаел техния сбор.

Ани: *Аз не знам сбора.*

Боян: *Знам това. Сборът е по-малък от 14.*

Ани: *Знам това. Всъщност, вече знам числата.*

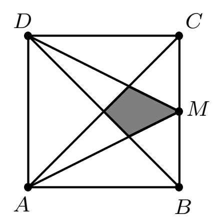
Боян: *Аз също.*

Кои числа е намислил учителят?

Задача 3. В редица са наредени двадесет външно еднакви монети. Две съседни монети са с тегла 9 и 11 (в този ред отляво надясно), като всички останали монети са с тегла по 10 грама. Да се намери монетата с тегло 11 грама с три претегляния с везни без тежести.

Задача 4. Намерете най-голямото естествено число a, за което съществува естествено $b > a$, такова че $\text{НОК}(a; b) - \text{НОД}(a; b) = \frac{ab}{99}$.

Задача 5. Точка M е среда на страната BC на квадрата $ABCD$. Каква част от лицето на квадрата е оцветена?



Задача 6. За дадено естествено число n за един ход изваждаме от n неговия най-голям делител (различен от n). С новото число извършваме същата операция и т.н. За колко хода от $n = 19^{19}$ ще получим числото 1?

Задача 7. Във всяко квадратче на шахматна дъска 8×8 има поставена пешка. Наричаме две пешки съседни, ако полетата им имат обща страна. Взимаме всички пешки една след друга в произволен ред. В момента, когато взимаме една пешка, в квадратчето ѝ записваме броя на нейните съседни, които още са на дъската. Нека S е сумата на записаните 64 числа. Намерете стойността на S.

Задача 8. На дъската е записано числото 1. Ако на дъската присъства числото x, то е разрешено там да се напишат още числата $3x + 1$, $5x + 2$ и $x - 7$. Кое е най-голямото двуцифрено число, което никога не може да се появи на дъската?

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Трети кръг, 8 – 9 клас
4 Септември, 2013 г., Созопол

Задача 1. Съществува ли безкрайно множество A от естествени числа със следното свойство: сборът от числата във всяко крайно подмножество на A да не е точна степен на естествено число?

Задача 2. Във вътрешността на триъгълник ABC, за който $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ е избрана точка D така, че $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = 45^\circ$. Ако $BD = 6$ cm, да се намери лицето на четириъгълника $ADCB$.

Задача 3. Четири деца си поделили n мъниста, където n е трицифрено число. Всяко дете имало или толкова мъниста, колкото някое друго, или два пъти по-малко от някое друго. Колко са възможните стойности на n?

Задача 4. Нека n е естествено число и a е произволен делител на $2n^2$. Да се докаже, че числото $n^2 + a$ не може да е точен квадрат.

Задача 5. Дадени са n монети, наредени по окръжност. $(n \geq 5)$ В началото всички са ези. Имаме право на следните операции:

1. Избираме монета и ако тя е ези, обръщаме двата ѝ съседа.

2. Избираме монета и ако тя е тура, обръщаме двата ѝ съседа през едно (т.е. обръщаме тези две монети, които са съседи на съседите ѝ).

За кои n е възможно след краен брой ходове да получим конфигурация, в която всички монети са тура?

Задача 6. По колко начина можем да подредим в кръг x жени и y мъже, $1 \leq y \leq x$, така че всеки мъж да е между две жени?

Задача 7. В редицата $a_1, a_2, a_3, \dots$ числото a_{n+1}, $(n \geq 2)$ е остатъкът на $a_n + a_{n-1} + 1$ при деление с 3. Ако $a_{93} = a_1$, то намерете a_1.

Задача 8. Върху страните AC и BC на триъгълник ABC са избрани съответно точки B_1 и A_1. Ако AA_1 и BB_1 се пресичат в точка X, да се докаже, че:

$$\text{а) } S_{XA_1B_1} < S_{ABX}; \qquad \text{б) } S_{XA_1B_1} < S_{CB_1A_1}.$$

Пети български фестивал на младите математици

Трети кръг, 10 – 12 клас
4 Септември, 2014 г., Созопол

Задача 1. През центъра O на равностранен $\triangle ABC$ е построена права l, която пресича страната CA в точка N и страната BC в точка M. Докажете, че от отсечките AM, BN и MN може да се построи триъгълник и дължината на височината към страната MN на всички построени триъгълници (когато правата l се мени) е една и съща.

Задача 2. Дадена е редицата $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1}$. Да се докаже, че $2a_n - 1$ е точен квадрат.

Задача 3. Граф G с 2014 върха не съдържа триъгълник. Ако множеството от степените на върховете на G е $\{1, 2, \ldots, k\}$, да се намери най-голямата възможна стойност на k.

Задача 4. Да се докаже, че за всеки три реални положителни числа x, y, z е изпълнено неравенството

$$\frac{x}{y+z} + \frac{25y}{z+x} + \frac{4z}{x+y} > 2.$$

Задача 5. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$. Нека P и Q лежат на отсечката AB, така че P е между A и Q. Нека H_1 и H_2 са петите на перпендикулярите съответно от A към CP и CQ. Нека H_3 и H_4 са петите на перпендикулярите съответно от B към CP и CQ. Нека $H_3H_4 \cap BC = X$ и $H_1H_2 \cap AC = Y$, като X е след B, а Y е след A. Ако $XY \parallel AB$, то да се докаже, че CP и CQ са изогонални, спрямо $\triangle ABC$.

Задача 6. Дадени са две крайни множества A и B от естествени числа, всяко от които съдържа поне 3 елемента. Две числа $a \in A$ и $b \in B$ наричаме *задружни*, ако техният най-голям общ делител е различен от 1. Известно е, че всеки елемент на A не е задружен с поне един елемент от B и всеки елемент на B е задружен с поне един елемент от A. Да се докаже, че съществуват $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$ такива, че двойките (a_1, b_1) и (a_2, b_2) са задружни, но (a_1, b_2) и (a_2, b_1) не са.

Задача 7. Да се намерят всички функции $f : N \to N$, за които

$$f(f(n) + m) = n + f(m + 2014)$$

за всички естествени m, n.

Задача 8. Да се докаже, че ако a, b, c са страни на триъгълник, то е изпълнено неравенството:

$$3(a^3b + b^3c + c^3a) + 2(ab^3 + bc^3 + ca^3) \geq 5(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Четвърти кръг, 6 – 7 клас
5 Септември, 2014 г., Созопол4

Задача 1. Хари Потър има кутия с 2014 топки – червени, бели и зелени. Три от тях са вълшебни и постоянно си менят цвета (в един от изброените цветове). Веднъж Хари Потър погледнал в кутията и видял, че червените топки са повече от белите, а белите – повече от зелените. Като погледнал след една минута, видял, че вече зелените са повече от белите, а белите са повече от червените. Колко бели топки е имало в кутията, когато Хари Потър за първи път погледнал в нея?

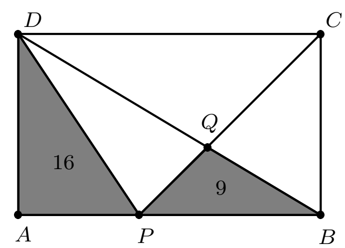
Задача 2. Едно 9-цифрено число се нарича *созополско*, ако:

1. Числото съдържа всяка от цифрите $1, 2, 3, \ldots, 9$.

2. За всяка цифра след втората е изпълнено следното свойство: произведението на тази цифра с 2 е не по-малко от сбора на предните две цифри.

Да се намери броят на всички *созополски* числа.

Задача 3. Даден е правоъгълник $ABCD$. На страната AB е избрана точка P, а пресечната точка на PC и BD е означена с Q. Ако лицето на $\triangle APD$ е 16, а лицето на $\triangle PBQ$ е 9, намерете лицето на дадения правоъгълник.



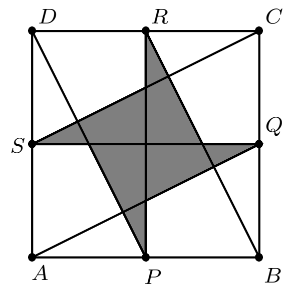
Задача 4. В квадратна мрежа е даден правоъгълник 20×21 с върхове във възлите на мрежата. Правоъгълникът е разрязан на квадрати, като се разрязва по линиите на мрежата. Най-малко колко от тези квадрати са с нечетна страна?

Задача 5. На дъска 10×20 няколко полета са оцветени в син цвят. Иво може да разреже дъската на правоъгълници така, че във всеки да има по 5 сини полета. Ани може да разреже същата дъска на правоъгълници така, че във всеки да има по 7 сини полета. Може ли дъската да се разреже на правоъгълници така, че във всеки да има по 6 сини полета?

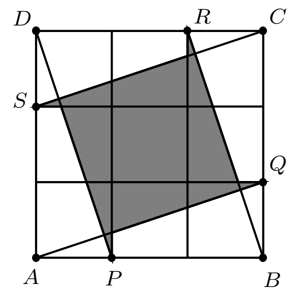
Задача 6. Иво и Емо имат общо 285 войници, като $\dfrac{1}{4}$ от войниците на Емо и $\dfrac{1}{5}$ от войниците на Иво са конници, $\dfrac{1}{6}$ от войниците на Емо и $\dfrac{1}{7}$ от войниците на Иво са стрелци, а останалите са пехотинци. Общо колко пехотинци имат Иво и Емо?

Задача 7. Даден е квадрат $ABCD$ със страна n, където n е естествено число. Върху страните AB, BC, CD и DA са избрани съответно точки P, Q, R и S, така че $AP = BQ = CR = DS = 1$. Намерете лицето на оцветената част при:

а) $n = 2$;



б) $n = 3$.



Задача 8. От точно 2014 еднакви кибритени клечки в равнината е построен правоъгълник, разделен на квадратчета със страна по една клечка. Определете размерите му.

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Четвърти кръг, 8 – 9 клас
5 Септември, 2013 г., Созопол

Задача 1. Нека m е естествено число, а p, q и r са прости числа, като $r \equiv 5 \pmod 8$. Да се намерят m и q, ако $2^m p^2 + 1 = q^r$.

Задача 2. Точките M и N лежат съответно на страните BC и CD на успоредника $ABCD$. Да се докаже, че медианите BB_1, CC_1 и DD_1 съответно в $\triangle ABM$, $\triangle CMN$ и $\triangle DAN$ се пресичат в една точка.

Задача 3. На дъската е записано числото 1. Ако на дъската присъства числото x, то е разрешено там да се напишат още числата $3x+2$, $5x-3$ и $x-7$. Колко са трицифрените естествени числа, които никога не могат да се появят на дъската?

Задача 4. Върху страната AB на равностранен триъгълник ABC е избрана точка M. Точка N е външна за $\triangle ABC$ и $\triangle AMN$ е равностранен. Правата AC пресича правата BN в точка D, а правата CM пресича правата AN в точка K. Да се намери $\sphericalangle ADK$.

Задача 5. Квадрат 31×31 е разбит на квадрати 3×3 и 5×5, както и на $n \geq 0$ квадрати с по-малък размер. Определете най-малката възможна стойност на n и видовете квадрати от по-малък размер при нея.

Задача 6. Всяка поредица от главни български букви ще наричаме дума. Ще казваме, че една дума е *кротка*, ако в нея не се среща РР (т.е. две съседни букви Р). Нека A е броят кротки думи с дължина 2014. Определете последната цифра на A.

Задача 7. Да се докаже, че за произволни различни реални числа x, y и z числата $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ и $(x-y)(y-z)(z-x)$ са или едновременно положителни или едновременно отрицателни.

Задача 8. Да се намерят всички реални числа x и y, за които едновременно са изпълнени равенствата $x^2 + x = y^3 - y$ и $y^2 + y = x^3 - x$.

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Четвърти кръг, 10 – 12 клас
5 Септември, 2014 г., Созопол

Задача 1. Да се намерят всички двойки естествени числа (m, n), за които $m|2^{\varphi(n)} + 1$ и $n|2^{\varphi(m)} + 1$.

Задача 2. Съществува ли естествено число n, за което $n.2^{2^{2014}} - 81 - n$ е точен квадрат?

Задача 3. Всяка поредица от главни български букви ще наричаме дума. Ще казваме, че една дума е *кротка*, ако в нея не се среща РР (т.е. две съседни букви Р). Запишете в явен вид функцията $f(n)$, чиято стойност е броят кротки думи с дължина n.

Задача 4. Даден е правоъгълен триъгълник ABC, ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$). Точките P и Q върху страната BC и точките R и S върху страната CA са такива, че $\sphericalangle BAP = \sphericalangle PAQ = \sphericalangle QAC$ и $\sphericalangle ABS = \sphericalangle SBR = \sphericalangle RBC$. Ака T е пресечната точка на AP и BS, да се докаже, че $120^\circ < \sphericalangle RTB < 150^\circ$.

Задача 5. Реалната функция f е дефинирана за всяко реално x и $f(0) = 0$. При това $f(9+x) = f(9-x)$ и $f(x-10) = f(-x-10)$ за всяко реално x. Колко най-малко нули може да има f в интервала $[0; 2014]$? Променя ли се отговорът на този въпрос, ако се постави изискване f да бъде непрекъсната?

Задача 6. Вярно ли е, че за всяко естествено число n съществува кръг, който съдържа точно n точки с целочислени координати?

Задача 7. На международна конференция има 4 официални езика. Всеки двама от участниците могат да говорят на един от тях. Докажете, че поне 60% от участниците говорят на един и същи език.

Задача 8. Дадена е реална константа $c > 1$. За редицата $a_1, a_2, \dots$ имаме: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{mn} = a_m a_n$ и $a_{m+n} \leq c(a_m + a_n)$. Да се докаже, че $a_n = n$.

Съюз на математиците в България

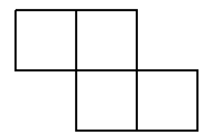
Пети български фестивал на младите математици

Финал, 6 – 7 клас
6 Септември, 2014 г., Созопол

Задача 1. Точката M е среда на страната AB на триъгълника ABC, а точката N е среда на CM. Продължението на AN пресича BC в точка P. Да се намери отношението $\dfrac{CP}{PB}$.

Задача 2. Произведението на три прости числа е n. След прибавяне на 1 към всяко от числата, произведението на трите получени числа става $n + 963$. Да се намери n.

Задача 3. Квадрат 5×5 е разделен на 25 единични квадратчета. Искаме да покрием всички 25 единични квадратчета с фигурки от дадения вид, като всяка фигурка може да се завърта, преобръща, да се припокрива с друга фигурка или да излиза извън квадрата 5×5 (при условие, че покритите единичини квадратчета са 1, 2 или 3). Колко най-малко фигурки са необходими за покриване на целия квадрат?



Задача 4. Иван разделил 756 ябълки по равно между себе си и приятелите си. Трима от неговите приятели не били много гладни и му върнали цяло число ябълки равни на точно по $\dfrac{1}{4}$ от техните ябълки. Иван изял неговите ябълки както и тези, които получил от тримата си приятели. Ако е известно, че Иван е изял поне 150 ябълки, колко точно ябълки е изял той?

Задача 5. В турнир по тенис участвали 78 човека, всеки двама на различна възраст. Общо били изиграни 310 мача, като всеки двама са изиграли не повече от един мач. Докажете, че могат да се намерят четири човека, сред които или най-възрастният, или най-младият е победил останалите трима.

Задача 6. Във всяка от клетките на квадрат 4×4 е записано по едно положително число. Произведението на числата във всеки ред, всеки стълб и в двата диагонала е едно и също число. Кое може да е числото в квадратчето, означено със $*$?

$\frac{1}{2}$	32		
	2	8	2
4	1		
		$\star$	16

Задача 7. По колко начина числото 10000 може да се представи като сбор на няколко (поне две) последователни числа?

Задача 8. Колко решения в цели числа има уравнението

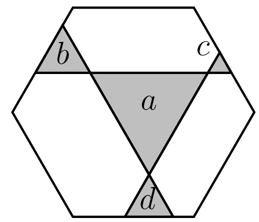
$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2014}?$$

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Финал, 8 – 9 клас
6 Септември, 2013 г., Созопол

Задача 1. Правилен шестоъгълник е разделен на седем части (три шестоъгълника и четири равнострани триъгълника) с прави, успоредни на страните му както е показано на чертежа. Страните на равностранните триъгълници са съответно a, b, c и d. Да се намери страната на шестоъгълника.



Задача 2. Страните BC и AD на четириъгълник $ABCD$ са успоредни, а диагоналите се пресичат в точка O. Ако $CD = AO$, $BC = OD$ и CA е ъглополовяща на ъгъл BCD. Да се намери ъгъл ABC.

Задача 3. На конференция присъстват $n > 3$ делегати, като поне двама от тях се познават. Известно е, че ако двама от тях имат равен брой познати, то те нямат общ познат. Да се докаже, че някой от делегатите има точно един познат.

Задача 4. Да се намери най-малкото естествено число n със следното свойство: Сборът от цифрите на n се дели на 101 и сборът от цифрите на $n + 1$ също се дели на 101.

Задача 5. За естественото число n с $F(n)$ означаваме произведението на всички положителни делители на n. (Например $F(42) = 1.2.3.6.7.14.21.42$.) Да се намери най-малкото естествено число k, за което съществува n, за което $F(n) = 2014n^k$.

Задача 6. Колко пъти се среща цифрата 5 в числото:

$$1 + 10 + 19 + 28 + 37 + \cdots + 10^{2014}?$$

Задача 7. Едно число n ще наричаме *квадратно*, ако съществуват цели числа $a < b < c$, за които $a^2 + b^2 - c^2 = n$. Да се намери броя на квадратните числа n, за които $1 \leq n \leq 2014$.

Задача 8. Редицата от цели числа $a_1, a_2, \ldots$ е зададена с условията

$$a_{n+3} = 5a_{n+2}^6 - 4a_{n+1}^3 + a_n^2, \forall n \geq 1,$$

$\{a_1, a_2, a_3\} = \{2013, 2014, 2015\}$. Възможно ли е някой от членовете на редицата да бъде точна шеста степен на цяло число?

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Финал, 10 – 12 клас
6 Септември, 2014 г., Созопол

Задача 1. Равнината е разделена на единични квадратчета, всяко от които е оцветено в черно или бяло. Известно е, че всеки правоъгълник 3×4 или 4×3 съдържа точно 8 бели квадратчета. По колко начина може да се направи това оцветяване?

Задача 2. Върху квадратен тричлен Поли може да извършва следните действия:

1. Смяна на местата на старшия и свободния коефициент;
2. Заместване на x с $x - m$, където m е произволно реално число.

Възможно ли е започвайки от $6x^2 + 2x + 1996$ тя да получи $25x^2 + 5x + 2014$ с краен брой прилагания на операции от горния вид?

Задача 3. Намерете най-малкото естествено число n, за което съществуват полиноми f_i, $i = 1, 2, \dots, n$ с рационални коефициенти такива, че $x^2 + 7 = \sum_{i=1}^{n} (f_i(x))^2$.

Задача 4. Нека A е множеството от пермутациите $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ на $M = \{1, 2, \dots, n\}$, със следното свойство: не съществува подмножество S на M такова, че $\alpha(S) = S$. За всяка такава пермутация α нека $d(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} (a_k - k)^2$. Да се намери най-малката стойност на $d(\alpha)$.

Задача 5. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ $(a > b)$. Точка D лежи на височината през C и на ъглополовящата през A. O е център на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. M е средата на AC. Нека K е симетричната на O относно точка M. Нека $E \in BC$ и $EO \perp AB$. $F \in MK$ е такава, че $FK = OE$ и K лежи между F и M. Нека BD пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност за втори път в P. Да се докаже, че $AP \perp CF$.

Задача 6. Разполагаме с 19 ъгълчета (квадрат 2×2 без едно единично квадратче) и неограничен брой квадрати 2×2. Да се намери най-голямото нечетно число n за което квадрат $n \times n$ може да бъде покрит с дадените фигури.

