LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година

4. клас

1. Дадени са равностранен триъгълник и квадрат. Периметърът на триъгълника е $\boldsymbol{a}$ мм, а периметърът на квадрата е $\boldsymbol{b}$ см, където:

$\boldsymbol{a}$ е неизвестното число от равенството $(2011 - a).5 = 9360 : 9$, а

$\boldsymbol{b}$ е равно на $3700 - (2011 + 199.7)$.

Намерете дължините на страните на триъгълника и квадрата и ги сравнете. **7 точки**

2. Пътешественик изчислил, че за две години е изминал 1665 км с кола, което е 5 пъти по-малко от пътя, изминат със самолет и със 166 км повече от пътя, изминат с влак.

а) Колко километра е изминал пътешественикът общо за двете години? **3 точки**

б) Намерете по колко километра е изминал пътешественикът през всяка от двете години, ако през втората е изминал с 1499 км повече от първата година. **4 точки**

3. Три килограма ябълки струват колкото два килограма круши, а три килограма круши струват колкото един килограм череши.

а) Колко килограма ябълки могат да се купят с парите за два килограма череши? **3 точки**

б) Намерете цената на един килограм череши, ако 18 кг ябълки и 12 кг круши струват общо 16 лв. 56 ст. **4 точки**

LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година
5. клас

1. Намерете числото, което е с 20,11 по-малко от произведението на числата $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, където

$\boldsymbol{a} = 87,3\,.\,0,3 + 0,3\,.\,12,7$,

$\boldsymbol{b}$ е числото, за което е изпълнено равенството

$7,5 : b = 2,5\,.\,0,5 - 0,5$

и $\boldsymbol{c}$ е равно на най-голямата десетична дроб, която се записва с две цифри след десетичната запетая и е по-малка от 1,1. **7 точки**

2. Даден е правоъгълник $ABCD$ със страни AB = 24 м и BC = 14 м. Точка M е средата на страната AB, а точка N – средата на страната BC.

а) Намерете лицето на триъгълника DMN. **3 точки**

б) Ако разстоянието от средата P на страната CD до правата DN е равно на 3,36 м, намерете разстоянието от точка M до правата DN.

4 точки

3. Разстоянието между градовете A и B е 398,5 км. В 12 часа от град A за град B тръгнала лека кола със скорост 75 км/ч. Когато колата била изминала 30 км, от град B за град A тръгнал камион. Колата и камионът се срещнали в 15 ч 36 мин. Намерете с каква скорост се е движил камионът, ако преди срещата колата е спирала 6 минути, за да зареди с бензин. **7 точки**

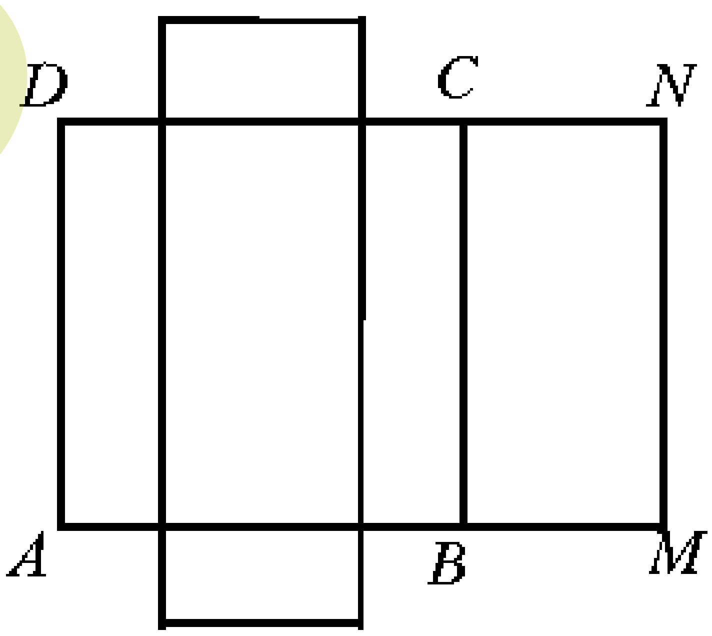
LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година

6. клас

1. Пресметнете стойността на израза $M=\left(-a^2.a^{-3}\right):b^{-1}-b^{-1}.b^0.\left(-a\right)^1$, където $a=\left|-0{,}1+0{,}01\right|-0{,}09:\left(-0{,}1\right)-\left(-3{,}7\right).0{,}03.\left(-90\right)$, а b е числото, за което е вярно равенството $\left(-\frac{7}{10}+1\frac{14}{15}-\frac{3}{10}\right):\left(-b\right)=-\frac{4}{9}+10:54$.

