

Олимпиада „Ломоносов” - математика
Московский Държавен Университет – 2011 год.
заклучителен етап – 10-11 клас
Вариант 1

1. Имаме 2 влака, всеки от които с по 15 еднакви вагона. Влаковете се движат един срещу друг с постоянни скорости. Знае се, че 28 секунди след като първите им вагони се срещнали, Саша, който седи в 3 вагон на единия влак, се изравнил с Валери, който седи в другия влак, а след 32 секунди последните вагони на влаковете се разминали. В кой вагон седи Валери?

2. Намерете лицето на фигурата, зададена в правоъгълна координатна система с условията:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} + 2x \geq 0 \\ -x^2 - 1 \leq y \leq 2 + \sqrt{x} \end{cases}$$

3. Колко е възможно най-малкият радиус на кълбо, от което можем да изрежем правилна четириъгълна пирамида с дължина на основния ръб 14 и апотема 12?

4. Да се реши неравенството

$$\log_5(5x^2 + 2x) \log_5\left(5 + \frac{2}{x}\right) > \log_5 5x^2.$$

5. Две окръжности с различни радиуси се допират вътрешно в точка K . Хордата AB от голямата окръжност се допира до по-малката окръжност в точка L , като $AL = 10$.

Намерете BL , ако $\frac{AK}{BK} = \frac{2}{5}$.

6. За кои стойности на параметрите a, b и c множеството от реалните корени на уравнението $x^5 + 2x^4 + ax^2 + bx = c$ се състои точно от двете числа -1 и 1 ?

7. Какво минимално(еднакво) количество моливи трябва да сложим във всяка едно от 6 кутии така, че във всеки 4 кутии да има моливи от 26 предварително определени цвята? (Разполагаме с достатъчно много моливи!)

8. Функцията $f(t)$ е такава, че сумата от корените на уравнението $f(\sin x) = 0$ в

интервала $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ е равна на 33π , а сумата от корените на уравнението

$f(\cos x) = 0$ в интервала $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ е равна на 23π . Колко е сумата от корените на

второто уравнение в интервала $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$?