Задача 7. Известно е, че всеки двама от 12-те състезатели, участващи на финала на математическите боеве, имат общ приятел измежду останалите 11 състезатели. Да се докаже, че има състезател, който има поне 5 приятели.

Задача 8. Няколко монети са разделени първо в 200 групи, а след това в 300 групи. Една монета е *специална*, ако при второто разделяне е била в група с по-малко монети отколкото при първото разделяне. Да се намери минималния брой специални монети.

Пети български фестивал на младите математици

Първи кръг, Решения на задачите за 6 – 7 клас

Задача 1. Възрастта на Динко е двуцифрено число n.

Красимира казала: „n е кратно на 3 и n е четно.“

Невена казала: „n е кратно на 3 и последната цифра на n е 5.“

Йовка казала: „n е кратно на 5 и сборът от цифрите на n е 12.“

Всяка от трите казала едно вярно и едно грешно твърдение. На колко години може да е Динко? (Намерете всички възможности.)

Решение. Отговор: 39,57,93. Ако числото не е кратно на 3, то n е четно и завършва на 5, противоречие. Следователно n е кратно на 3, не е четно и не завършва на 5, т.е. не е кратно на 5. Значи сборът от цифрите му е 12. Възможните числа са $93, 57$ и 39.

Задача 2. Намерете всички цифри a, за които числата

$$\overline{100a}, \overline{1001a}, \overline{10011a}, \overline{100111a}, \dots, \overline{100\underbrace{11\dots1}_{n}a}, \dots$$

имат общ делител, различен от 1.

Решение. Отговор: $a = 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$**.** Разликата на две последователни числа в горната редица е

$$\overline{100\underbrace{11\dots1}_{n}a} - \overline{100\underbrace{11\dots1}_{n-1}a} = 901\underbrace{0\dots0}_{n} = 2^n.5^n.17.53.$$

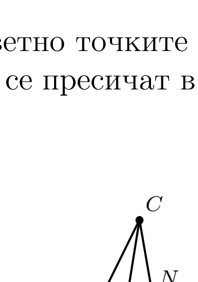
Това означава, че ако числата имат общ делител, по-голям от 1, те ще имат общ делител 2, 5, 17 или 53. Освен това, ако $\overline{100a}$ се дели на някое от числата 2, 5, 17 или 53, то и всички следващи числа се делят на същото число. Остава да проверим за кои цифри a числото $\overline{100a}$ се дели на някое от числата 2, 5, 17 или 53.

При $a = 0, 2, 4, 6, 8$ числото $\overline{100a}$ се дели на 2, при $a = 5$ числото 1005 се дели на 5, при $a = 3$ числото $1003 = 17.59$ се дели на 17, при $a = 7$ числото $1007 = 19.53$ се дели на 53. При $a = 1$ или $a = 9$ съответните числа не се делят на 2, 5, 17 или 53.

Забележка. Стандартното решение предполага отделно разглеждане на всички стойности за цифрата a.

Задача 3. а) Диагоналите на четириъгълника $ABCD$ се пресичат в точката O. Докажете, че $\dfrac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \dfrac{BO}{DO}$.

б) На страните AB и BC на триъгълника ABC са избрани съответно точките M и N така, че $AB = 2.AM$ и $BC = 3.CN$. Отсечките CM и AN са равни и се пресичат в токата O. Ако $AO = 6$ cm, намерете CO.



Решение. а) Ако h и t са разстоянията до BD съответно от точките A и C, то $S_{ABC} = S_{ABO} + S_{BCO} = \frac{1}{2}BO(h+t)$, $S_{ADC} = S_{ADO} + S_{DCO} = \frac{1}{2}DO(h+t)$, откъдето следва даденото равенство.

б) Тъй като $S_{AMC} = \frac{1}{2}S_{ABC}$ и $S_{CMN} = \frac{1}{3}S_{BMC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{6}S_{ABC}$, то $S_{AMC} = 3S_{CMN}$ и от а) следва, че $AO = 3ON$. Оттук $AN = 8$.

От друга страна $S_{ANC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$ и $S_{AMN} = \frac{1}{2}S_{ABN} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}S_{ABC} = \frac{1}{3}S_{ABC}$, следователно $S_{AMN} = S_{ANC}$ и от а) следва, че $CO = OM$, т.е. $CO = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{2}AN = 4$.

Задача 4. Ина опекла дребни сладки и ги оставила да изстинат на масата в кухнята. През нощта Дора влязла в кухнята, изяла една сладка и след това една четвърт от останалите. По-късно Мила слязла в кухнята и изяла една сладка и след това една четвърт от останалите. На сутринта Ина намерила в кухнята само 60 сладки. Колко сладки опекла Ина?

Решение. Отговор: 109. Мила изяла $60 : 3 + 1 = 21$ сладки. Дора изяла $(60 + 21) : 3 + 1 = 28$ сладки. Ина опекла $81 + 28 = 109$ сладки.

Задача 5. Стените на дървен куб със страна $n \geq 3$, където n е естествено число, са боядисани в червено. След това кубът е нарязан на n^3 кубчета със страна 1. От получените кубчета A имат по три червени стени, B имат по две червени стени, C имат по една червена стена и D нямат нито една червена стена.

Определете кои от равенствата $A = B$, $A = C$, $A = D$, $B = C$, $B = D$ и $C = D$ са възможни и колко е n, когато съответното равенство е изпълнено.

Решение. Отговор: $A = D$ **и** $B = C$ **при** $n = 4$ **или** $C = D$ **при** $n = 8$**.** Имаме $A = 8$ (това са 8-те кубчета във върховете), $B = 12(n - 2)$ (това са кубчетата по 12-те ръба на куба, които не са във върховете), $C = 6(n - 2)^2$ (това са кубчетата по 6-те стени, които не са по ръбовете) и $D = (n - 2)^3$ (това са всички вътрешни кубчета).

Равенствата $A = B$ и $A = C$ са невъзможни, защото $8 \neq 12(n - 2)$ и $8 \neq 6(n - 2)^2$. При $A = D$ имаме $8 = (n - 2)^3$, откъдето $n = 4$.

Равенството $B = C$ дава $12(n - 2) = 6(n - 2)^2$, откъдето $n = 4$.

Равенството $B = D$ дава $12(n-2) = (n-2)^3$, откъдето $12 = (n-2)^2$, което е невъзможно.

Равенството $C = D$ дава $6(n - 2)^2 = (n - 2)^3$, откъдето $n - 2 = 6$, т.е. $n = 8$.

Задача 6. Числото 3720147410273 е 13 цифрено и има следните свойства:

1. Има четири последователни цифри, които образуват числото 2014.
2. Ако запишем цифрите му в обратен ред, ще получим същото число.

Намерете броя на всички такива 13 цифрени числа. (Първата цифра на всяко число е различна от 0.)

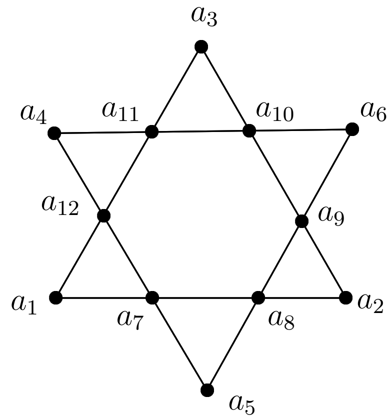
Решение. Отговор: 7398. От 2. следва, че всяко от търсените числа се определя от първите си (от ляво на дясно) 7 цифри. Понеже 6-та и 8-та цифри са равни, за да е изпълнено свойство 1., първите 7 цифри трябва да съдържат 2014 или 4102. Ако фиксираме мястото на 2014 (съответно 4102) остава да бъдат избрани още три цифри, като ако 2014 (съответно 4102) не започва от първа позиция една от тези цифри не може да бъде 0. Следователно имаме

$$2(10^3 + 9.10^2 + 9.10^2 + 9.10^2) = 7400$$

числа, които съдържат 2014 или 4102 измежду първите 7 цифри. От тези 7400 числа има две 2014102014102 и 4102014102014, които съдържат и двете последователности. Търсеният брой е $7400 - 2 = 7398$.

Задача 7. На чертежа с $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_{12}$ са означени естествените числа от 1 до 12, подредени в някакъв ред. Ако сборът на четирите числа върху всяка отсечка е един и същ, намерете най-малката възможна стойност на сбора

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6.$$



Решение. Отговор: 24. Нека сборът на всеки 4 числа върху една отсечка е S. Като съберем числата върху всички 6 отсечки ще получим

$$6S = 2(1 + 2 + \cdots + 12) = 132,$$

откъдето $S = 26$. Нека $U = a_1 + a_2 + \cdots + a_6$ и $V = a_7 + a_8 + \cdots + a_{12}$. Търсим най-малката стойност на U. Ако съберем числата по трите отсечки на триъгълника $a_1a_2a_3$ (съответно $a_4a_5a_6$), ще получим съответно $3S = 2(a_1+a_2+a_3)+V$ (съответно $3S = 2(a_4+a_5+a_6)+V$). От тези две равенства следва, че $a_1+a_2+a_3 = a_4+a_5+a_6$ и следователно $U = 2(a_1+a_2+a_3)$ е четно число. Най-малкият възможен сбор на $a_1+a_2+\cdots+a_6$ е $1+2+\cdots+6 = 21$ и понеже U е четно, то $U \geq 22$. Ако $U = 22$, то $a_1, a_2, \ldots, a_6$ са числата $1, 2, 3, 4, 5, 7$ в някакъв ред, като $a_1+a_2+a_3 = a_4+a_5+a_6 = 11$. Поради симетрията можем да считаме, че единствената възможност е $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 7$ и a_4, a_5, a_6 да са $2, 4, 5$ в някакъв ред. Лесно се вижда с изчерпване на възможностите, че такова разположение на числата не съществува.

Следователно $U \geq 24$ и разположение с $U = 24$ се задава с:

$$a_1 = 7, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 5, a_5 = 1, a_6 = 6, a_7 = 8, a_8 = 9, a_9 = 10, a_{10} = 11, a_{11} = 4, a_{12} = 12.$$

Задача 8. Намерете обема на правоъгълен паралелепипед с пълна повърхнина 2014 и целочислени ръбове, най-малкият от които е кратен на 5.

Решение. Отговор: 2835, 3610, 5270. Нека ръбовете са a, b, c. Имаме $ab+bc+ca = 1007$. Можем да считаме, че $a \geq b \geq c$, така че c е кратно на 5. Понеже $2014 \geq 6c^2$, имаме $c < 19$.

Случай А. Ако $c = 5$, получаваме $ab + 5b + 5a = 1007$ и след добавяне на 25 имаме $(a + 5)(b + 5) = 1032 = 2^3.3.43$. Понеже $a + 5 \geq b + 5 \geq 10$, възможни са само вариантите:
$a + 5 = 2.43$, $b + 5 = 4.3$, $a = 81$, $b = 7$, $abc = 2835$;
$a + 5 = 43$, $b + 5 = 8.3$, $a = 38$, $b = 19$, $abc = 3610$.

Случай Б. Ако $c = 10$, получаваме $ab + 10b + 10a = 1007$ и след добавяне на 100 имаме $(a + 10)(b + 10) = 1107 = 3^3.41$. Оттук $a + 10 = 41$, $b + 10 = 27$, $a = 31$, $b = 17$, $abc = 5270$.

Случай В. Ако $c = 15$, получаваме $ab + 15b + 15a = 1007$ и след добавяне на 225 имаме $(a + 15)(b + 15) = 1232 = 2^4.7.11$. Нито един от вариантите не изпълнява изискването $a + 15 \geq b + 15 \geq 30$, така че оттук не получаваме нови решения.

Пети български фестивал на младите математици

Първи кръг, Решения на задачите за 8 – 9 клас

Задача 1. Всяко от четирите числа a, $a+1$, $a+2$ и $a+3$ има точно 6 положителни делители. Съществуват точно 20 различни естествени числа, всяко от които е делител на поне едно от тези числа, като едно от тези 20 числа е 27. Намерете всички възможни стойности на a. (Числата 1 и n са делители на естественото число n.)

Решение. Отговор: 242. Числото 1 е общ делител и на четирите числа. Числото 2 е също общ делител на a и $a+2$ или на $a+1$ и $a+3$. Това означава, че измежду всички $4.6 = 24$ делители на a, $a+1$, $a+2$ и $a+3$ числото 1 броено 4 пъти, а числото 2 е броено 2 пъти. Тогава различните делители на a, $a+1$, $a+2$ и $a+3$ са най-много $4.6-3-1=20$. Понеже по условие те са точно 20, то няма друг делител, който да се среща повече от един път. Следователно има само едно число, което се дели на 3 и това може да е $a+1$ или $a+2$. От условието следва, че това число се дели на 27 и има шест различни делители. Ако това число има прост делител, различен от 3, то броят на делителите му е поне 8. Следователно това число е $3^5 = 243$, откъдето намираме $a+1 = 243$ или $a+2 = 243$. Понеже 241 е просто число (и има само два делителя), вторият случай не води до решение. Остава $a = 242$ и директно се проверява, че числата 242, 243, 244 и 245 изпълняват условието на задачата.

Задача 2. Дадени са 26 тежести с тегла съответно $1, 2, 3, \ldots, 26$ грама и везна. Казваме, че няколко от тежестите образуват *добро* множество, ако както и да поставим част от тях (или всичките) на везната, тя не се уравновесява. (Например, тежестите $1, 2, 4, 8, 16$ образуват добро множество, докато множеството от тежестите $2, 7, 8, 15, 25$ не е добро, защото $7+8=15$.)

Намерете добро множество с 6 тежести и докажете, че не съществува добро множество със 7 тежести.

Решение. Директно се проверява, че тежестите $1, 5, 10, 23, 25, 26$ образуват добро множество. Да допуснем, че има добро множество със 7 тежести. Сборът на четирите най-големи числа е $23+24+25+26=98$, като поради $23+26=24+25$ тези четири числа не могат да участват в добро множество. Следователно, ако съществува добро множество със 7 елемента, то сборът на числата в подмножествата му с 1, 2, 3 или 4 елемента ще бъде число от 1 до 97. Имаме 7 единични подмножества, 21 подмножества с 2 елемента, 35 подмножества с 3 елемента и 35 подмножества с 4 елемента т.е. общо $7+21+35+35=98>97$ различни суми, противоречие.

Задача 3. Във всяка от клетките на дъска 2014×1 е поставен по един пул. Всеки пул е черен от едната страна и бял от другата. Имаме право да изберем пул, обърнат с черната страна нагоре, да го отстраним от дъската и да обърнем двата пула, които се намират в съседните му по страна квадратчета (ако в съседните квадратчета няма пулове, не обръщаме нито един пул, а ако има само един пул, го обръщаме). Определете всички начални разположения на пуловете, при които можем да вземем всички пулове от дъската.

Решение. Отговор: Всички разположения с нечетен брой пулове с черната страна нагоре. Нека на дъската има n пула. Ще докажем с индукция по $n \geq 1$, че можем да вземем всички пулове тогава и само тогава, когато върху дъската има нечетен брой черни пулове. При $n=1$ твърдението е очевидно. Нека твърдението е вярно при всяко $n \leq k$ и да разгледаме таблица с $n = k+1$ пула. Нека върху дъската има t черни пула.

Ако t е нечетно число, да изберем най-левия черен пул, да го отстраним от дъската и да обърнем двата му съседни (ако той е в първото квадратче на дъската, обръщаме само един съседен пул). Дъската се разделя на две части с дължини $\leq k$ (ако отстранения черен пул е бил в първото квадратче, първата част може и да не съдържа пулове). Ако в лявата част има пулове, то там има само един черен пул, т.е. нечетен брой черни пулове и следователно можем да вземем всички пулове. В дясната част има или $t-2$ (ако съседния на махнатия пул е бил черен) или t (ако съседния на махнатия пул е бил бял) и според индукционното допускане можем да премахнем всички пулове.

Ако t е четно число, да разгледаме клетката с черен пул, където ще направим първия си ход. Тази клетка разделя дъската на две части, в едната от които има нечетен брой черни пулове, а в другата има четен брой черни пулове. Като обърнем двата съседни пула, в частта с нечетен брой пулове единия пул ще промени цвета си и следователно там ще има четен брой черни пулове. Според индукционното допускане не можем да премахнем всички пулове от тази част на дъската.

Задача 4. Определете най-малката възможна стойност на $a+b+c+d$, ако a, b, c, d са естествени числа, за които $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=\dfrac{9}{14}$.

Решение. Отговор: 25. От условието и от неравенството между средното аритметично и средното хармонично

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \frac{4}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$$

получаваме $a+b+c+d \geq \dfrac{4^2.14}{9} = 24\dfrac{8}{9}$. Следователно $a+b+c+d \geq 25$, като при $(a;b;c;d)=(6;6;6;7)$ равенството от условието е изпълнено и $a+b+c+d=25$.

Задача 5. Дадени са прости числа p, q и r, за които $p+q<111$ и

$$\frac{p+q}{r} = p-q+r.$$

Да се намери най-голямата стойност на произведението pqr.

Решение. Отговор: 2014. Понеже $p+q$ и $p-q$ имат еднаква четност, то ако r е нечетно число, то $\frac{p+q}{r}$ ще има четността на $p+q$, а $p-q+r$ ще има четността на $p+q+1$, противоречие. Следователно $r=2$ и получаваме $p=3q-4$. Сега от $p+q<111$ намираме $4q-4<111$ или $q<29$ и значи $q=2,3,5,7,11,13,17,19$ или 23. При $q=23$ получаваме $p=65$, което не е просто число, а при $q=19$ намираме $p=53$ - просто число. Търсеният максимум е $2.19.53=2014$.

Задача 6. Някои от върховете на правилен 2014-ъгълник A са свързани с отсечки така, че прекараните отсечки не се пресичат във вътрешни точки. Да се докаже, че могат да се изберат поне 672 от върховете на A, всеки два от които не са свързани с отсечка.

Решение. Ще докажем, че върховете на A могат да се оцветят в три цвята така, че крайщата на всяка отсечка да са разноцветни точки. Ако прекараните отсечки не образуват триангулация, можем да прекараме допълнителни отсечки до получаване на триангулация. Във всяка триангулация съществува триъгълник от три последователни върха. Ако премахнем средния връх по индукция останалите върхове могат да се оцветят по искания начин. Тогава премахнатият връх може да се оцвети в един от трите цвята (понеже има само два съседни). От принципа на Дирихле следва, че от 2014 върха поне $\lceil\frac{2014}{3}\rceil = 672$ са оцветени в един цвят.

Задача 7. Точка M е среда на страната AB на триъгълник ABC. Правата CM пресича описаната окръжност около $\triangle ABC$ в точка P, а точката Q е симетрична на P спрямо M. Правата BQ пресича страната AC в точка R. Ако $CRMB$ е вписан четириъгълник, да се намери $\sphericalangle BRC$.

Решение. Отговор: $90°$**.** Понеже M е среда на AB и PQ, то $APBQ$ е успоредник. Тогава $\sphericalangle PBM = \sphericalangle QAB$. Тъй като $\sphericalangle RCM = \sphericalangle RBM$ и $\sphericalangle ACP = \sphericalangle ABP$, то $\sphericalangle QBA = \sphericalangle PBM = \sphericalangle QAB$. В $\triangle ABQ$ имаме, че $QB = QA$ и M е среда на AB, откъдето $RM \perp AB$. Следователно $\sphericalangle BRC = \sphericalangle BMC = 90°$.

Задача 8. В $\triangle ABC$ е построена ъглополовящата AP, ($P \in BC$). Точката M лежи на отсечката AP, а точката N е симетрична на M спрямо средата на BC. Правата CN пресича правата AB в точка E (B е между A и E), а правата BN пресича правата AC в точка D (C е между A и D). Да се докаже, че $CD = BE$.