7 точки

2. На чертежа е дадена развивката на правоъгълен паралелепипед. Четириъгълникът $ABCD$ е квадрат с лице 144 cm^2, а периметърът на правоъгълника $AMND$ е 64 cm.



а) Намерете измеренията на паралелепипеда. **4 точки**

б) Определете с колко процента ще се измени обемът на паралелепипеда, ако едно от измеренията увеличим 6 пъти, а останалите две измерения намалим 2 пъти. **3 точки**

3. В правоъгълна координатна система с мерна единица 1 cm изобразете точките $A(x;\,x)$, $B(-x;\,x)$ и $C(-x;\,-x)$,

където $x=\frac{-6^4.18^4}{\left(-16\right)^2.81^3}-2$. Намерете координатите на точките, разстоянието от които до правата AB е 2 cm, а до правата BC е 3 cm. **7 точки**

LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година
7. клас

1. а) Решете уравнението $\frac{1}{7}\cdot\frac{7x+5}{2}-\frac{15x+24}{28}=\frac{3x-2}{4}-x$.

3 точки

б) Една бригада боядисала половината от определена площ за 2 часа и 30 минути. След това тя увеличила производителността си с 2 m^2 на час и боядисала останалата половина от площта за 2 часа и 20 минути. Намерете колко квадратни метра са били боядисани за първите 3 часа. **4 точки**

2. Точките M и N са средите съответно на страните CD и BC на правоъгълника $ABCD$.

а) Докажете, че $\measuredangle CDN = \measuredangle BAN$. **2 точки**

б) Ако P е пресечната точка на правите MB и DN, докажете, че $\measuredangle MAN = \measuredangle DPM$. **5 точки**

3. Дадени са уравненията $3ax-x=3a^2-a\left|4x(3a+x)-(3a+2x)^2\right|$ и $a(x+12)=-2x-24$, където a е параметър.

а) Решете уравненията. **3 точки**

б) Намерете стойностите на a, за които двете уравнения са еквивалентни. **4 точки**

LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година

8. клас

1. В правоъгълна координатна система Oxy са дадени точките $A(a;\,0)$ и $B(0;\,b)$, където $a=2\left(\sqrt{54}+\sqrt{1{,}5}\right)-\sqrt{150}+\left(1-\sqrt{6}\right)^2-\sqrt{(-2)^6}$,

$$b=\sqrt{2+\sqrt{3}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}.\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

а) Намерете линейната функция, чиято графика е правата AB

3 точки

б) Постройте вектора $\overrightarrow{OC}$, ако $\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}$ и докажете, че точка C лежи на правата AB. **4 точки**

2. Ъглополовящата на $\measuredangle ABD$ в успоредника $ABCD$ пресича диагонала AC в точка P, а страната AD – в точка M, като $AP : PC = 1 : 2$.

а) Докажете, че правите BP и BC са перпендикулярни.

3 точки

б) Ако N е средата на CD и $BN = 12$ cm, намерете дължините на диагонала AC и отсечката MN. **4 точки**

3. От съд с вместимост 50 литра, пълен догоре с чист спирт, отлели известно количество и го допълнили с вода. След това отлели два пъти по-голямо количество от първия път и отново допълнили с вода. Колко литра спирт са отлели първия път, ако накрая в съда е останал спиртен разтвор с концентрация 12%. **7 точки**

LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година
9. клас

1. Решете:

а) уравнението $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}=2$ **3 точки**

б) системата $\begin{vmatrix} x^2+6xy+2y^2-3x=0 \\ 2x^2+3xy-3y^2-4x=0 \end{vmatrix}$ **4 точки**

2. Даден е изразът $M=\sqrt{\frac{a+9}{3}-2\sqrt{a}}-\sqrt{3}$.