Решение. Понеже $MBNC$ е успоредник, то $MB \parallel NE$, откъдето $S_{MBE} = S_{MBN} = \frac{1}{2}S_{MBNC}$. Аналогично, от $MC \parallel BD$ имаме $S_{MCD} = S_{MBC} = \frac{1}{2}S_{MBNC}$. Следователно $S_{MBE} = S_{MCD}$ и понеже M е точка от ъглополовящата, получаваме $BE = CD$.

Пети български фестивал на младите математици

Първи кръг, Решения на задачите за 10 – 12 клас

Задача 1. Да се докаже, че за всеки три числа $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ е изпълнено неравенството:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geq \frac{7}{5}.$$

Решение. Без ограничение $c = \max\{a, b, c\}$, като от $a, b, c \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$ следва $\frac{c}{9} \leq a \leq c$. При $s = \frac{b}{b+c} - \frac{7}{5}$ неравенството е еквивалентно на

$$(s+1)a^2 + (sb + sc + 2c)a + (s+1)bc \geq 0. \tag{1}$$

При $s + 1 \leq 0$ е достатъчно да проверим верността на (1) при $a = \frac{c}{9}$ и $a = c$. При $a = \frac{c}{9}$ имаме:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{c}{9b+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{7}{5} + \frac{(3b-c)^2}{2(9b+c)(b+c)},$$

а при $a = c$ имаме

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{3}{2}.$$

При $s + 1 > 0$ лесно се вижда, че $sb + sc + 2c \geq 0$ и отново е достатъчно да проверим верността на неравенството за $a = \frac{c}{9}$.

Задача 2. Да се намери най-малкото естествено число n, което има поне 6 различни делители $1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < d_5 < d_6 < \cdots$, за които $d_3 + d_4 = d_5 + 6$ и $d_4 + d_5 = d_6 + 7$.

Решение. Отговор: 494. От $d_3 + d_4 = d_5 + 6$ следва, че измежду числата d_3 , d_4 и d_5 има поне едно четно. Това означава, че $d_2 = 2$. Ако 4 дели n, то $d_3 = 3$ или 4 и тогава $d_4 = d_5 + (6 - d_3) > d_5$, противоречие. Следователно d_3 е нечетно число и вторият по големина четен делител на n е $2d_3$. Понеже измежду числата d_3, d_4 и d_5 има поне едно четно, то $d_4 = 2d_3$ или $d_5 = 2d_3$. Ако $d_4 = 2d_3$, то $d_5 = 3d_3 - 6$, което означава, че 3 е делител на n, противоречие с $d_3 \neq 3$.

Остава $d_5 = 2d_3$, откъдето $d_4 = d_3 + 6$. От второто равенство намираме $d_6 = 3d_3 - 1$, т.е. d_6 е четно число. Тъй като $d_4 = d_3 + 6$ е нечетно число, то третия по големина четен делител на n е $2d_4$, откъдето $2d_4 = d_6$, т.е.

$$2(d_3 + 6) = 2d_4 = d_6 = 3d_3 - 1.$$

От горното равенство намираме $d_3 = 13$ и тогава $d_4 = 19$, $d_5 = 26$ и $d_6 = 38$. Търсеното число е $2.13.19 = 494$.

Задача 3. В остроъгълен $\triangle ABC$ са построени височините AH_a и BH_b и точка M е средата на страната AB. Около $\triangle AMH_a$ и $\triangle BMH_b$ са описани окръжности, които се пресичат повторно в точка P. Да се докаже, че точката P лежи на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Решение. Нека X е пресечната точка на k_{AMH_a} и k_{ABC}. Тогава $\sphericalangle AXH_a = \sphericalangle BMH_a = 180^\circ - 2\beta$ и $\sphericalangle AXC = 180^\circ - \beta$, откъдето $H_aXC = (180^\circ - \beta) - (180^\circ - 2\beta) = \beta$. Тъй като $\sphericalangle H_aH_bC = \beta$, то X е пресечна точка на k_{ABC} и $k_{H_aH_bC}$.

Нека Y е пресечната точка на k_{BMH_b} и k_{ABC}. Тогава $\sphericalangle AYB = \gamma$ И $\sphericalangle H_bYB = \sphericalangle AMH_b = 180^\circ - 2\alpha$, откъдето $\sphericalangle AYH_b = \sphericalangle AYB - \sphericalangle H_bYB = \gamma - (180^\circ - 2\alpha) = \alpha - \beta$. От $\sphericalangle AYC = 180^\circ - \beta$ сега намираме $\sphericalangle H_bYC = 180^\circ - \beta - (\alpha - \beta) = 180^\circ - \alpha$. Тъй като $\sphericalangle H_bH_aC = \alpha$, то H_bH_aCY е вписан в окръжност и Y е пресечната точка на k_{ABC} и $k_{H_aH_bC}$.

Следователно $X \equiv Y \equiv P$ и P лежи на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 4. Един квадрат със страна 1 е оцветен в три цвята. Кое е най-голямото реално число α, такова, че в квадрата винаги могат да бъдат намерени две едноцветни точки на разстояние поне α?

Решение. Отговор: $\sqrt{\frac{65}{64}}$**.**

Разгледайте следните случаи:

(1) два противоположни върха на квадрата са оцветени в един и същи цвят;

(2) всеки два противоположни върха на квадрата са оцветени в различни цветове;

(2.1) за цвета c няма връх, оцветен в този цвят. Без загуба на общност, нека върховете A и B са бели, а C и D – червени. Разгледайте точките M, $M \in AD$, $AM : MD = 1 : 3$; и N, $N \in BC$, $BN : NC = 1 : 1$.

(2.2) за всеки цвят има връх, оцветен в този цвят. Без загуба на общност, нека върховете A и B са бели, C е зелен и D е червен. Разгледайте точките M, $M \in AD$, $AM : MD = 1 : 7$; N, $N \in BC$, $BN : NC = 1 : 7$; и P, $P \in CD$, $CP : PD = 1 : 1$.

Задача 5. Нека $f(x)$ е полином с цели коефициенти, за който съществуват различни цели числа a и b такива, че $f(a)$ и $f(b)$ са взаимнопрости. Да се докаже, че съществуват безбройно много стойности на x, в които стойностите на $f(x)$ са две по две взаимнопрости.

Решение. Нека a и b са такива,че $(f(a), f(b)) = 1$. Съгласно китайската теорема за остатъците съществува $c \in Z$, за което $c \equiv a \pmod{f(b)}$, $c \equiv b \pmod{(a)}$. Оттук $f(c) \equiv f(a) \pmod{f(b)}$ и $f(c) \equiv f(b) \pmod{f(a)}$. Оттук следва, че $(f(a), f(c)) = 1$ и $(f(c), f(b)) = 1$. Аналогично, съществува $d \in Z$, за което $d \equiv a \pmod{f(c)}$, $d \equiv b \pmod{f(a)}$, $d \equiv c \pmod{f(b)}$. Така намерените числа изпълняват условието и т.н.

Задача 6. Дадени са числата $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 3$. Да се докаже, че е в сила поне едно от неравенствата:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq \frac{n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1} + x_{i-2}} \geq \frac{n}{2}.$$

Индексите, различни от $1, 2, \ldots, n$ се разглеждат по модул n, т.е. $x_0 = x_n$, $x_{-1} = x_{n-1}$, $x_{n+1} = x_1$ и $x_{n+2} = x_2$.

Решение. Първо ще покажем, че $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i+3}}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geq n$. Имаме

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i+3}}{x_{i+1} + x_{i+2}} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i + x_{i+3} + x_{i+1} + x_{i+2}}{x_{i+1} + x_{i+2}} - 1 \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i+1}}{x_{i+1} + x_{i+2}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+2} + x_{i+3}}{x_{i+1} + x_{i+2}} - n = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i+1}}{x_{i+1} + x_{i+2}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+2} + x_{i+1}}{x_{i+1} + x_i} - n \geq n.
\end{aligned}$$

От тук твърдението следва елементарно.

Задача 7. За $\triangle ABC$ симетричната права CG_c, ($G_c \in AB$) на медианата CM_c спрямо ъглополовящата CL_c се нарича симедиана на триъгълника през върха C. За всеки триъгълник има три симедиани AG_a, BG_b и CG_c, които определят симедианния $\triangle G_aG_bG_c$. Може ли за някакъв $\triangle ABC$ симедианният $\triangle G_aG_bG_c$ да е равностранен, а $\triangle ABC$ да не е равностранен?

Решение. Симедианният триъгълник на равнобедрения $\triangle ABC$ със страни $CA = CB = 1$ и $= \sqrt{3}$, т.е. $\sphericalangle C = 120^\circ$ е равностранен.

Задача 8. В клас с n ученика в продължение на k дни всеки ден се избират трима за изпитване. Всеки двама могат да бъдат избрани в една тройка най-много един път. Да се докаже, че за най-голямото такова k са изпълнени равенствата:

$$\frac{n(n-3)}{6} \leq k \leq \frac{n(n-1)}{6}.$$

Решение. Да номерираме учениците с числата от 1 до n. Тъй като във всяка тройка $\{a, b, c\}$ се съдържат три двойки $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ и $\{b, c\}$, то $3k \leq \binom{n}{2}$, откъдето $k \leq \frac{n(n-1)}{6}$.

От друга страна тройките $\{a, b, c\}$, за които $a + b + c$ се дели на n удовлетворяват условието всеки двама да са в тройка най-много един път. Да разгледаме тройка $\{x, y, z\}$, за която $x + y + z$ се дели на n. За избор на x имаме n възможности, а за избор на y поне $n - 3$ възможности (y трябва да е различен от x и $z = n - x - y$ или $z = 2n - x - y$ също трябва да е различен от x и y). Това означава, че броят на различните тройки $\{a, b, c\}$, за които $a + b + c$ се дели на n е поне $\dfrac{n(n-3)}{6}$, т.е. $k \geq \dfrac{n(n-3)}{6}$.

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Втори кръг, 6 – 7 клас
2 Септември, 2014 г., Созопол

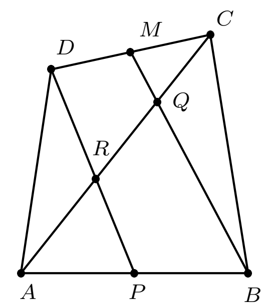
Задача 1. Карлсон получил плик с шоколадови бонбони и плик с малинови бонбони. Той изял $\frac{3}{4}$ от шоколадовите бонбони и $\frac{2}{3}$ от малиновите бонбони. След кратка почивка Карлсон изял $\frac{2}{3}$ от останалите шоколадови бонбони и $\frac{3}{4}$ от останалите малинови бонбони. След това Карсон забелязал, че са останали общо 10 бонбона. Общо колко бонбона е получил Карлсон?

Решение. Отговор: 120. Останали са $1-\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}.\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{12}$ от шоколадовите и $1-\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}.\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{12}$ от малиновите бонбони, т.е. $\frac{1}{12}$ от всички бонбони. Карлсон е получил 120 бонбона.

Задача 2. Намерете най-голямото естествено число n, за което съществуват различни естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ със следното свойство: сборът на всеки три числа от дадените е просто число.

Решение. Отговор: 4. Да допуснем, че $n \geq 5$. От принципа на Дирихле следва, че от всеки 5 естествени числа или има три, които дават един и същи остатък при деление на 3, или има три, които дават различни остатъци при деление на 3. Тогава съществуват три числа, чийто сбор се дели на 3 и е по-голям от 3, т.е. не е просто число. Пример за четири числа с исканото свойство е: 1, 3, 7, 9.

Задача 3. Даден е четириъгълникът $ABCD$. Точките P и M са средите съответно на страните AB и CD. Диагоналът AC пресича DP в точката R и BM в точката Q. Ако $\frac{MQ}{BQ}=\frac{3}{8}$, намерете $\frac{DR}{RP}$.



Решение. Отговор: 1,5. Да означим $S_{DMA}=S_{MCA}=a$ и $S_{APC}=S_{BPC}=b$. В четириъгълника $ABCM$ имаме $\frac{MQ}{BQ}=\frac{3}{8}$, следователно $\frac{S_{ACM}}{S_{ABC}}=\frac{3}{8}$, т.е. $\frac{a}{2b}=\frac{3}{8}$. Оттук $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$.

В четириъгълника $APCD$ имаме $\frac{DR}{RP}=\frac{S_{ACD}}{S_{APC}}=\frac{2a}{b}=\frac{3}{2}$.

Задача 4. По колко начина можем да подредим 4 момчета и 8 момичета едно зад друго, така че всяко момче да е между две момичета?

Решение. Колоната започва и завършва с момиче. Момичетата могат да се разположат по 8! начина. Нека момчетата са А, Б, В, Г. За всяко момиче, без последното, да запишем буквата на момчето точно зад него, а ако такова няма, да запишем буквата Х. Така разположението е кодирано с пермутация на думата АБВГХХХ. Броят на тези кодове е $7!:3! = 840$. Отговор: $8!.840 = 33868800$.

Задача 5. На кораб с три палуби пътуват повече от 600, но по-малко от 650 пътници. Когато всички пътници излезли на палубите, се оказало, че броят на пътниците на първата палуба с 20 повече от 20% от броя на пътниците на втората, а на третата палуба има с 25% повече пътници, отколкото на първата. Колко са пътниците на кораба?

Решение. Отговор: 625. Нека броят на пътниците на втора палуба е $20x$; тогава на първата са $4x + 20$, а на третата са $1,25(4x + 20) = 5x + 25$. Общо са $29x + 45$ пътници. Тъй като $600 < 29x + 45 < 650$, намираме, че естественото число x е 20. Оттук пътниците са 625.

Задача 6. Намерете всички естествени числа, чиито квадрат е шестцифрено число от вида $\overline{AB73AB}$.

Решение. Отговор: $2.2.3.73 = 876$**.** Тъй като $\overline{AB73AB} = \overline{AB}.10001 + 73.100$ и $10001 = 73.137$, то 73 дели точния квадрат $\overline{AB73AB}$, следователно 73^2 също дели. Това означава, че 73 дели $\overline{AB}.137+100 = \overline{AB}.146+73-\overline{AB}.9+27$, т.е. 73 дели $\overline{AB}.9-27 = 9(\overline{AB}-3)$. Оттук намираме, че $\overline{AB} = 76$. Получаваме $767376 = 73^2.(2.76+1-9) = 73^2.144 = (73.12)^2 = 876^2$.

Задача 7. По колко начина можем да подредим числата $1, 2, \dots, 10$ в редица $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ така, че нито едно от числата a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, $\dots$, $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ да не се дели на 3?

Решение. Отговор: $4!.3!.7.8.9$**.** Числата 1, 4, 7 и 10 дават остатък 1 при деление на 3; числата 2, 5 и 8 дават остатък 2 при деление на 3 и числата 3, 6 и 9 се делят на 3. Понеже 3, 6 и 9 не променят остатъка на всеки сбор при деление на 3, то първо ще подредим числата, които не се делят на 3. Ако първото число дава остатък 2, то следващото трябва да дава остатък 2, след което остатъците се редуват 1,2,1,2, и т.н. Тогава числата, които дават остатък 2 ще са повече от тези, които дават остатък 1, противоречие. Следователно редицата е 1,1,2,1,2,1,2. Тъй като четирите единици в тази редица съответстват на числата 1, 4, 7 и 10, трите двойки на числата 2, 5 и 8, то такива редици са $4!.3!$. Остава да поставим числата, които се делят на 3, като за числото 3 има 7 места, за числото 6 след това има 8 места и накрая за числото 9 има 9 места. Следователно търсеният брой е $4!.3!.7.8.9$.

Задача 8. В редица са наредени 2014 естествени числа. Ана и Вера, редувайки се (първа е Ана втора е Вера) вземат по едно число от края на редицата, или най-лявото или най-дясното. Може ли Ана да играе така, че сборът от нейните числа да е не по-малък от сборът на числата на Вера?

Решение. Отговор: Може. Да оцветим числата последователно в бяло и черно, като първото число е бяло, а последното число е черно. Ана може да си осигури да вземе или всички бели числа (като при всеки ход взима единственото бяло число, което е на единия край на редицата) или всички черни числа. По този начин тя може да вземе всички бели числа (ако сборът на белите числа е по-голям от сбора на черните) или съответно всички черни числа. Ако двата сбора са равни тя си осигурява равен сбор с числата на Вера.

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Втори кръг, 8 – 9 клас
2 Септември, 2013 г., Созопол

Задача 1. Дадени са безбройно много естествени числа $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$, като за всяко $n \geq 1$ е изпълнено неравенството $a_{n+1} \leq a_1 + \cdots + a_n$. Да се докаже, че всяко естествено число може да се представи като сбор на няколко (възможно едно) от дадените числа.

Решение. Ще докажем по индукция следното твърдение: Всяко естествено число $t \leq a_1 + \cdots + a_n$ може да се представи като сбор на няколко от числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$. При $t = 1$ имаме $1 = a_1$. Да допуснем, че твърдението е вярно за всяко $t \leq a_1 + \cdots + a_n$. Да изберем число k, за което $a_1 + \cdots + a_n < k \leq a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}$. Ако в дясното неравенство има равенство, то имаме исканото представяне. Ако неравенството е строго, имаме

$$0 \leq a_1 + \cdots + a_n - a_{n+1} < k - a_{n+1} < a_1 + \cdots + a_n$$

и числото $t = k - a_{n+1}$ е естествено и според индукционното допускане може да се представи кота сбор на някои от числата $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогава $k = t + a_{n+1}$ може да се представи като сбор на някои от числата $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$.

Задача 2. Държава има n града, някои свързани с двупосочни авиолинии. Има $r > 2014$ маршрути между градове, включващи не повече от 1 прекачване (посоката на движение е важна). Намерете най-малкото възможно n и най-малкото възможно r за това n.

Решение. Ако град е свързан с m други града, той е краен пункт за m директни полета и място за прекачване за $m(m-1)$ недиректни полета. Така броят маршрути е сбор от квадратите на степените на всички върхове в получения граф. Тези степени са не по-големи от $n - 1$ и $13.12^2 < 2014$, така че $n \geq 14$. Нека $n = 14$. Всеки път се появява в две направления, така че r е четно: $r \geq 2016$. Можем да получим $r = 2016 = 14.12^2$, ако подредим 2014 града в кръг и свържем всички, освен диаметрално противоположните.

Задача 3. Точката D е среда на дъгата ACB от описаната окръжност около $\triangle ABC$. Окръжност през точките D и C пресича отсечките CA и CB съответно в точки M и N. Да се докаже, че $AM = BN$.

Решение. Разглеждаме $\triangle BND$ и AMD. Имаме:

1. $\sphericalangle NBD = \sphericalangle CBD = \sphericalangle CAD = \sphericalangle MAD$.
2. $AD = BD$.
3. $\sphericalangle BND = 180^\circ - \sphericalangle CND = 180^\circ - \sphericalangle CMD = \sphericalangle AND$.

Следователно двата триъгълника са еднакви, откъдето $AM = BN$.

Задача 4. Нека a, b, c са дължините на страните на триъгълник. Да се докажат неравенствата:

$$\sqrt{2}(a+b+c) \leq \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} < \sqrt{3}(a+b+c).$$

Решение. Имаме

$$a + b \leq \sqrt{2(a^2+b^2)} \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

и като сумираме с аналогичните неравенства, получаваме лявото неравенство. От друга страна $|a-b|<c \Rightarrow$
$(a-b)^2<c^2 \Leftrightarrow a^2+b^2<c^2+2ab \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}<\sqrt{c^2+2ab}+\sqrt{b^2+2ca}+\sqrt{a^2+2bc} \le \sqrt{3((c^2+2ab)+(b^2+2ca)+(a^2+2bc))} = \sqrt{3}(a+b+c)$, което трябваше да докажем.

Задача 5. Намерете всички $a,b,c \in \mathbb{N}$, за които е изпълнено, че $4^a+2^b+1=c^2$ и $b<2a$.

Решение. Разглеждаме еквивалентното равенство $2^b(2^{2a-b}+1)=(c-1)(c+1)$ и допускаме, че съществуват такива a,b,c. Понеже е изпълнено $2^{b-1} \mid c-1$ или $2^{b-1} \mid c+1 \Rightarrow 2^{b-1} \le c+1$ и $2^b \le 2c+2 \Rightarrow 2^{2a-b}+1 \ge \frac{c-1}{2} \ge \frac{2^{b-1}}{2}-1 \Rightarrow 2^{2a-b}+1 \ge \frac{2^{b-1}}{2}-1 \Rightarrow 2^{2a-b-1}+1 \ge 2^{b-3}$. Допускаме, че $b \ge a+2$, следователно $1 \ge 2^{2a-b-1}(2^{(b-3)-(2a-b-1)}-1)= 2^{2a-b-1}(2^{2b-2a-2}-1)$ ≥ 3, противоречие $\Rightarrow b \le a+1$. Допускаме, че $b<a+1$. Тогава $(2^a)^2<4^a+2^b+1<(2^a+1)^2$, което е противоречие, понеже $4a+2b+1$ е т.кв. по условие. Оттук $b=a+1$ всички решения са наредените тройки $(a;b;c)=(a;a+1;2^a+1)$, $a \in N$.

Задача 6. За всяко естествено число m означаваме с $\tau(m)$ броя на естествените делители на m. Да се намерят всички естествени числа n, за които от $d|n$, $d \in \mathbb{N}$, следва $\tau(d)|\tau(n)$.

Решение. Отговор: Всички естествени числа, които са свободни от квадрати. Ако $n=p_1\dots p_k$ е свободно от квадрати, то $\tau(n)=2^k$. Всеки делител d на n има вида $p_{i_1}\dots p_{i_t}$, където $\{i_1,\dots,i_t\} \subseteq \{1,\dots,k\}$. Тогава $\tau(d)=2^{i_t}|\tau(n)=2^k$.

Нека n не е свободно от квадрати, $p^t||n$, p е просто число и $t \ge 2$. Тогава $d=\frac{n}{p}$ е делител на n, за който $\tau(d)$ не дели $\tau(n)$ (Докажете!).

Задача 7. През един ден определен брой хора посещават по веднъж една библиотека. Известно е, че не всички са влезли по едно и също време, но измежду всеки трима от тях има двама, които са се срещнали в библиотеката. Да се докаже, че могат да се изберат два момента от време такива, че всеки читател през този ден е бил в библиотеката в поне един от тях.

Решение. Да допуснем, че съществува читател A, който не е в библиотеката през нито един от следните два момента:

1. Когато за първи път някой читател (нека това е читател B) я напуска.
2. Когато влиза последният читател (нека това е читател C).

Тъй като B си тръгва най-рано, то A е дошъл след напускането на B, аналогично C влиза последен и значи A е излязъл преди идването на C. Оттук заключваме, че измежду тройката A, B и C никои двама не са се засекли в библиотеката, което е противоречие с условието.

Задача 8. Да се намери броя на пермутациите $a_1,a_2,\dots,a_{25}$ на числата $1,2,\dots,25$, за които всяко от числата a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, $\dots$, $a_1+a_2+\dots+a_{25}$ не се дели на 3.

Решение. Измежду числата $1,2,\dots,25$ имаме 9, които дават остатък 1 при деление на 3, 8, който дават остатък 2 и 8, които се делят на 3. Първо ще наредим числата, които не се делят на 3. Ако първото число е 2, то редицата ще бъде $2,2,1,2,1,2,\dots,2,1$ и двойките са винаги повече. Следователно първото число е 1 и редицата с дължина 17 е $1,1,2,1,2,1,2,1,2,1,\dots,1,2$. Сега остава да поставим 8-те нули (съответстващи на числата, които се делят на 3), като не може да имаме нула на първо място, а на всяко от останалите 17 места може да имаме произволен брой нули. Това означава, че търсим броя на решенията на $a_1+a_2+\dots+a_{17}=8$, при $a_i \ge 0$. Този брой е $\binom{24}{16}$. Всяка редица от 0, 1 и 2 съответства на 8!.8!.9! редици от числата $1,2,\dots,25$. Следователно търсения брой е $\frac{24!.8!.9!}{16!}$.

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Втори кръг, 10 – 12 клас
2 Септември, 2014 г., Созопол

Задача 1. Всяка от клетките на таблица 2014×2014 е оцветена в черно или бяло. Известно е, че всеки квадрат 2×2 съдържа четен брой черни клетки, а всеки кръст (квадрат 3×3 без четирите ъглови клетки) съдържа нечетен брой черни клетки. Да се докаже, че четирите ъглови клетки на таблицата са едноцветни.

Решение. Да запишем 1 във всяка черна клетка и 0 във всяка бяла. Разглеждаме квадрат 3×3 без двете ъглови клетки по втория диагонал. Като използваме условието за двата квадрата 2×2 и единия кръст се вижда, че сборът от трите числа по главния диагонал е нечетно число. Това свойство е вярно за всеки три диагонални клетки и в двете посоки.

Ще докажем, че във върховете на всеки квадрат 4×4 има равни числа. Тъй като $a + e + h$ и $d + e + h$ са нечетни, то $a = b$. Тъй като $e + h$ и $g + f$ са с еднаква четност (защото $e + h + g + f$ е четно) и $a + e + h$ и $g + f + b$ са също с еднаква четност, то $a = b$. Оттук следва, че $a = b = c = d$ и от $2014 \equiv 1 \pmod 3$ следва, че четирите ъглови клетки на таблицата са едноцветни.

a			b
	e	f	
	g	h	
e			d

Задача 2. Точката с координати (p^m, q^n), където p и q са прости числа, а m и n са естествени числа, лежи на окръжността с център началото на координатната система и радиус r, където r е естествено число. Да се намери r.

Решение. Отговор: 5. От условието следва, че $p^{2m} + q^{2n} = r^2$.

Случай 1. Ако $r = 2t$ е четно, то p и q са с еднаква четност. Ако са нечетни, имаме $4t^2 = p^{2m} + q^{2n} \equiv 2 \pmod 4$, което е невъзможно. Следователно $p = q = 2$ и

$$2^{2m} + 2^{2n} = 4t^2 \iff 2^{2n-2}(2^{2m-2n} - 1) = t^2$$

(без ограничение на общността $m \geq n$). Оттук $2^{2(m-n)} - 1$ е точен квадрат, което е невъзможно.

Случай 2. Ако r е нечетно, то p и q са с различна четност и без ограничение на общността можем да считаме, че $p = 2$. Получаваме $2^{2m} = r^2 - q^{2n} = (r - q^n)(r + q^n)$, откъдето $r - q^n = 2^u$, $r + q^n = 2^v$, $u + v = 2m$. Следователно $q^n = 2^{u-1} - 2^{v-1}$, което означава, че $v = 1$, $u = 2m - 1$ и значи $q^n = (2^{m-1} - 1)(2^{m+1} + 1)$. Тъй като множителите в последното произведение са взаимнопрости, заключаваме, че $2^{m-1} - 1 = 1$, откъдето $m = 2$, $q = 3$, $n = 1$ и $r = 5$.

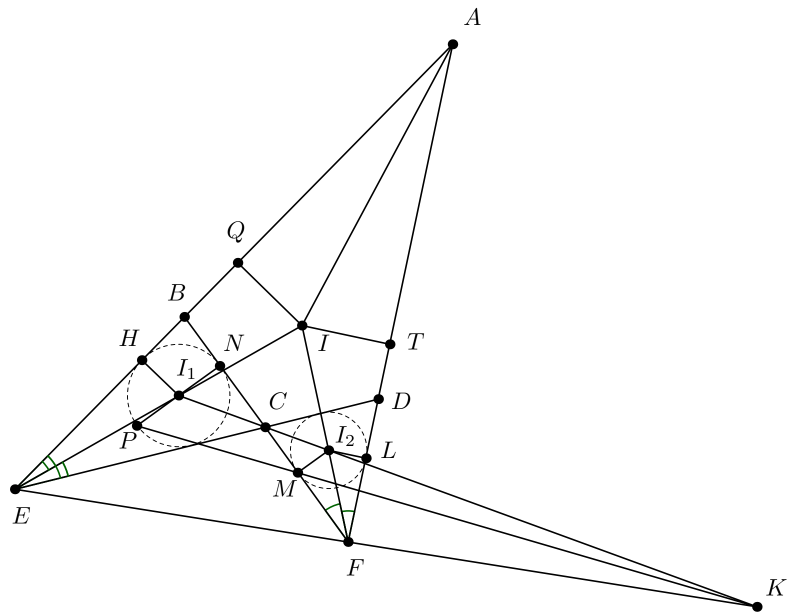
Задача 3. Николай и Петър делят торта с формата на триъгълник. Първоначално Николай избира една точка P във вътрешността на триъгълника, а след това Петър разрязва тортата по избрана от него права през P, избира за себе си едно от парчетата, и оставя другото на Николай. Каква най-голяма част от тортата може да бъде сигурен, че ще получи Николай, ако избере точката P по възможно най-добрия начин?

Решение. Отговор: $\frac{4}{9}$**.** Оценката се достига точно тогава, когато Николай избере медицентъра на тортата, а Петър разреже по права, успоредна на една от страните на тортата.

Задача 4. Да се намерят всички полиноми $P, Q \in R[x]$, такива че: $P(2) = 2$, $Q(x)$ няма отрицателни корени, $(x-2)P(x^2-1)Q(x+1) = P(x)Q(x^2) + Q(x+1)$.

Решение. Полагаме $x = 2$. $\Rightarrow P(2)Q(4) + Q(3) = 0 \Rightarrow 2Q(4) + Q(3) = 0 \Rightarrow \exists a : Q(a) = 0$ и $3 \leq a \leq 4$ Нека $b \geq 3$ и $Q(b) = 0$. Полагаме $x = b - 1 \Rightarrow P(b-1)Q((b-1)^2) = 0$. Допускаме, че $P(b-1) = 0$ и полагаме $x = -\sqrt{b} \Rightarrow Q(1-\sqrt{b}) = 0$, което е противоречие с условието Q да няма отрицателни корени. $\Rightarrow Q((b-1)^2) = 0 \Rightarrow (b-1)^2$ е корен на Q и освен това $(b-1)^2 > b$, защото $b \geq 3$. $\Rightarrow$ Можем да конструираме безкрайна растяща редица $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ от корени на $Q(x)$ по следния начин: $c_1 = a$ $c_{i+1} = (c_i - 1)^2$, за $i \geq 1$ $\Rightarrow Q(c_i) = 0, \forall i \Rightarrow Q(x) \equiv 0$, но този полином не удовлетворява условието, защото има отрицателни корени. Окончателно, такива полиноми не съществуват.

Задача 5. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Лъчите AB и DC се пресичат в точка E. Лъчите AD и BC се пресичат в точка F. Ъглополовящата на $\sphericalangle DCF$ пресича EF в точка K. Нека I_1 и I_2 са центровете на вписаните окръжности в $\triangle ECB$ и $\triangle FCD$. Нека M е проекцията на I_2 върху CF и нека N е проекцията на I_1 върху BC. Нека P е симетрична на N относно I_1. Ако P, M, K лежат на една права, то да се докаже, че в $ABCD$ може да се впише окръжност.



Решение.

Нека $EI_1 \cap FI_2 = I$. Очевидно EI_1 и FI_2 са ъглополовящи съответно на $\sphericalangle AED$ и $\sphericalangle AFB$. $PI_1 \parallel MI_2$ и от теоремата на Талес имаме: $\dfrac{I_1K}{KI_2} = \dfrac{PI_1}{MI_2} = \dfrac{r_1}{r_2}$, където $PI_1 = I_1N = r_1$ и $MI_2 = r_2$ са радиусите на вписаните окръжности съответно в $\triangle ECB$ и $\triangle FCD$. От теоремата на Менелай $\Rightarrow$

$$\frac{I_1K}{KI_2} \cdot \frac{I_2F}{FI} \cdot \frac{IE}{EI_1} = 1, \quad \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{I_2F}{FI} \cdot \frac{IE}{EI_1} = 1.$$

Нека $IQ \perp AE (Q \in AE)$, нека $IT \perp AF (T \in AF)$, нека $I_1H \perp AE (H \in AE)$ и нека $I_2L \perp AF (L \in AF)$. Тогава имаме:

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{I_2L}{TI} \cdot \frac{IQ}{HI_1} = 1, \quad \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_2}{TI} \cdot \frac{IQ}{r_1} = 1$$

$\Rightarrow IQ = TI \Rightarrow AI$ е ъглополовяща на $\sphericalangle EAF \Rightarrow I$ е център на вписаната окръжност за $\triangle AED$ и $\triangle AFB \Rightarrow I$ е център на вписаната окръжност за $ABCD \Rightarrow$ в $ABCD$ може да се впише окръжност.

Задача 6. Реалните положителни числа a, b, c са такива, че е изпълнено неравенството $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$. Да се намери най-малката стойност на израза $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{c}$.

Решение. Отговор: $\frac{15}{2}$**.** Полагаме $a = \frac{x}{3}, b = \frac{4y}{5}, c = \frac{3z}{2}$. Тогава неравенството от условието придобива вида придобива вида $7xy + 3yz + 5zx \leq 15$, което записваме като

$$\frac{7}{15}xy + \frac{3}{15}yz + \frac{5}{15}zx \leq 1.$$

Сега прилагайки неравенството $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq \prod_(i = 1)^n x_i^{p_i}$ за $x_i > 0, p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, като равенство се достига само при $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ от (2) Получаваме $x^6y^5z^4 \leq 1$. От друга страна $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{c} = \dfrac{6}{2x} + \dfrac{5}{2y} + \dfrac{4}{2z}$. Сега отново прилагайки обобщеното неравенство получаваме $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} + \dfrac{3}{c} \geq \dfrac{15}{2}$, като равенство се достига при $x = y = z = 1$, или $a = \dfrac{1}{3}, b = \dfrac{4}{5}, c = \dfrac{3}{2}$.

Задача 7. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ ъглите при върховете A и C са равни и ъглополовящата на ъгъла при върха B минава през средата на страната CD. Ако $CD = 3AD$, да се намери отношението $\dfrac{AB}{BC}$.

Решение. Отговор: $\dfrac{5}{3}$**.** Нека M е средата на DC и E е симетрична на C спрямо BM. Тъй като BM е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$, то $E \in AB$. Имаме $MD = MC$ (по условие) и $MC = ME$ (от симетрията), откъдето $\triangle DEC$ е правоъгълен. От $BM \perp EC$ сега намираме $BM \parallel ED$. Освен това $\sphericalangle BEM = \sphericalangle BCM = \sphericalangle BAD$ и следователно $AD \parallel EM$. Триъгълниците BEM и EAD имат съответно успоредни страни и значи са подобни. Тогава

$$\frac{EM}{AD} = \frac{CM}{AD} = \frac{\frac{CD}{2}}{AD} = \frac{3}{2}$$

и $BE = \dfrac{3}{2}AE$, $AB = \dfrac{5}{2}AE$, откъдето $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AB}{BE} = \dfrac{5}{3}$.

Задача 8. Правоъгълна таблица, запълнена с естествени числа наричаме *добра*, ако за всеки 2 нейни реда съществува стълб, за който числата в двете му пресечни клетки с тези 2 реда са от различна четност. Да се докаже, че за всяко $n > 2$ от добра таблица $n \times n$ може да се изтрие 1 стълб, така че получената таблица с n реда и $n - 1$ стълба също да е добра.

Решение. Да допуснем противното

Ако съществува стълб k такъв, че за всеки два реда съществува стълб $m \neq k$ изпълняващ условието за тези два реда, то изтриваме k и задачата е решена.

Обратно, за всеки стълб съществуват 2 реда, такива че числата в пресечните клетки с него са от различна четност, а в пресечните клетки с всеки друг стълб са от еднкава четност.

Разглеждаме граф с върхове редовете на нашата таблица. За всеки стълб избираме двата реда, изпълняващи горното условие и ги свързваме. Така получаваме неориентиран граф с n върха и n ребра.

Ще използваме известното твърдение, че в граф с $n > 3$ върха и поне n ребра има цикъл $C = h_1, h_2, \ldots h_k, h_1$.

Сега за h_1, h_2 по дефиниция съществува стълб k, такъв че числата в пресечните им клетки с него са от различна четност, а в пресечните клетки с всеки друг $m \neq k$ са от еднаква. Разсъждавайки аналогично за останалите двойки последователни ребра на C заключваме последователно, че клетките от стълб k в редове $h_2, h_3, \ldots, h_k, h_1$ са от еднаква четност, което е противоречие с избора на k.

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Трети кръг, 6 – 7 клас
4 Септември, 2014 г., Созопол

Задача 1. От шоколадовата фабрика Чарли взел кутия шоколадови моливи и кутия моливи със захарна глазура. Раздал на приятелите си $\dfrac{5}{9}$ от шоколадовите моливи и 64% от моливите със захарна глазура и му останали общо 42 молива. Общо колко молива взел Чарли от фабриката?

Решение. Отговор: 104. Броят на шоколадовите моливи се дели на 9, а на тези със захарна глазура – на 25. Ако шоколадовите са $9k$ на брой, а със захарна глазура са $25n$, Чарли е раздал $5k + 16n$ бонбона, а са останали $4k + 9n$. Равенството $4k + 9n = 42$ е възможно само при естествените числа $k = 6$ и $n = 2$. Следователно Чарли е взел общо $9.6 + 25.2 = 104$ молива.

Задача 2. Учителят казал: *Измислих две естествени числа, по-големи от 1. Познайте кои са те.* Ани знаела произведението на числата, а Боян знаел техния сбор.

Ани: *Аз не знам сбора.*

Боян: *Знам това. Сборът е по-малък от 14.*

Ани: *Знам това. Всъщност, вече знам числата.*

Боян: *Аз също.*

Кои числа е намислил учителят?

Решение. Отговор: 2 и 9. От първото изказване на Ани следва, че поне едно от числата е съставно. Тъй като Боян е знаел това, сборът не може да се получи като сбор на две прости числа. Значи сборът не е $13 = 2 + 11$, $12 = 5 + 7$, $10 = 3 + 7$, $9 = 2 + 7$, $8 = 3 + 5$, $7 = 2 + 5$, $6 = 3 + 3$, $5 = 2 + 3$, $4 = 2 + 2$. Значи сборът на числата е 11.

Ани знаела, че сборът е по-малък от 14, значи нейното произведние не може да се получи с числа с по-голям от 13 сбор. Оттук отпада случаят 5 и 6 ($5.6 = 30 = 2.15$, $2 + 15 > 13$), случаят 4 и 7 ($4.7 = 28 = 2.14$, $2 + 14 > 13$), случаят 3 и 8 ($3.8 = 24 = 2.12$, $2 + 12 > 13$). Остават числата 2 и 9.

Задача 3. В редица са наредени двадесет външно еднакви монети. Две съседни монети са с тегла 9 и 11 (в този ред отляво надясно), като всички останали монети са с тегла по 10 грама. Да се намери монетата с тегло 11 грама с три претегляния с везни без тежести.

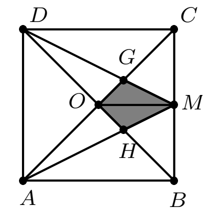
Решение. Да номерираме монетите с $1, 2, \ldots, 20$ и при първото претегляне теглим монети с номера $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17$ (група A) и монети с номера $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$ (група B). Тъй като монетите с тегла 9 и 11 са съседни, то те не могат да са в една и съща група. Следователно, ако теглото на група A е равно на теглото на група B, двете монети с тегла 9 и 11 грама са монети номера 19 и 20. С едно претегляне на монети 19 и 20 ще разберем коя е по-тежката и това е търсената монета.

Ако група A е по-тежка (съответно по-лека) от група B, то монетата с тегло 9 грама е в група B (съответно група A). Следователно знаем, че монетата от 9 грама е в група от 9 монети и е по-лека от всички останали. С две претегляния по стандартния начин с разделяне на три равни групи можем да намерим монетата от 9 грама, а следователно и монетата от 11 грама (която е следващата в редицата).