а) Опростете израза M. **3 точки**

б) Намерете числената стойност на M при $a=\frac{1}{9}\left(\frac{x_1}{x_2^{\,2}}+\frac{x_2}{x_1^{\,2}}\right)$, където x_1 и x_2 са корените на уравнението $3x^2-9x-2=0$.

4 точки

3. Дадено е уравнението $\frac{2\sqrt{2}a}{x-\sqrt{2}}-\frac{2a^2x+2x+4a}{x^2-2}+\frac{2}{x+\sqrt{2}}=-1$.

Намерете стойностите на реалния параметър a, за които:

а) корените на уравнението са реални противоположни числа.

3 точки

б) уравнението има единствен реален корен. **4 точки**

LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година

10. клас

1. а) Намерете най-малката и най-голямата стойност на функцията $y=-x^2+6x-4$ при $x\in[0;4]$. **3 точки**

б) Намерете за кои стойности на параметъра a най-малката стойност на функцията $f(x)=a\left(x^2-6x+4\right)^2-a\left(6x-x^2\right)-1$ при $x\in[0;4]$ е равна на -13. **4 точки**

2. Решете неравенството $\dfrac{\left(x^4-8\right)\left(x^2-2x-3\right)^{2010}}{\left(9-x^2\right)^{1009}.\left(2x-6\right)^{1001}}\le 0$ и проверете дали числото $a=\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{9}}-\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{72}+\sqrt[3]{96}+\sqrt[3]{128}\right)$ е негово решение.

7 точки

3. Нека $f(x)=x^2-2mx+8$, където m е реален параметър. Намерете стойностите на m, за които:

а) уравнението $f(x)=0$ има реални корени x_1 и x_2, за които $\left|x_1-x_2\right|\le 1$. **3 точки**

б) неравенството $f(x)\ge 0$ е изпълнено за всяко цяло число x.

4 точки

LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година

11. клас

1. Редицата $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ е геометрична прогресия, за която $a_7 = 8\left(\sqrt{2}-1\right)$ и $2a_3 + a_5 = 2$. Намерете:

а) първия член и частното на прогресията; **5 точки**

б) най-малкото n, за което е изпълнено неравенството $\left|a_n\right| \geq 64\left(\sqrt{2}-1\right)$. **2 точки**

2. Даден е триъгълник *ABC* с най-голяма страна *AB*, височина *CH* и медиана *CM*. Ако положителните числа *m*, *n*, и *s* са последователни членове на геометрична прогресия, а отсечките *AH*, *CH* и *BH* имат съответно дължини $\sqrt[3]{mns}$, $\sqrt{\dfrac{mn+ns+sm}{3}}$ и $\dfrac{1}{3}(m+n+s)$, да се докаже, че дължините на отсечките *AH*, *CM* и *BH* са последователни членове на аритметична прогресия. **7 точки**

3. а) За кои стойности на параметъра k уравнението $k = \dfrac{2^{x-1}+5}{2^x+6}$ има реални корени. **2 точки**

б) За кои положителни стойности на параметъра a множеството от стойностите на функцията $y = \dfrac{a^{x-1}+5}{a^x+3a}$ не съдържа нито едно четно число. **5 точки**

LX Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 12 февруари 2011 година
12. клас

1. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с диаметър AC. Намерете косинуса на $\measuredangle ABD$ и лицето на четириъгълника, ако $BC = 7$, $CD = 2$ и $AD = BD$. **7 точки**

2. От върховете B и C на куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ са спуснати перпендикуляри BM и CN към диагонала му AC_1 $\left(M \in AC_1, N \in AC_1\right)$.

а) Намерете отношението $AM : MN : NC_1$. **2 точки**

б) Ако правата BM пресича равнината $\left(ADD_1\right)$ в точка E, а правата CN пресича равнината $\left(A_1B_1C_1\right)$ в точка F, докажете, че правите EF и BC са перпендикулярни. **5 точки**

3. а) Намерете най-голямата и най-малката стойност на функцията $f\left(x\right)=\dfrac{1+\sin x}{2,25-\cos^2 x}$. **3 точки**

б) Намерете стойностите на реалния параметър a, за които системата $\begin{cases} ay^2-\left(a+2\right)y+a+1=0 \\ \left(2,25-\cos^2 x\right)y=1+\sin x \end{cases}$ има решение. **4 точки**