Задача 4. Намерете най-голямото естествено число a, за което съществува естествено $b > a$, такова че $\text{НОК}(a;b) - \text{НОД}(a;b) = \dfrac{ab}{99}$.

Решение. Нека $\text{НОД}(a;b) = d$, $a = ud$, $b = vd$, $\text{НОК}(a;b) = uvd$. Имаме $99uvd - 99d = uvd^2$, $uv(99 - d) = 99$. Най-големи u и d се получават при $99 - d = 1$, $d = 98$, $u = 9$, $v = 11$, $a = 98.9 = 882$ (и $b = 98.11 = 1078$).

Задача 5. Точка M е среда на страната BC на квадрата $ABCD$. Каква част от лицето на квадрата е оцветена?



Решение. Отговор: $\frac{1}{12}$. Нека лицето на квадрата е S. Тъй като $S_{AMD} = \frac{1}{2}S$ и $S_{DMC} = \frac{1}{4}S$, т.е. $S_{AMD} = 2S_{DMC}$, то $AG = 2GC$. Това означава, че $GC = \frac{1}{3}AC$ и тъй като $OC = \frac{1}{2}AC$, то $OG = \frac{1}{6}AC = \frac{1}{3}OC$. Тогава $S_{OGM} = \frac{1}{3}S_{OMC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}S_{OBC} = \frac{1}{6}.\frac{1}{4}S = \frac{1}{24}S$. Оттук следва, че оцветеното лице е $\frac{1}{12}S$.

Задача 6. За дадено естествено число n за един ход изваждаме от n неговия най-голям делител (различен от n). С новото число извършваме същата операция и т.н. За колко хода от $n = 19^{19}$ ще получим числото 1?

Решение. Отговор: 114. Директно се проследява, че след 6 хода от числото 19^{19} се получава числото 19^{18}. За да стигнем до 19^0 са необходими $6 = 19 = 114$ хода.

Задача 7. Във всяко квадратче на шахматна дъска 8×8 има поставена пешка. Наричаме две пешки съседни, ако полетата им имат обща страна. Взимаме всички пешки една след друга в произволен ред. В момента, когато взимаме една пешка, в квадратчето ѝ записваме броя на нейните съседни, които още са на дъската. Нека S е сумата на записаните 64 числа. Намерете стойността на S.

Решение. Отговор: 112. Представете си, че всяка пешка е вързана с всяка една от съседните си пешки с отделна връзка. В момента, когато вземаме пешката ние „разрязваме“ връзката на тази пешка със съседите ѝ и числото, което записваме е всъщност броят на прекъснатите връзки между взетата пешка и нейните съседни. Така се убеждаваме, че редът на вземане на пешките от дъската няма значение, защото сумата S е равна на броя на връзките между пешките. Остава да преброим връзките между пешките. Хоризонталните връзки са 8 реда по 7 връзки т.е. 56. Вертикалните връзки са 8 реда по 7 връзки т.е. 56. Тогава $S = 56 + 56 = 112$.

Задача 8. На дъската е записано числото 1. Ако на дъската присъства числото x, то е разрешено там да се напишат още числата $3x + 1$, $5x + 2$ и $x - 7$. Кое е най-голямото двуцифрено число, което никога не може да се появи на дъската?

Решение. $\boxed{99} \leftarrow 106 \leftarrow 35 \leftarrow 42 \leftarrow 8 \leftarrow 15 \leftarrow 22 \leftarrow 4 \leftarrow 1$; $\boxed{98} \leftarrow 105 \leftarrow 112 \leftarrow 22 \leftarrow 4 \leftarrow 1$; $\boxed{97} \leftarrow 19 \leftarrow 6 \leftarrow 13 \leftarrow 4 \leftarrow 1$; $\boxed{96} \leftarrow 103 \leftarrow 34 \leftarrow 11 \leftarrow 18 \leftarrow 25 \leftarrow 8 \leftarrow 15 \leftarrow 22 \leftarrow 4 \leftarrow 1$; $\boxed{95} \leftarrow 102 \leftarrow 20 \leftarrow 27 \leftarrow 5 \leftarrow 12 \leftarrow 2 \leftarrow 0 \leftarrow 7 \leftarrow 1$. Числото 94 не може да се получи, понеже дава остатък 3 при деление на 7, а правилата не позволяват появата на подобно число от число, което не е от този вид. Действително:

- ако $3x + 1 \equiv 3(\mod 7)$, то $3x \equiv 2 \equiv 9(\mod 7)$, $x \equiv 3(\mod 7)$;
- ако $5x + 2 \equiv 3(\mod 7)$, то $5x \equiv 1 \equiv 15(\mod 7)$, $x \equiv 3(\mod 7)$;
- ако $x - 7 \equiv 3(\mod 7)$, то $x \equiv 3(\mod 7)$.

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Трети кръг, 8 – 9 клас
4 Септември, 2013 г., Созопол

Задача 1. Съществува ли безкрайно множество A от естествени числа със следното свойство: сборът от числата във всяко крайно подмножество на A да не е точна степен на естествено число?

Решение. Отговор: Съществува. Нека $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3, \ldots$ е редицата от простите числа и да разгледаме множеството

$$A = \{a_1 = p_1, a_2 = p_1^2.p_2, \ldots, a_n = p_1^2, p_2^2 \ldots p_{n-1}^2 p_n, \ldots\}.$$

Да разгледаме прпоизволен краен сбор S на числа от A и нека a_k е най-малкото число от този сбор. Тогава S се дели на p_k, но не се дели на p_k^2 и следователно не може да бъде точна степен.

Задача 2. Във вътрешността на триъгълник ABC, за който $\sphericalangle ABC = 45°$ е избрана точка D така, че $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCD = 45°$. Ако $BD = 6$ cm, да се намери лицето на четириъгълника $ADCB$.

Решение. Отговор: 18 cm^2. Нека P е пресечната точка на правата AD с BC. Тогава $\triangle APB$ и $\triangle CDP$ са равнобедрени правоъгълни, откъдето $S_{APB} = \frac{1}{2}BP^2$ и $S_{CDP} = \frac{1}{2}DP^2$. Следователно

$$S_{ADCB} = S_{APB} + S_{CDP} = \frac{1}{2}BP^2 + \frac{1}{2}DP^2 = \frac{1}{2}BD^2,$$

като последното равенствоследва от Питагоровата теорема за $\triangle BDP$. При $BD = 6$ cm получаваме $S_{ADCB} = 18$ cm^2.

Задача 3. Четири деца си поделили n мъниста, където n е трицифрено число. Всяко дете имало или толкова мъниста, колкото някое друго, или два пъти по-малко от някое друго. Колко са възможните стойности на n?

Решение. Отговор: 432. Възможните бройки са $x+x+x+x = 4x$ (възможно точно когато n се дели на 4); $x + x + 2x + 2x = 6x$ (точно когато n се дели на 6); $x + 2x + 2x + 2x = 7x$ (точно когато n се дели на 7); $x + 2x + 4x + 4x = 11x$ (точно когато n се дели на 11). Сред трицифрените числа има $900 : 4 = 225$ кратни на 4, $900 : 6 = 150$ кратни на 6, $(1001 - 105) : 7 = 128$ кратни на 7 и $(1001 - 110) : 11 = 81$ кратни на 11. Сред тях има $900 : 12 = 75$ кратни на 4 и 6, $(1008 - 112) : 28 = 32$ кратни на 4 и 7; $(1012 - 132) : 44 = 20$ кратни на 4 и 11; $(1008 - 126) : 42 = 21$ кратни на 6 и 7; $(1056 - 132) : 66 = 14$ кратни на 6 и 11; $(1001 - 154) : 77 = 11$ кратни на 7 и 11; $(1008 - 168) : 84 = 10$ кратни на 4, 6 и 7; $(1056 - 132) : 132 = 7$ кратни на 4, 6 и 11; 3 кратни на 4, 7 и 11 (308, 616, 924); 2 кратни на 6, 7 и 11 (462, 924) и 1 кратно на 4, 6, 7, 11 (924). Според принципа за включване и изключване, отговорът е $225+150+128+81-75-32-20-21-14-11+10+7+3+2-1 = 432$.

Задача 4. Нека n е естествено число и a е произволен делител на $2n^2$. Да се докаже, че числото $n^2 + a$ не може да е точен квадрат.

Решение. Да допуснем, че $n^2 + a = x^2$ за някое $x \in N$. По условие $2n^2 = ka$, $k \in N$ и тогава имаме $x^2 = n^2 + \frac{2n^2}{k} \iff \left(\frac{kx}{n}\right)^2 = k^2 + 2k$. Квадратът на рационалното число $\frac{kx}{n}$ е цяло число и значи $\frac{kx}{n}$ е цяло число. Оттук $k^2 + 2k$ е точен квадрат, което е противоречие с очевидните неравенства $k^2 < k^2 + 2k < (k+1)^2$.

Задача 5. Дадени са n монети, наредени по окръжност. ($n \geq 5$) В началото всички са ези. Имаме право на следните операции:

1. Избираме монета и ако тя е ези, обръщаме двата и съседа.

2. Избираме монета и ако тя е тура, обръщаме двата и съседа през едно (т.е. обръщаме тези две монети, които са съседи на съседите ѝ).

За кои n е възможно след краен брой ходове да получим конфигурация, в която всички монети са тура?

Решение. Нека означим монетите с $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

1. Случай: $n = 4k + 2$
   В този случай имаме, че четността на броя на езитата в $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{4k+1}$ е инвариант, а в началото имаме нечетен брой ези на тези позиции $\Rightarrow$ исканата конфигурация не може да се достигне.

2. Случай: $n = 2k + 1$
   В този случай имаме, че четността на броя на езитата в $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ е инвариант, а в началото имаме нечетен брой ези на тези позиции $\Rightarrow$ исканата конфигурация не може да се достигне.

3. Случай: $n = 4k$
   В този случай има пример, показващ как да достигнем до исканата конфигурация. Нека вземем 8 последователни монети, които са ези, с номера от 1 до 8. Прилагаме операциите последователно за монети с номер: 2,4,3,7,5. По този начин можем да обърнем от ези в тура, 8 последователни монети по окръжността. Нека вземем 7 последователни монети, които са ези, с номера от 1 до 7. Прилагаме операциите последователно за монети с номер: 2,4,3,5,6. По този начин можем да обърнем от ези в тура, 4 последователни монети по окръжността, ако след тях има 3 монети ези, като тези 3 монети остават ези и след прилагане на операциите. Сега, ако k е четно, прилагаме първата серия от операции няколко пъти и достигаме до исканата конфигурация, а ако k е нечетно, прилагаме втората серия от операции веднъж и след това прилагаме първата серия от операции няколко пъти и достигаме до исканата конфигурация.

Задача 6. По колко начина можем да подредим в кръг x жени и y мъже, $1 \leq y \leq x$, така че всеки мъж да е между две жени?

Решение. След като поставим първата жена (Ева), останалите жени могат да се разположат по $(x-1)!$ начина. За всяка жена, започвайки от Ева надясно, да запишем номера на мъжа вдясно от нея, а ако такъв няма, да запишем *. Така разположението е кодирано с y различни числа и $x - y$ звездички. Броят на тези кодове е $x! : (x-y)!$. Отговор: $\dfrac{(x-1)!x!}{(x-y)!}$.

Задача 7. В редицата $a_1, a_2, a_3, \ldots$ числото a_{n+1}, $(n \geq 2)$ е остатъкът на $a_n + a_{n-1} + 1$ при деление с 3. Ако $a_{93} = a_1$, то намерете a_1.

Решение. Всички остатъци в решението са при деление на 3. Остатъкът на дадено число зависи само от остатъците на предишните две. Ако две поредни числа дават остатък 2, то това важи за всички числа в редицата. Редицата $1, 2, 1, 1, 0, 2, 0, 0, 1, 2, \ldots$ отговаря на рекурентната зависимост и в нея се срещат като поредни всичките други 8 двойки остатъци. Следователно остатъците винаги попадат или в тази редица (започната от определено място), или в редицата 2, 2, 2, ... И в двата случая имаме $a_{n+8} = a_n$ $\forall n$, а $a_{n+4} = a_n$ единствено ако $a_{n+4} = 2$. Следователно разликата в номерата на два еднакви члена може да дава остатък 4 при деление на 8 единствено ако стойността им е 2; a_{93} и a_1 отговарят на тези условия.

Задача 8. Върху страните AC и BC на триъгълник ABC са избрани съответно точки B_1 и A_1. Ако AA_1 и BB_1 се пресичат в точка X, да се докаже, че:

а) $S_{XA_1B_1} < S_{ABX}$; б) $S_{XA_1B_1} < S_{CB_1A_1}$.

Решение. а) Тъй като височината от B към AC е по-голяма от височината от A_1 към AC, то $S_{ABB_1} > S_{AA_1B_1}$. Като извадим от двете страни на това неравенство S_{AXB_1}, получаваме исканото неравенство.

б) Ако прекараме права през B_1, успоредна на XA_1 и права през A_1, успоредна на XB_1, то двете прави ще се пресичат в точка y_1 от вътрешността на $\triangle B_1A_1C$. Понеже $\triangle B_1A_1Y \equiv \triangle A_1B_1Y_1$ и $S_{B_1A_1Y_1} < S_{B_1A_1C}$, то получаваме $S_{XA_1B_1} < S_{CB_1A_1}$.

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Трети кръг, 10 – 12 клас
4 Септември, 2014 г., Созопол

Задача 1. През центъра O на равностранен $\triangle ABC$ е построена права l, която пресича страната CA в точка N и страната BC в точка M. Докажете, че от отсечките AM, BN и MN може да се построи триъгълник и дължината на височината към страната MN на всички построени триъгълници (когато правата l се мени) е една и съща.

Решение. Построяваме правилен тетраедър $ABCD$ с основа $\triangle ABC$. Произволната отсечка MN през центъра O на триъгълника, определя $\triangle DMN$ с височина DO - височината на тетраедъра. Очевидно $\triangle MND$ е търсения триъгълник, защото $DM = AM$ и $DN = BN$.

Задача 2. Дадена е редицата $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1}$. Да се докаже, че $2a_n - 1$ е точен квадрат.

Решение. Характеристичното уравнение $t^2 - 14t + 1 = 0$ има корени $7 \pm 4\sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3}^2$. Ако разгледаме редицата $b_0 = -1$, $b_1 = 1$, $b_{n+1} = 4b_n - b_{n-1}$, то лесно се вижда,че $2a_n - 1 = b_n^2$.

Задача 3. Граф G с 2014 върха не съдържа триъгълник. Ако множеството от степените на върховете на G е $\{1, 2, \ldots, k\}$, да се намери най-голямата възможна стойност на k.

Решение. Отговор: 1342. Да допуснем, че $k \geq 1343$ и нека A е връх от степен k. Да разгледаме връх B, от степен поне 672. Ако A и B са свързани, от $1342 + 671 = 2013 > 2012$ следва, че A и B са свързани с един и същи връх, т.е. има триъгълник, противоречие.

Получихме, че всички 671 върха със степени $672, 673, \ldots 1342$ не са свързани с A. Но тогава върховете в графа са поне $1 + 1343 + 671 > 2014$, противоречие. Следователно $k \leq 1342$.

Пример на граф със степени $\{1, 2, \ldots, 1342\}$ е следния: Върховете са A_i, $i = 1, 2 \ldots, 672$ и B_j, $j = 1, 2, \ldots, 1342$. Връх A_i е свързан с $B_i, B_{i+1}, \ldots, B_{1342}$. Степента на A_i при $i = 1, 2 \ldots, 672$ е $1343 - i$, а степента на B_j за $j = 1, 2, \ldots, 671$ е j.

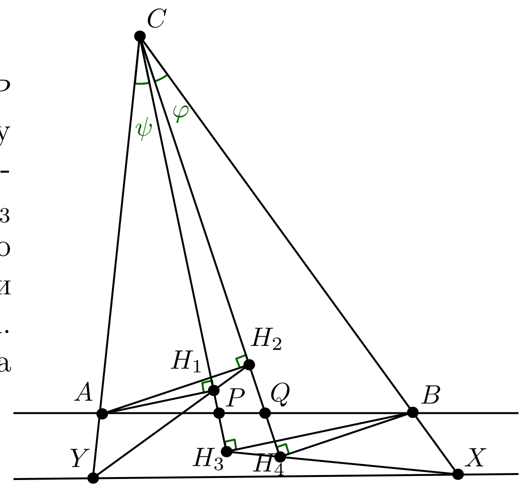
Задача 4. Да се докаже, че за всеки три реални положителни числа x, y, z е изпълнено неравенството $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{25y}{z+x} + \dfrac{4z}{x+y} > 2$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}
\frac{x}{y+z} + \frac{25y}{z+x} + \frac{4z}{x+y} &= (x+y+z)\left(\frac{1}{y+z} + \frac{25}{z+x} + \frac{4}{x+y}\right) - (1+25+4) = \\
&= \frac{1}{2}((y+z)+(z+x)+(x+y))\left(\frac{1}{y+z} + \frac{25}{z+x} + \frac{4}{x+y}\right) - 30 \geq \\
&\geq \frac{1}{2}(1+5+2)^2 - 30 = 2.
\end{aligned}$$

Равенство имаме при $(y+z)^2 = \dfrac{(z+x)^2}{25} = \dfrac{(x+y)^2}{4} \Leftrightarrow y+z = \dfrac{z+x}{5} = \dfrac{x+y}{2}$, или $(x, y, z) = (-3t, t, -2t)$. Тогава поне едно от числата няма да бъде положително, противоречие.

Задача 5. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$. Нека P и Q лежат на отсечката AB, така че P е между A и Q. Нека H_1 и H_2 са петите на перпендикулярите съответно от A към CP и CQ. Нека H_3 и H_4 са петите на перпендикулярите съответно от B към CP и CQ. Нека $H_3H_4 \cap BC = X$ и $H_1H_2 \cap AC = Y$, като X е след B, а Y е след A. Ако $XY \parallel AB$, то да се докаже, че CP и CQ са изогонални, спрямо $\triangle ABC$.



Решение.

Нека $\measuredangle ACB = \gamma$, $\measuredangle ACP = \varphi$, $\measuredangle BCQ = \psi$.
$\Rightarrow \measuredangle CXH_4 = 90^\circ + \varphi - \psi - \gamma$, $\measuredangle BH_4X = \gamma - \varphi$, $\measuredangle CYH_1 = 90^\circ - \varphi + \psi - \gamma$, $\measuredangle AH_1Y = \gamma - \psi$.
От синусови теореми за $\triangle BXH_4, \triangle BCH_4, \triangle AYH_1, \triangle ACH_1$ имаме:

$$\frac{1}{\sin(\gamma-\varphi)} . \frac{\cos(\gamma+\psi-\varphi)}{\sin\psi} = \frac{CB}{BX} = \frac{CA}{AY} = \frac{1}{\sin(\gamma-\psi)} . \frac{\cos(\gamma-\psi+\varphi)}{\sin\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(\gamma+(\varphi-\psi))}{\cos(\gamma-(\varphi-\psi))} = \frac{\sin(\gamma-\psi)}{\sin\psi} . \frac{\sin\varphi}{\sin(\gamma-\varphi)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\gamma\cot(\varphi-\psi)-\sin\gamma}{\cos\gamma\cot(\varphi-\psi)+\sin\gamma} = \frac{\sin\gamma\cot\psi-\cos\gamma}{\sin\gamma\cot\varphi-\cos\gamma}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\gamma\frac{\cot\varphi\cot\psi+1}{\cot\psi-\cot\varphi}-\sin\gamma}{\cos\gamma\frac{\cot\varphi\cot\psi+1}{\cot\psi-\cot\varphi}+\sin\gamma} = \frac{\sin\gamma\cot\psi-\cos\gamma}{\sin\gamma\cot\varphi-\cos\gamma}$$

$$\Rightarrow \sin\gamma(\cot\varphi-\cot\psi)(\cos\gamma\cot\varphi\cot\psi+\cot\varphi\sin\gamma+\cot\psi\sin\gamma-\cos\gamma)=0$$

$$\sin\gamma>0 \Rightarrow (\cot\varphi-\cot\psi)(\cos\gamma\cot\varphi\cot\psi+\cot\varphi\sin\gamma+\cot\psi\sin\gamma-\cos\gamma)=0$$

Ако $\cot\varphi - \cot\psi = 0$, то $\varphi = \psi$ и задачата е решена. В противен случай имаме:

$$\cos\gamma\cot\varphi\cot\psi+\cot\varphi\sin\gamma+\cot\psi\sin\gamma-\cos\gamma=0$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \frac{cot\psi+\cot\varphi}{1-cot\psi\cot\varphi},$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,(90^\circ-\gamma) = \text{tg}\,(180^\circ-\varphi-\psi)$$

но $\text{tg}\,(90^\circ-\gamma) > 0$, а $\text{tg}\,(180^\circ-\varphi-\psi) < 0$, което дава исканото противоречие.

Задача 6. Дадени са две крайни множества A и B от естествени числа, всяко от които съдържа поне 3 елемента. Две числа $a \in A$ и $b \in B$ наричаме *задружни*, ако техният най-голям общ делител е различен от 1. Известно е, че всеки елемент на A не е задружен с поне един елемент от B и всеки елемент на B е задружен с поне един елемент от A. Да се докаже, че съществуват $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$ такива, че двойките (a_1, b_1) и (a_2, b_2) са задружни, но (a_1, b_2) и (a_2, b_1) не са.

Решение. Да означим с a_1 елементът на A, който е задружен с най-много елементи от B. Понеже всеки елемент на А не е задружен с поне един елемент от B, то съществува $b_2 \in B$, който не е задружен с a_1. Освен това всеки елемент на B е задружен с поне един елемент от A и нека $a_2 \in A$ е задружен с b_2 (очевидно $a_2 \neq a_1$). Ще докажем, че съществува $b_1 \in B$ такъв, че a_1 е задружен с него, но a_2 не е. Наистина, иначе всеки елемент задружен с a_1 ще е задружен и с a_2, понеже b_2 е задружен с a_2, но a_2 не е с b_1, то излиза че a_2 е задружен с повече елементи от a_1, противоречие с избора на a_1. В такъв случай съществува $b_1 \in B$, който е задружен с a_1, но не и с a_2 и така избраните двойки (a_1, b_1) и (a_2, b_2) изпълняват условието на задачата.

Задача 7. Да се намерят всички функции $f : N \to N$, за които

$$f(f(n) + m) = n + f(m + 2014)$$

за всички естествени m, n.

Решение. Полагайки $m = f(1)$ получаваме $f(f(n) + f(1)) = n + f(f(1) + 2014) = n + 1 + f(4028) = f(f(n+1) + 2014)$. Оттук след добавяне на m от двете страни и итериране имаме $f(f(f(n) + f(1)) + m) = f(f(f(n+1) + 2014) + m) \to f(n) + f(1) + f(m + 2014) = f(n+1) + 2014 + f(m+2014) \to f(n+1) - f(n) = f(1) - 2014 = a \to f(n) = sum_{k=1}^{n-1}(f(k+1) - f(k)) + f(1) = an + 2014$. След заместване в условието стигаме до $a^2 n + 2014a + am + 2014 = n + a(m + 2014) + 2014$ и ако $a = -1$, то $f(n) = -n + 2014 < 0$ при $n \geq 2015$, противоречие. Следователно $a = 1$ и $f(n) = n + 2014$, което остава единственото решение.

Задача 8. Да се докаже, че ако a, b, c са страни на триъгълник, то е изпълнено неравенството:

$$3(a^3 b + b^3 c + c^3 a) + 2(ab^3 + bc^3 + ca^3) \geq 5(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)$$

Решение. При $x = \dfrac{a+b-c}{2}, y = \dfrac{a+c-b}{2}, z = \dfrac{b+c-a}{2}$ получаваме $x > 0, y > 0, z > 0$ и $x + y = a, x + z = b, y + z = c$ и нервенството е еквивалентно на:

$$3\sum_{cyc}(x+y)^3(x+z) + 2\sum_{cyc}(x+y)(x+z)^3 \geq 5\sum_{cyc}(x+y)^2(x+z)^2$$

След разкриване на скобите, получаваме еквивалентното неравенство:

$$3(x^3 y + y^3 z + z^3 x) + 2(xy^3 + yz^3 + zx^3) \geq 5xyz(x + y + z)$$

Разделяме двете страни на $xyz > 0$ и получаваме:

$$3\left(\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y}\right) + 2\left(\frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} + \frac{x^2}{y}\right) \geq 5(x + y + z),$$

което следва от нераенството на Коши-Шварц. Равенство се достига при $a = b = c$.

Забележка. Неравенството не е изпълненено за всички положителни a, b, c. Например тройката $(a, b, c) = \left(\dfrac{1}{100}, 1, \dfrac{5}{4}\right)$ е контрапример.

Четвърти кръг, 6 – 7 клас

Задача 1. Хари Потър има кутия с 2014 топки – червени, бели и зелени. Три от тях са вълшебни и постоянно си менят цвета (в един от изброените цветове). Веднъж Хари Потър погледнал в кутията и видял, че червените топки са повече от белите, а белите – повече от зелените. Като погледнал след една минута, видял, че вече зелените са повече от белите, а белите са повече от червените. Колко бели топки е имало в кутията, когато Хари Потър за първи път погледнал в нея?

Решение. Отговор: 671. Ако $a < b < c$, то $c = a + x$, $x \geq 2$. Тъй като 2014 не се дели на 3, то $x \neq 2$. Лесно се вижда, че $x \leqq 5$.

Ако $x = 5$, при преместването на три топки получаваме $a+2 < b < a+3$, противоречие.

Ако $x = 4$, то $b = a + 3$ (защото $a + b + c = 2014$, което дава остатък 1 при деление на 3). С проверка виждаме, че случаят $a, a + 3, a + 4$ е невъзможен.

Ако $x = 3$, то $b = a + 1$ и намираме решението 670, 671 и 673.

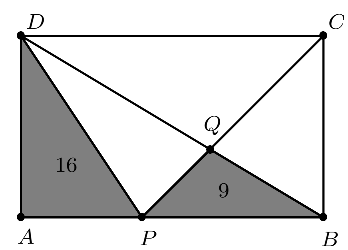
Задача 2. Едно 9-цифрено число се нарича *созополско*, ако:

1. Числото съдържа всяка от цифрите $1, 2, 3, \ldots, 9$.

2. За всяка цифра след втората е изпълнено следното свойство: произведението на тази цифра с 2 е не по-малко от сбора на предните две цифри.

Да се намери броят на всички *созополски* числа.

Решение. Отговор: .



Задача 3. Даден е правоъгълник $ABCD$. На страната AB е избрана точка P, а пресечната точка на PC и BD е означена с Q. Ако лицето на $\triangle APD$ е 16, а лицето на $\triangle PBQ$ е 9, намерете лицето на дадения правоъгълник.

Решение. Отговор: 80. Да означим лицето на триъгълника BQC с x. Лесно се вижда, че лицето на PQD също е x. Тъй като BD разполовява лицето на правоъгълника, то $16 + 9 + x = x + S_{DQC}$, откъдето лицето на триъгълника DQC е 25.

Тъй като $\dfrac{S_{DQP}}{S_{DBQ}} = \dfrac{DQ}{BQ} = \dfrac{S_{DQC}}{S_{BQC}}$, т.е. $\dfrac{x}{9} = \dfrac{25}{x}$, получаваме $x^2 = 9.25$ и намираме $x = 15$. Тогава $S_{ABCD} = 2(25 + 15) = 80$.

Задача 4. В квадратна мрежа е даден правоъгълник 20×21 с върхове във възлите на мрежата. Правоъгълникът е разрязан на квадрати, като се разрязва по линиите на мрежата. Най-малко колко от тези квадрати са с нечетна страна?

Решение. Отговор: 4. Квадратите с нечетна страна са четен брой, тъй като лицето на правоъгълника е четно. Ако са два, получаваме противоречие по модул 4. Пример с 4 нечетни квадрата се построява лесно.

Задача 5. На дъска 10×20 няколко полета са оцветени в син цвят. Иво може да разреже дъската на правоъгълници така, че във всеки да има по 5 сини полета. Ани може да разреже същата дъска на правоъгълници така, че във всеки да има по 7 сини полета. Може ли дъската да се разреже на правоъгълници така, че във всеки да има по 6 сини полета?

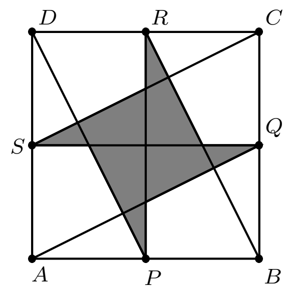
Решение. Отговор: Не. Броят на сините полета се дели на 5, на 6 и на 7, а НОК на 5, 6 и 7 е 210, повече от полетата на дъската.

Задача 6. Иво и Емо имат общо 285 войници, като $\dfrac{1}{4}$ от войниците на Емо и $\dfrac{1}{5}$ от войниците на Иво са конници, $\dfrac{1}{6}$ от войниците на Емо и $\dfrac{1}{7}$ от войниците на Иво са стрелци, а останалите са пехотинци. Общо колко пехотинци имат Иво и Емо?

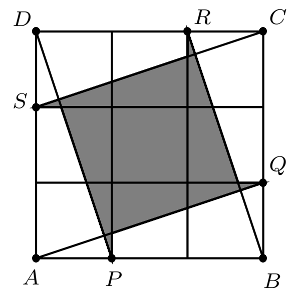
Решение. Отговор: 174. Броят на войниците на Емо се дели на 4 и на 6, следователно на 12; броят на войниците на Иво се дели на 7 и на 5, следователно на 35. Ако са съответно $12k$ и $35n$, то $12k + 35n = 285$. Оттук намираме естествените числа $k = 15$ и $n = 3$. Следователно пехотинците са общо $\dfrac{7}{12}.180 + \dfrac{23}{35}.105 = 174$.

Задача 7. Даден е квадрат $ABCD$ със страна n, където n е естествено число. Върху страните AB, BC, CD и DA са избрани съответно точки P, Q, R и S, така че $AP = BQ = CR = DS = 1$. Намерете лицето на оцветената част при:

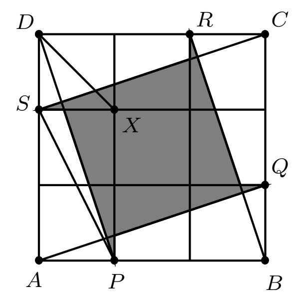
а) $n = 2$;



б) $n = 3$.



Решение. Отговор: а) 1; б) $\frac{11}{3}$. а) Ако O е центърът на квадрата, от съображения за симетрия е ясно, че RB разполовява отсечката OQ (може да се докаже с равенството на лицата на $\triangle ROB$ и $\triangle RQB$). Оцветената фигура се състои от четири правоъгълни триъгълника с катети 1 и $\frac{1}{2}$ и лицето и е 1.



б) Оцветената фигура се състои от квадрат със страна 1 и четири правоъгълни триъгълника с катети 2 и $\frac{2}{3}$ (тъй като лицето на $\triangle DSP$ е 2 пъти по-малко от лицето на $\triangle DXP$, то отсечката DP разделя отсечката SX в отношение $1 : 2$). Лицето на оцветената фигура е $1 + 4.\frac{1}{2}.2.\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$.

Задача 8. От точно 2014 еднакви кибритени клечки в равнината е построен правоъгълник, разделен на квадратчета със страна по една клечка. Определете размерите му.

Решение. Ако правоъгълникът има m реда и n стълба $(1 \leq m \leq n)$, то има $m+1$ реда по n хоризонтални клечки и $n+1$ реда по m вертикални клечки, така че $(m+1)n+(n+1)m = 2014$ и $2mn + m + n = 2014$. Умножаваме по 2 и добавяме 1, за да разложим:

$$4mn + 2m + 2n + 1 = 4029$$

$$(2m + 1)(2n + 1) = 3.17.79.$$

Имаме вариантите:

$2m + 1 = 3$, $2n + 1 = 1343$, $(m; n) = (1; 671)$;
$2m + 1 = 17$, $2n + 1 = 237$, $(m; n) = (8; 118)$;
$2m + 1 = 51$, $2n + 1 = 79$, $(m; n) = (25; 39)$.

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Четвърти кръг, 8 – 9 клас

Задача 1. Нека m е естествено число, а p, q и r са прости числа, като $r \equiv 5 \pmod 8$. Да се намерят m и q, ако $2^m p^2 + 1 = q^r$.

Решение. Отговор: $m = 1$, $q = 3$. От представянето $2^m p^2 = (q-1)(q^{r-1}+q^{r-2}+\cdots+q+1)$ и факта, че вторият множител отдясно е нечетен и по-голям от 1, следва, че $q - 1 = 2^m$ или $q - 1 = 2^m p$.

Случай 1. Ако $q - 1 = 2^m p$, то

$$2^m p^2 = (2^m p + 1)^r \geq (2^m p + 1)^3 > 2^{3m} p^3,$$

което е противоречие.

Случай 2. Ако $q - 1 = 2^m$, то

$$2^m p^2 = (2^m + 1)^r - 1 = 2^{2m} A + r.2^m,$$

където A е четно естествено число. Следователно $p^2 = 2^m A + r$, което е невъзможно при $m \geq 2$ (противоречие по модул 8). При $m = 1$ получаваме $q = 3$, като решение е например $r = 5$ и $p = 11$).

Задача 2. Точките M и N лежат съответно на страните BC и CD на успоредника $ABCD$. Да се докаже, че медианите BB_1, CC_1 и DD_1 съответно в $\triangle ABM$, $\triangle CMN$ и $\triangle DAN$ се пресичат в една точка.

Решение.

Задача 3. На дъската е записано числото 1. Ако на дъската присъства числото x, то е разрешено там да се напишат още числата $3x + 2$, $5x - 3$ и $x - 7$. Колко са трицифрените естествени числа, които никога не могат да се появят на дъската?

Решение. Не е възможно да се появи число, което дава остатък 6 при деление на 7 от число, което не е от този вид. Действително:

- ако $3x + 2 \equiv 6(\mod 7)$, то $3x \equiv 4 \equiv 18(\mod 7)$, $x \equiv 6(\mod 7)$;
- ако $5x - 3 \equiv 6(\mod 7)$, то $5x \equiv 9 \equiv 30(\mod 7)$, $x \equiv 6(\mod 7)$;
- ако $x - 7 \equiv 6(\mod 7)$, то $x \equiv 6(\mod 7)$.

Ще покажем, че всяко друго трицифрено число може да се получи. Достатъчно е да покажем, че всяко от числата от 994 до 999 може да се получи, понеже всяко трицифрено число, което не дава остатък 6 при деление на 7, може да се получи от тези с многократно прилагане на последното правило. И така: $\boxed{999} \leftarrow 1006 \leftarrow 1013 \leftarrow 337 \leftarrow 68 \leftarrow 22 \leftarrow 5 \leftarrow 1$; $\boxed{998} \leftarrow 332 \leftarrow 67 \leftarrow 14 \leftarrow 4 \leftarrow 11 \leftarrow 3 \leftarrow 10 \leftarrow 17 \leftarrow 5 \leftarrow 1$; $\boxed{997} \leftarrow 200 \leftarrow 66 \leftarrow 73 \leftarrow 80 \leftarrow 26 \leftarrow 8 \leftarrow 2 \leftarrow 1$; $\boxed{996} \leftarrow 1003 \leftarrow 1010 \leftarrow 336 \leftarrow 343 \leftarrow 350 \leftarrow 116 \leftarrow 38 \leftarrow 12 \leftarrow 3 \leftarrow 10 \leftarrow 17 \leftarrow 5 \leftarrow 1$; $\boxed{995} \leftarrow 331 \leftarrow 338 \leftarrow 112 \leftarrow 23 \leftarrow 7 \leftarrow 2 \leftarrow 1$. Трицифрените числа, които дават остатък 6 при деление на 7, са $(1000 - 104) : 7 = 128$.

Задача 4. Върху страната AB на равностранен триъгълник ABC е избрана точка M. Точка N е външна за $\triangle ABC$ и $\triangle AMN$ е равностранен. Правата AC пресича правата BN в точка D, а правата CM пресича правата AN в точка K. Да се намери $\sphericalangle ADK$.

Решение. Отговор: 60°**.** Имаме $\triangle CAM \cong \triangle BAN$ (две страни и ъгъл от 60°), откъдето $\sphericalangle ACK = \sphericalangle ABD$. Сега $\triangle CAK \cong \triangle BAD$ (два ъгъла и страна), откъдето $AD = AK$ и понеже $\sphericalangle DAK = 60^\circ$, то $\triangle ADK$ е равностранен.

Задача 5. Квадрат 31×31 е разбит на квадрати 3×3 и 5×5, както и на $n \geq 0$ квадрати с по-малък размер. Определете най-малката възможна стойност на n и видовете квадрати от по-малък размер при нея.

Решение. Номерираме редовете и записваме -2 в полетата от $3, 6, 9, \ldots, 30$ ред и 1 в останалите полета. Сборът на всички числа е 31, сборът в квадратите 3×3 и 5×5 се дели на 5, сборът в квадратите 2×2 е 4 или -2, а сборът в квадратите 1×1 е 1 или -2. Това сочи, че $n \geq 1$ и че равенство може да има само при 1 квадрат 1×1. Действително, да поставим 1 квадрат 1×1 в центъра; остатъка разрязваме на 4 правоъгълника 15×16, всеки от които се състои от два 15×3 и два 15×5, а те се режат на 3×3 и 5×5.

Задача 6. Всяка поредица от главни български букви ще наричаме дума. Ще казваме, че една дума е *кротка*, ако в нея не се среща РР (т.е. две съседни букви Р). Нека A е броят кротки думи с дължина 2014. Определете последната цифра на A.

Решение. Нека a_n е броят кротки думи с дължина n. Явно $a_1 = 30$ и $a_2 = 899$ (има $30.30 = 900$ комбинации, от които трябва да се махне РР). При $k > 2$ всяка кротка дума се състои от буква, различна от Р, следвани от кротка дума с $k-1$ букви, или от Р, следвана от не-Р, следвани от кротка дума с $k-2$ букви. Така $a_k = 29(a_{k-1} + a_{k-2})$. Оттук $a_3 \equiv 1 (\mod 10)$, $a_4 \equiv 0 (\mod 10)$, $a_5 \equiv 9 (\mod 10)$. Последните цифри на a_k зависят само от последните цифри на a_{k-1} и a_{k-2}) и понеже в редицата от последни цифри е 0, 9, 1, 0, 9, ... се срещат две поредни, които повтарят по-ранни две поредни, нататък редицата е периодична с период 3. От $2014 \equiv 1 (\mod 3)$ следва $a_{2014} \equiv 9 (\mod 10)$.

Задача 7. Да се докаже, че за произволни различни реални числа x, y и z числата $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ и $(x-y)(y-z)(z-x)$ са или едновременно положителни или едновременно отрицателни.

Решение. Нека $a = x - y$, $b = y - z$ и $c = z - x$. Имаме $a + b + c = 0$ (като $a, b, c \neq 0$) и искаме да докажем, че $a^5 + b^5 + c^5$ и abc имат един и същи знак.

Без ограничение нека $a \geq b \geq c$. Тогава $a > 0$, $c < 0$ и:

1. При $b > 0$, то $abc < 0$ и $a^5 + b^5 + c^5 < (a+b)^5 + c^5 = (-c)^5 + c^5 = 0$.
2. При $b < 0$ имаме $abc > 0$ и $a^5 + b^5 + c^5 > a^5 + (b+c)^5 = a^5 + (-a)^5 = 0$.

Задача 8. Да се намерят всички реални числа x и y, за които едновременно са изпълнени равенствата $x^2 + x = y^3 - y$ и $y^2 + y = x^3 - x$.

Решение. Отговор: $(0,0), (0,-1), (-1,0), (-1,-1), (2,2)$**.** Записваме двете равенства във вида: $x(x+1) = (y-1)y(y+1)$ и $y(y+1) = (x-1)x(x+1)$. Когато някое от x и y е равно на $0, 1$ или -1 се разглеждат директно и се получават решенията $(0,0), (0,-1), (-1,0), (-1,-1)$.

В противен случай (когато $x, y \neq 0, 1, -1$) намираме $(x-1)(y-1) = 1$, откъдето $y = \dfrac{x}{x-1}$ и $y + 1 = \frac{2x-1}{x-1}$. След заместване в $y(y+1) = (x-1)x(x+1)$ получаваме $x^4 - 2x^3 = 0$, откъдето $x = 2$. Оттук $y = 2$.

Четвърти кръг, 10 – 12 клас

Задача 1. Да се намерят всички двойки естествени числа (m, n), за които $m|2^{\varphi(n)}+1$ и $n|2^{\varphi(m)}+1$.

Решение. Очевидно m и n са нечетни. Да предположим, че никое от тях не е равно на 1 и да означим $\varphi(m) = 2^{m_0}m_1$ и $\varphi(n) = 2^{n_0}n_1$, където m_0 и n_0 са цели неотрицателни числа, а m_1 и n_1 са нечетни естествени числа. Без ограничение на общността можем да считаме, че $m_0 \geq n_0$.

Нека $k = 2^{k_0}k_1$ е показателят на 2 по модул n (тук k_0 е цяло неотрицателно число, а k_1 е нечетно естествено число. От $k|\varphi(n)$ следва, че $k_0 \leq n_0$. От $2^{\varphi(m)} \equiv -1 \pmod{n}$ следва, че $2^{2\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{n}$ и значи $k|2\varphi(m)$, т.е. $2^{k_0}k_1|2^{m_0+1}m_1$. Освен това n не дели $2^{\varphi(m)}-1$ и следователно k не дели $\varphi(m)$, т.е. $2^{k_0}k_1$ не дели $2^{m_0}m_1$. Това може да се случи само ако $k_0 = m_0 + 1$.

Получихме $m_0 \geq n_0 \geq k_0 = m_0 + 1$, противоречие. Следователно поне едно от числата m и n е равно на 1 и вече лесно получаваме решенията $(1, 1)$, $(1, 3)$ и $(3, 1)$.

Задача 2. Съществува ли естествено число n, за което $n.2^{2^{2014}} - 81 - n$ е точен квадрат?

Решение. Отговор: Да. За всяко $k \in N$ имаме $A = 3\prod_{l=1}^{k-1}(2^{2^l}+1)$, където числата $2^{2^i}+1$ за $1 \leq i \leq k-1$ са две по две взаимнопрости (Защо?). Тогава от Китайската теорема за остатъците съществува естетвено число c, за което $c \equiv 2^{2^{l-1}} \pmod{2^{2^l}+1}$, $l \in [1, k-1]$. Следователно $c^2+1 \equiv 2^{2^l}+1 \equiv 0 \pmod{2^{2^l}+1}$ и A дели $3(c^2+1)$ и значи A дели $81c^2+81$. Тогава $81c^2+81 = nA$, или $(9c)^2 = nA - 81$, с което търсеният отговор е „Да“.

Задача 3. Всяка поредица от главни български букви ще наричаме дума. Ще казваме, че една дума е *кротка*, ако в нея не се среща РР (т.е. две съседни букви Р). Запишете в явен вид функцията $f(n)$, чиято стойност е броят кротки думи с дължина n.

Решение. Явно $f(0) = 1$ и $f(1) = 30$ (и $f(2) = 899$: наистина има $30.30 = 900$ комбинации, от които трябва да се махне РР). При $k > 2$ всяка кротка дума се състои от буква, различна от Р, следвани от кротка дума с $k-1$ букви, или от Р, следвана от не-Р, следвани от кротка дума с $k-2$ букви. Така $f(k) = 29(f(k-1)+f(k-2))$. Характеристичното уравнение на полученото хомогенно уравнение е $z^2 - 29z - 29 = 0$, чиито корени са $z_{1,2} = \dfrac{29 \pm \sqrt{957}}{2}$, така че търсим $f(n) = Az_1^n + Bz_2^n$. Понеже $f(0) = 1 = A + B$, $B = 1 - A$, $f(1) = 30 = Az_1 + (1-A)z_2 = A\sqrt{957} + \dfrac{29-\sqrt{957}}{2}$, получаваме $A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{31}{2\sqrt{957}}$, $B = \dfrac{1}{2} - \dfrac{31}{2\sqrt{957}}$. Остава да заместим $z_{1,2}$, A и B в $f(n)$.

Задача 4. Даден е правоъгълен триъгълник ABC, ($\sphericalangle ACB = 90^\circ$). Точките P и Q върху страната BC и точките R и S върху страната CA са такива, че $\sphericalangle BAP = \sphericalangle PAQ = \sphericalangle QAC$ и $\sphericalangle ABS = \sphericalangle SBR = \sphericalangle RBC$. Ака T е пресечната точка на AP и BS, да се докаже, че $120^\circ < \sphericalangle RTB < 150^\circ$.

Решение. Нека $\sphericalangle BAP = \alpha$, $\sphericalangle ABS = \beta$ и $AQ \cap BR = H$. Тогава $\alpha + \beta = 30^\circ$ и T е център на вписаната окръжност за $\triangle ABH$. Тогава $\sphericalangle AHB = 180^\circ - 2(\alpha+\beta) = 120^\circ$ и HT е ъглополовяща на $\sphericalangle AHB$. Следователно $\sphericalangle RHT = \sphericalangle AHT = \sphericalangle THB = \sphericalangle BHQ = 60^\circ$, откъдето $\triangle ARH \cong \triangle ATH$ и $\triangle BQH \cong \triangle BTH$ и $\sphericalangle RTH = 30^\circ$. Получаваме

$$\sphericalangle RTB = \sphericalangle RTH + \sphericalangle HTB = 30^\circ + \sphericalangle HQB = 30^\circ + \sphericalangle 90^\circ + \alpha = 120^\circ + \alpha.$$

Тъй като $0 < \alpha < 30^\circ$, получаваме $120^\circ < \sphericalangle RTB < 150^\circ$.

Задача 5. Реалната функция f е дефинирана за всяко реално x и $f(0) = 0$. При това $f(9+x) = f(9-x)$ и $f(x-10) = f(-x-10)$ за всяко реално x. Колко най-малко нули може да има f в интервала $[0; 2014]$? Променя ли се отговорът на този въпрос, ако се постави изискване f да бъде непрекъсната?

Решение. Според дадените условия $f(18) = f(9+9) = f(9-9) = f(0) = 0$; също за всяко реално x имаме $f(x) = f(9+(x-9)) = f(9-(x-9)) = f(18-x) = f((28-x)-10) = f((x-28)-10) = f(x-38)$. И така, 38 е период на функцията, следователно за всяко цяло k е в сила $f(38k) = 0$ (в дадения интервал има 54 такива числа) и $f(18+38k) = 0$ (в дадения интервал има 53 такива числа). Можем да построим непрекъсната функция, която в $[0; 2014]$ има само тези $54+53 = 107$ числа за нули: $f(x) = x$ за $x \in [-10; 9]$, $f(x) = 18-x$ за $x \in [9; 28]$ и по-нататък f се продължава 38-периодично. И така, отговорът е 107 и не зависи от изискването f да е непрекъсната (впрочем не е трудно f да бъде направена дори аналитична).

Задача 6. Вярно ли е, че за всяко естествено число n съществува кръг, който съдържа точно n точки с целочислени координати?

Решение. Отговор: Да. Да разгледаме кръг с център $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ и радиус r, менящ се от 0 до ∞. Понеже за всяка стойност на r окръжността на този кръг съдържа не повече от една целочислена точка, то когато r расте, броят на целочислените точки в кръга ще нараства с по една на всяка стъпка, описвайки всички неотрицателни цели числа.

Задача 7. На международна конференция има 4 официални езика. Всеки двама от участниците могат да говорят на един от тях. Докажете, че поне 60% от участниците говорят на един и същи език.

Решение. Ако има участник, който говори само на един от езиците, то твърдението е очевидно. Нека с X означим множеството на участниците, които говорят точно на два от езиците, а с Y озничим множеството на останалите. С A, B, C и D да означим множествата от участници, които говорят отделните езици. Ясно е, че сеченията AB и CD; AC и BD; AD и BC нямат общи елементи. Имаме освен това:

$$(*)|A| + |B| + |C| + |D| \geq 3|Y| + 2|X|.$$

Без ограничение можем да приемем, че $X = AB + AC + BC$, или $X = AB + AC + AD$. Ако например $|D| \leq |Y|$, то от (*) получаваме $|A| + |B| + |C| \geq 2|Y| + 2|X| = 2n$, където с n сме означили броят на всички участници. Тогава $\max |A|, |B|, |C| \geq \frac{2}{3}n$. В противен случай ще следва, че например $|A| \geq |X| = n - |Y|$. Ако сега $|A| \geq 0,6n$, всичко е ясно. Ако $|A| < 0,6n$, то $|Y| \geq 0,4n$ и от (*) ще получим

$$|A| + |B| + |C| + |D| \geq 3 + 2|X| = 2n + |Y| \geq 2,4n.$$

Задача 8. Дадена е реална константа $c > 1$. За редицата $a_1, a_2, \dots$ имаме: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{mn} = a_m a_n$ и $a_{m+n} \leq c(a_m + a_n)$. Да се докаже, че $a_n = n$.

Решение. Ако $a_p = q > p$, за някое p, имаме $a_{p^k}) = q^k$, $k > 0$. От друга страна имаме $a_n < cn$ и при $n = p^k$ ще получим $q^k \leq cp^k$, или $(q/p)^k < 1$ за всяко k, което е невъзможно. Следователно имаме $a_n \leq n$ за всяко n. Нека сега $a_p = q < p$ за някое p и нека p е най-малкото възможно такова. Но поради мултипликативното свойство лесно се вижда, че p трябва да е нечетно просто число. Можем да изберем k толкова голямо, че $q^k < 1/cp^k - 1$. Да изберем $n = p^k$ и m такова, че $2^m \equiv 1 \pmod{n}$. Нека $2^m = nt + 1$. Тогава $2^m = a_{2^m} = a_{nt+1} \leq c(a_n t + 1) = c(a_n a_t + 1) \leq c(t a_n + 1) < c(t1/cn - t + 1) \leq tn = 2^m - 1$, което е противоречие.

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Финал, 6 – 7 клас
6 Септември, 2014 г., Созопол

Задача 1. Точката M е среда на страната AB на триъгълника ABC, а точката N е среда на CM. Продължението на AN пресича BC в точка P. Да се намери отношението $\dfrac{CP}{PB}$.

Решение. Отговор: $\dfrac{1}{2}$. Тъй като $S_{AMN} = S_{ACN} = S_{BMN} = \dfrac{1}{4}S_{ABC}$, то при $S_{NPC} = x$ и $S_{NPB} = y$ имаме $\dfrac{x}{S_{ANC}} = \dfrac{y}{S_{ABN}} = \dfrac{PN}{NA}$. От $S_{ABN} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$ сега намираме $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$ и следователно $\dfrac{CP}{PB} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$.

Задача 2. Произведението на три прости числа е n. След прибавяне на 1 към всяко от числата, произведението на трите получени числа става $n + 963$. Да се намери n.

Решение. Отговор: 2013. От условието имаме, че $p \leq q \leq r$ са прости числа, $n = pqr$ и

$$(p + 1)(q + 1)(r + 1) = pqr + 963.$$

След разкриване на скобите получаваме

$$pq + qr + rp + p + q + r = 962.$$

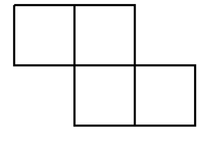
Ако $p \geq 19$ ще получим $pq + qr + rp + p + q + r \geq 3.19^2 + 3.19 > 962$. Следователно $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13$ или 17. При $p = 2$ имаме $qr + 3q + 3r = 960$ и q и r трябва да са четни (директно се вижда, че ако и двете са нечетни или едното е четно, а другото нечетно, то лявата страна е нечетно число). Тогава $q = r = 2$, което е невъзможно.

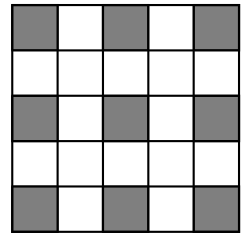
При $p = 3$ получаваме $qr + 4q + 4r = 959$, което се записва като $(q + 4)(r + 4) = 975 = 3.5^2.13$ и след разглеждане на възможностите за $q + 4$ и $r + 4$, получаваме единствено решение $q = 11$, $r = 61$.

Случаите $p = 5, 7, 11, 13$ не дават решения (това може да се направи или с директно разглеждане на всеки от тези случаи, или разглеждане на $pq + qr + rp + p + q + r = 962$ по модул 3 и доказване, че това равенство няма решение при което всяко от числата p, q и r не се дели на 3).

Следователно $n = 3.11.61 = 2013$.

Задача 3. Квадрат 5×5 е разделен на 25 единични квадратчета. Искаме да покрием всички 25 единични квадратчета с фигурки от дадения вид, като всяка фигурка може да се завърта, преобръща, да се припокрива с друга фигурка или да излиза извън квадрата 5×5 (при условие, че покритите единични квадратчета са 1, 2 или 3). Колко най-малко фигурки са необходими за покриване на целия квадрат?





Решение. Отговор: 9. Разглеждаме деветте клетки, както е показано на фигурата. Фигура от дадения вид покрива най-много една от разглежданите 9 клетки. Следователно за покриване на дадените 9 клетки са ни необходими поне 9 фигурки. Лесно се конструира покритие на целия квадрат с 9 фигурки.

Задача 4. Иван разделил 756 ябълки по равно между себе си и приятелите си. Трима от неговите приятели не били много гладни и му върнали цяло число ябълки равни на точно по $\dfrac{1}{4}$ от техните ябълки. Иван изял неговите ябълки както и тези, които получил от тримата си приятели. Ако е известно, че Иван е изял поне 150 ябълки, колко точно ябълки е изял той?

Решение. Отговор: 189. Нека Иван е разделил ябълките на x равни части, като $x \geq 4$ (понеже Иван има поне трима приятели). Тогава всеки е получил по $\dfrac{756}{x}$ ябълки. Понеже $756 = 2^2.3^3.7$ и броят на ябълките на всеки се дели на 4, то x трябва да е делител на $3^3.7$. Ябълките, изядени от Иван са:

$$\frac{756}{x} + 3.\frac{1}{4}\frac{756}{x} = \frac{7}{4}.\frac{756}{x} = \frac{3^3.7^2}{x}.$$

Понеже $\dfrac{3^3.7^2}{x} \geq 150$, то $x \leq \dfrac{3^3.7^2}{150} < 9$. Единствения делител на $3^3.7$, който е по-голям от 4 и по-малък от 9 е 7. Следователно Иван е изял $\frac{3^3.7^2}{7} = 189$ ябълки.

Задача 5. В турнир по тенис участвали 78 човека, всеки двама на различна възраст. Общо били изиграни 310 мача, като всеки двама са изиграли не повече от един мач. Докажете, че могат да се намерят четири човека, сред които или най-възрастният, или най-младият е победил останалите трима.

Решение. Да допуснем, че нама такава четворка.

Да подредим тенисистите според възрастта им, като първи е най-младият. Първият (както и 78-ят) не може да има повече от 2 победи. Вторият (както и 77-ят) не може да има повече от 3 победи. Всички останали имат най-много 4 победи (защото ако някой има 5 победи, той е победил или трима по-възрастни, или трима по-млади от него). Общо победите са най-много $2.2 + 2.3 + 74.4 = 306$, противоречие.

Задача 6. Във всяка от клетките на квадрат 4×4 е записано по едно положително число. Произведението на числата във всеки ред, всеки стълб и в двата диагонала е едно и също число. Кое може да е числото в квадратчето, означено със $*$?

$\frac{1}{2}$	32		
	2	8	2
4	1		
		$\star$	16

Решение. Отговор: $\frac{1}{4}$. Произведението на числата във втория и четвъртия ред е равно на произведението на числата в първия и втория стълб. След съкращаване на общите числа (които са положителни и следователно не са нули), получаваме:

$$2.8.2.16.\star = \frac{1}{2}.4.32.2.1.$$

Следователно $\star = \frac{1}{4}$.

Задача 7. По колко начина числото 10000 може да се представи като сбор на няколко (поне две) последователни числа?

Решение. Отговор: 4.

Задача 8. Колко решения в цели числа има уравнението

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2014}?$$

Решение. Уравнението е равносилно с

$$(m - 2104)(n - 2014) = 2014^2$$

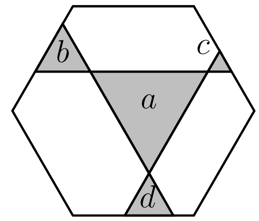
при изискването $m, n \neq 0$. Всяко решение се поражда от цял делител на $2014^2 = 2^2 19^2 53^2$, като делителят -2014 нарушава дефиниционното изискване. Броят на останалите делители е

$$2(2 + 1)(2 + 1)(2 + 1) - 1 = 53.$$

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Финал, 8 – 9 клас
6 Септември, 2013 г., Созопол



Задача 1. Правилен шестоъгълник е разделен на седем части (три шестоъгълника и четири равностранни триъгълника) с прави, успоредни на страните му както е показано на чертежа. Страните на равностранните триъгълници са съответно a, b, c и d. Да се намери страната на шестоъгълника.

Решение. Отговор: $\dfrac{2a+b+c+d}{3}$**.** Ако a е страната на вътрешния триъгълник, то $\dfrac{2a+b+c+d}{3}$.

Задача 2. Страните BC и AD на четириъгълник $ABCD$ са успоредни, а диагоналите се пресичат в точка O. Ако $CD = AO$, $BC = OD$ и CA е ъглополовяща на ъгъл BCD. Да се намери ъгъл ABC.

Решение. Отговор: $126°$**.** От $BC \parallel AD$ следва $\sphericalangle BCO = \sphericalangle CAD$, откъдето $\triangle ACD$ е равнобедрен. Следователно $AO = CD = AD$ и $\triangle AOD$ е също равнобедрен. Тогава $\sphericalangle ADO = \sphericalangle AOD$ и отново от $BC \parallel AD$ намираме $\sphericalangle CBO = \sphericalangle COB$ и значи $CB = CO$. Тогава $DO = OC = BC$ и $\triangle COD$ е равнобедрен. Ако $\sphericalangle BCO = \alpha$, то $\sphericalangle CBO = \sphericalangle COB = 2\ \sphericalangle OCD = 2\alpha$ и от $\triangle COB$ намираме $\alpha = 36°$. Тогава $\triangle BCD$ е равнобедрен и $AD = CD = BD$, т.е. $\triangle ABD$ е равнобедрен. Тогава $\sphericalangle ABD = \frac{180°-72°}{2} = 54°$, откъдето $\sphericalangle ABC = 54° + 72° = 126°$.

Задача 3. На конференция присъстват $n > 3$ делегати, като поне двама от тях се познават. Известно е, че ако двама от тях имат равен брой познати, то те нямат общ познат. Да се докаже, че някой от делегатите има точно един познат.

Решение. Нека A е делегатът с най-много познати $B_1, B_2, \ldots, B_k$ и B_i за $1 \le i \le k$ познава $n_i > 1$ делегати. Ако $k = 1$, то задачата е решена и нека сега $k \ge 2$. Всеки двама от $B_1, B_2, \ldots, B_k$ имат общ познат A и от условието следва, че числата $n_1, n_2, \ldots, n_k$ са две по две различни. От друга страна, от избора на A следва, че всяко от тях е в интервала $[1, k]$, т.е. това са точно числата $1, 2, \ldots, k$ в някакъв ред. Следователно $n_i = 1$ за някое i, с което задачата е решена.

Задача 4. Да се намери най-малкото естествено число n със следното свойство: Сборът от цифрите на n се дели на 101 и сборът от цифрите на $n+1$ също се дели на 101.

Решение. Да означим с $S(m)$ сорът от цифрите на естественото число m. Ако последната цифра на n не е 9, то $S(n+1) = S(n) + 1$ и не е възможно и двете числа да се делят на 101. Ако n се състои само от деветки, то $S(n+1) = 1$ и не се дели на 101. Следователно

$$n = a_1a_2 \ldots a_k 99 \ldots 9,$$

където $a_k \neq 9$ и броят на деветките е t. Ако $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$, то $S(n) = s + 9t$ и $S(n+1) = s + 1$. Тогава $S(n) - S(n+1) = 9t - 1$ се дели на 101, т.е. $9t = 101.p + 1$ и директно се проверява, че най-малкото p, за което $101.p+1$ се дели на 9 е $p=4$. Тогава $t=45$. От друга страна, най-малкото число s, за което $s+1$ се дели на 101 е $s=100$. Най-малкото число $a_1a_2\dots a_k$, за което $s=a_1+a_2+\dots+a_k=100$ и $a_k\neq 9$ е $2\underbrace{99\dots9}_{10}8$.

Търсеното число е:

$$2\underbrace{99\dots9}_{10}8\underbrace{99\dots9}_{45}.$$

Задача 5. За естественото число n с $F(n)$ означаваме произведението на всички положителни делители на n. (Например $F(42)=1.2.3.6.7.14.21.42$.) Да се намери най-малкото естествено число k, за което съществува n, за което $F(n)=2014n^k$.

Решение. Отговор: 3. Имаме

$$F(2014)=F(2.13.79)=1.2.13.79.(2.13).(2.79).(13.79).(2.13.79)=2^4.13^4.79^4=2014^4,$$

което означава, че $F(2014)=2014.2014^3$. Следователно $k\le 3$.

Да допуснем, че за $k=1$ или 2 съществува n, за което $F(n)=2014n^k=2.13.79.n^k$. Тогава 2, 13 и 79 са делители на n и нека 2^α е най-високата степен на 2, която дели n. Степента на 2 в $F(n)=2014.n^k$ е $1+k\alpha$. Числата 2^α, 13.2^α, 79.2^α и $13.79.2^\alpha$ са делители на n. Следователно $F(n)$ се дели на $2^{4\alpha}$, което означава, че $4\alpha\le 1+k\alpha$, т.е. $(4-k)\alpha\le 1$.

Задача 6. Колко пъти се среща цифрата 5 в числото:

$$1+10+19+28+37+\dots+10^{2014}?$$

Решение. В сбора $1+10+\dots+10^n$ имаме $\frac{10^n-1}{9}+1$ събираеми. Тогава

$$1+10+\dots+10^n=\left(\frac{10^n-1}{9}+1\right)\frac{10^n+1}{2}.$$

Тъй като $\frac{10^n-1}{9}+1=\underbrace{11\dots1}_{n-1}2$, то $\dfrac{\frac{10^n-1}{9}+1}{2}=\underbrace{55\dots5}_{n-2}6$ е число с $n-2$ цифри 5 и една цифра 6. Трябва да намерим броя на цифрите 5 в числото $\underbrace{55\dots5}_{n-2}6(10^n+1)$. Понеже последните n цифри на числото $\underbrace{55\dots5}_{n-2}6.10^n$ са нули, то търсеното число е

$$\underbrace{55\dots5}_{n-2}60\underbrace{55\dots5}_{n-2}6$$

и петиците са $2.(n-2)$. При $n=2014$ получаваме 4024.

Задача 7. Едно число n ще наричаме *квадратно*, ако съществуват цели числа $a<b<c$, за които $a^2+b^2-c^2=n$. Да се намери броя на квадратните числа n, за които $1\le n\le 2014$.

Решение. Отговор: 2014. От равенството $(3n+2)^2+(4n)^2-(5n+1)^2=2n+3$ следва, че всяко нечетно число ≥ 9 (при $n=-1,0,2$ не е изпълнено условието $a<b<c$) е квадратно. тъй като $1=4^2+7^2-8^2$, $3=4^2+6^2-7^2$, $5=4^2+5^2-6^2$ и $7=10^2+14^2-17^2$, то всяко нечетно число е квадратно.

От $(3n)^2+(4n-1)^2-(5n-1)^2=2n$ следва, че всяко четно число ≥ 4 (при $n=1$ имаме $a=b$) е квадратно. Понеже $2=5^2+11^2-12^2$, то всички четни числа са квадратни.

Задача 8. Редицата от цели числа $a_1, a_2, \ldots$ е зададена с условията

$$a_{n+3} = 5a_{n+2}^6 - 4a_{n+1}^3 + a_n^2, \forall n \geq 1,$$

$\{a_1, a_2, a_3\} = \{2013, 2014, 2015\}$. Възможно ли е някой от членовете на редицата да бъде точна шеста степен на цяло число?

Решение. Отговор: Не!. Достатъчно е да докажем, че нито един член на редицата не е сравним с 0 или 1 по модул 7.

От зададените начални условия следва, че a_1, a_2 и a_3 имат исканото свойство. Да допуснем, че a_{n+2}, a_{n+1} и a_n също имат исканото свойство. Тогава $a_{n+2}^6 \equiv 1 \pmod 7$, $a_{n+1}^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$ и $a_n^2 \equiv 1, 2, 4 \pmod 7$, откъдето с директна проверка се установява, че $a_{n+3} \equiv 0, 1 \pmod 7$ е невъзможно.

Съюз на математиците в България

Пети български фестивал на младите математици

Финал, 10 – 12 клас
6 Септември, 2014 г., Созопол

Задача 1. Равнината е разделена на единични квадратчета, всяко от които е оцветено в черно или бяло. Известно е, че всеки правоъгълник 3×4 или 4×3 съдържа точно 8 бели квадратчета. По колко начина може да се направи това оцветяване?

Решение. Отговор: 6. Ще докажем, че всеки правоъгълник 3×1 или 1×3 съдържа точно едно черно квадратче. Да забележим, че поставяйки два правоъгълника 3×4 и 4×3, които имат общ квадрат 3×3 ще получим, че броят на черните квадратчета измежду A, B, C е равен на броя на черните квадратчета измежду D, E, F. Сега да допуснем, че имаме две съседни черни квадратчета E и F. Тогава във всяка от тройките A, B, C и тройката над нея има поне по две черни квадратчета, а във всяка от тройките под A, B, C и две над нея има поне по едно черно квадратче. Намерихме правоъгълник 4×3, в който има поне 6 черни квадратчета, противоречие. Ако D и F са черни, то същия 4×3 правоъгълник съдържа поне 5 черни квадратчета.

Ако над черно D има три бели, то в трите клетки до D няма черно и в правоъгълника 3×4, с долен десен ъгъл D ще има две черни съседни или през едно.

Това означава, че всеки правоъгълник 3×1 или 1×3 съдържа точно едно черно квадратче. Ако започнем от фиксиран правоъгълник 3×1 и едно негово черно квадратче, то лесно се вижда, че оцветяването може да се направи по два различни начина. Следователно търсените начини са 6.

Задача 2. Върху квадратен тричлен Поли може да извършва следните действия:

1. Смяна на местата на старшия и свободния коефициент;
2. Заместване на x с $x - m$, където m е произволно реално число.

Възможно ли е започвайки от $6x^2 + 2x + 1996$ тя да получи $25x^2 + 5x + 2014$ с краен брой прилагания на операции от горния вид?

Решение. Отговор: Не!. Разглеждаме квадратния тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$. При прилагане на разрешените операции $f(x)$ добива съответно вида $g_1(x) = cx^2 + bx + a$ или $g_2(x) = a(x - m)^2 + b(x - m) + c = ax^2 + (b - 2ma)x + am^2 - bm + c$. Да забележим, че дискриминантата на $f(x)$ е $D = b^2 - 4ac$, а тези на $g_1(x)$ и $g_2(x)$ съответно $D_1 = b^2 - 4ca = D$ и $D_2 = (b-2ma)^2 - 4a(am^2 - bm + c) = b^2 - 4ac = D$, т.е. тя остава инвариантна при дадените операции. Понеже дискриминантата на $6x^2 + 2x + 1996$ е -47900, а тази на $25x^2 + 5x + 2014$ е -201375, то отговорът на задачата е не.

Задача 3. Намерете най-малкото естествено число n, за което съществуват полиноми f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ с рационални коефициенти такива, че $x^2 + 7 = \sum_{i=1}^{n}(f_i(x))^2$.

Решение. Отговор: 5. Тъй като

$$x^2 + 7 = ((3x + 2)/6)^2 + ((3x - 8)/6)^2 + ((x - 2)/2)^2 + ((x + 4)/2)^2 + (1/3)^2,$$

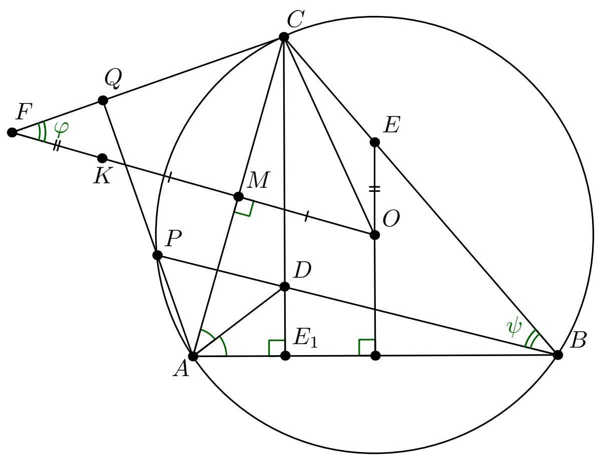
Задача 4. Нека A е множеството от пермутациите $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на $M = \{1, 2, \ldots, n\}$, със следното свойство: не съществува подмножество S на M такова, че $\alpha(S) = S$. За всяка такава пермутация α нека $d(\alpha) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - k)^2$. Да се намери най-малката стойност на $d(\alpha)$.

Решение. Отговор: $4n - 6$**.** Всяка пермутация може да се представи като произведение на независими цикли. Ако α е една от разглежданите пермутации, то α трябва да представлява само един цикъл (в противен случай елементите от един цикъл ще образуват множество S, за което $\alpha(S) = S$). Следователно:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(i) - i| = \sum_{i=1}^{n} |f_i(x) - f_{i+1}(x)| \geq 2n - 2.$$

Сега $\sum_{k=1}^{n}(f(k) - k)^2$ е минимална когато числата $f(k) - k$ (със сбор поне $2n - 2$) са почти равни. Това става при $n - 2$ числа равни на 2 и две числа, равни на 1. Търсеният минимум е $4n - 6$.

Задача 5. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ $(a > b)$. Точка D лежи на височината през C и на ъглополовящата през A. O е център на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. M е средата на AC. Нека K е симетричната на O относно точка M. Нека $E \in BC$ и $EO \perp AB$. $F \in MK$ е такава, че $FK = OE$ и K лежи между F и M. Нека BD пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност за втори път в P. Да се докаже, че $AP \perp CF$.



Решение. Нека $AP \cap CF = Q$. Достатъчно е да докажем, че $AMQF$ е вписан, т.е., че $\sphericalangle QFM = \sphericalangle QAM$, но $\sphericalangle QAM = \sphericalangle PBC \Rightarrow$ достатъчно е да докажем, че $\sphericalangle CFM = \sphericalangle CBD$. Нека $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle CFO = \varphi$, $\sphericalangle CBD = \psi$, $CO = R$. Ще докажем, че $\varphi = \psi$. Прилагаме синусови теореми за $\triangle ADC$ и $\triangle CBD$:

$$CD = b\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\sin(90^\circ - \beta + \psi)}{\sin\,\psi} = \frac{BC}{CD}$$

$$\frac{\cos(\beta - \psi)}{\sin\,\psi} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta} \Rightarrow \cos\beta\cot\psi + \sin\beta = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \cot\psi = \frac{\cos\alpha + 1 - \sin^2\beta}{\sin\beta\cos\beta}$$

От синусова теорема за $\triangle COE \Rightarrow EO = \frac{R\cos\alpha}{\cos\beta}$.
Имаме, че $OM = MK = R\cos\beta$.

$$\Rightarrow FM = R\cos\beta + \frac{R\cos\alpha}{\cos\beta}$$

$$\Rightarrow \cot\varphi = \frac{FM}{MC} = \frac{R(\cos\beta + \frac{\cos\alpha}{\cos\beta})}{R\sin\beta} =$$

$$= \frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\alpha}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{\cos^2\beta + \cos\alpha}{\sin\beta\cos\beta} =$$

$$= \frac{\cos\alpha + 1 - \sin^2\beta}{\sin\beta\cos\beta} = \cot\psi$$

$$\Rightarrow \cot\varphi = \cot\psi,\ 0^\circ \le \varphi \le 180^\circ,\ 0^\circ \le \psi \le 180^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = \psi,$$

което трябваше да докажем.

Задача 6. Разполагаме с 19 ъгълчета (квадрат 2×2 без едно единично квадратче) и неограничен брой квадрати 2×2. Да се намери най-голямото нечетно число n за което квадрат $n \times n$ може да бъде покрит с дадените фигури.

Решение. Отговор: 9. Ще докажем, че при покриване на квадрат $(2k-1) \times (2k-1)$ с ъгълчета и квадрати 2×2 са ни необходими поне $4k - 1$ ъгълчета.

Нека квадрат $(2k-1) \times (2k-1)$ е покрит с x ъгълчета и y квадрати 2×2. Тогава $3x + 4y = (2k-1)^2$. Да оцветим клетките (i, j) (това е клетката, която се намира в i-ия ред и j-ия стълб), за които i и j са нечетни числа. Имаме точно k^2 оцветени квадратчета и понеже всеки квадрат 2×2 покрива точно едно оцветено квадратче, а всяко ъгълче покрива най-много едно оцветено квадратче, то $x+y \ge k^2$. Тогава $y \ge k^2 - x$ и следователно

$$(2k-1)^2 = 3x + 4y \ge 3x + 4(k^2 - x) = 4k^2 - x,$$

откъдето $x \ge 4k - 1$. Ако допуснем, че $n \ge 11 = 2.6 - 1$, то за покриване на квадрат $n \times n$ ще са необходими поне $4.6 - 1 = 23$ ъгълчета, противоречие. Следователно $n \le 9$ и примерът показва, че $n = 9$.

Задача 7. Известно е, че всеки двама от 12-те състезатели, участващи на финала на математическите боеве, имат общ приятел измежду останалите 11 състезатели. Да се докаже, че има състезател, който има поне 5 приятели.

Решение. Да означим състезателите с $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$ и да допуснем, че всеки има не повече от 4 приятели. Ако A_1 има само един приятел (нека това е A_2), то A_1 и A_2 нямат общ приятел, противоречие.

Ако A_1 има двама приятели (нека това са A_2 и A_3), то общия приятел на A_1 и A_2 може да бъде само A_3 и следователно A_2 и A_3 са приятели. Тогава A_2 и A_3 имат още по най-много двама приятели измежду $A_4, \ldots, A_{12}$. Това означава, че някой от $A_4, \ldots, A_{12}$ (без ограничение нека това е A_4) не е познат с A_2 и A_3. Сега A_1 и A_4 нямат общ приятел, противоречие.

Ако A_1 има трима приятели, нека това са A_2, A_3 и A_4. Ако между A_2, A_3 и A_4 има само двама приятели (нека това са A_2 и A_3), то A_1 и A_4 нямат общ приятел, противоречие. Следователно измежду A_2, A_3 и A_4 има поне две двойки приятели. Всеки от A_2, A_3 и A_4 има най-много 4 приятели, общо най-много 12 приятели. Това означава, че приятелите на A_2, A_3 и A_4 измежду 8-те състезатели $A_5, \ldots, A_{12}$ са най-много $12 - 3 - 2.2 = 5$ (12 приятели без трите приятелства с A_1 и без двете двойки приятелства измежду A_2, A_3 и A_4, всяка от които се брой по два пъти). Следователно някой от $A_5, \ldots, A_{12}$ (нека това е A_5) не е приятел с A_2, A_3 и A_4 и тогава A_1 и A_5 нямат общ приятел.

От горното следва, че всеки има точно по четирима приятели.

Лема. Всеки състезател има четирима приятели, между които има две непресичащи се двойки приятели.

Доказателство. Достатъчно е да докажем лемата за A_1. Нека приятелите на A_1 са A_2, A_3, A_4 и A_5. Ако измежду A_2, A_3, A_4 и A_5 има три двойки приятели, то приятелите на

A_2, A_3, A_4 и A_5 измежду 7-те състезатели $A_6, \ldots, A_{12}$ са най-много $4.4 - 4 - 3.2 = 6$. Това означава, че измежду $A_6, \ldots, A_{12}$ има състезател (нека това е A_6), който не е приятел с A_2, A_3, A_4 и A_5 и тогава A_1 и A_6 нямат общ приятел. Следователно измежду A_2, A_3, A_4 и A_5 има най-много две двойки познати и понеже всеки от A_2, A_3, A_4 и A_5 трябва да има приятел от останалите трима, то без ограничение приятели са A_2 и A_3, както A_4 и $A_5 \diamond$.

Всеки от A_2, A_3, A_4 и A_5 има по двама приятели измежду $A_6, \ldots, A_{12}$ и всеки от $A_6, \ldots, A_{12}$ трябва да има приятел измежду A_2, A_3, A_4 и A_5. Тогава точно един от $A_6, \ldots, A_{12}$ (нека това е A_6) има двама приятели измежду A_2, A_3, A_4 и A_5. Ако A_6 е приятел с A_2 и A_3 съответно A_4 и A_5), получаваме противоречие с Лемата, приложена за A_2 (съответно A_4). Без ограничение можем да считаме, че приятелствата на A_2, A_3, A_4 и A_5 са: A_2 е приятел с A_6 и A_7; A_3 е приятел с A_8 и A_9; A_4 е приятел с A_9 и A_{10} и A_5 е приятел с $A_{11}6$ и A_{12}.

Общият приятел на A_4 и A_6 и на A_4 и A_7 може да бъда само A_{10}. Следователно A_{10} е приятел с A_6 и с A_7, което е противоречие с Лемата за A_6.

Задача 8. Няколко монети са разделени първо в 200 групи, а след това в 300 групи. Една монета е *специална*, ако при второто разделяне е била в група с по-малко монети отколкото при първото разделяне. Да се намери минималния брой специални монети.

Решение. Отговор: 101. Ако разделим 200.101 монети първо в 200 групи от по 101 монети, а след това една от тези групи разделим на 101 групи от по една монета, ще получим второ разделяне на 300 групи и ще имаме точно 101 специални монети.

Нека $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_{200}$ е броят на монетите при първото разделяне. Да допуснем, че при второто разделяне има 200 групи без специална монета и нека $y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_{200}$ е броят на монетите в тези групи. Тъй като

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{200} > y_1 + y_2 + \cdots + y_{200},$$

то съществува индекс j, за който

$$x_1 \le y_1, \ldots, x_{j-1} \le y_{j-1}, x_j > y_j.$$

Монетите от всяка група y_i за $1 \le i \le j$ не са специални и следователно при първото разделяне те са били в група с брой монети $\le y_i$. Но всички групи x_k за $k \ge j$ имат повече монети от всяка група y_i за $1 \le i \le j$. Следователно всички монети от $y_1, y_2, \ldots, y_j$ са измежду монетите от $x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}$. Тогава

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_j \le x_1 + x_2 + \cdots + x_{j-1},$$

което е противоречие с $x_1 \le y_1, \ldots, x_{j-1} \le y_{j-1}, y_j > 0$.

Получихме, че при второто разделяне има най-много 199 групи без специална монета, което означава, че има поне 101 групи с поне една специална монета във всяка група.