

60^{-та} НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 12.02.2011 г.
IV клас

1зад. Пресметнете $(A + B) - C$, ако:

A е числото, което има девет единици, седем десетици, седем хиляди и пет десетохиляди;

B е разликата между най-голямото и най-малкото четирицифрени числа, записани с различни цифри;

C е четно трицифрено число, което е по-голямо от 200 и по-малко от 300. Цифрата на единиците му е два пъти по-голяма от цифрата на стотиците, а сборът от цифрите му е 12.

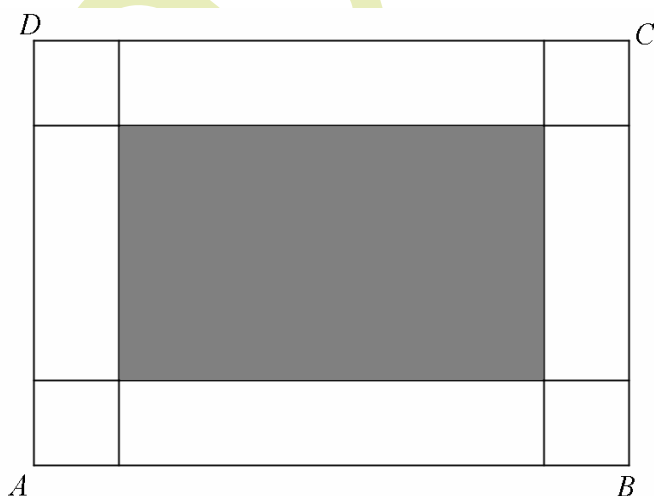
7 точки

2зад. Мечо Пух имал определена сума пари и решил да си купи четири вафли по 45 стотинки и три близалки по 32 стотинки. Когато отишъл в магазина, се отказал и си купил три морени и два шоколада и спестил 21 стотинки. Каква е цената на една морена и един шоколад, ако шоколадът е с 20 ст. по-скъп от морената?

7 точки

3зад. За правоъгълника $ABCD$ се знае, че едната му страна е с 2 см по-дълга от другата, а обиколката му е равна на 24 см. От правоъгълника са изрязани квадрати по показания на чертежа начин. Намерете сумата от обиколките на тези квадрати, ако произведението от дължината и ширината на оцветения правоъгълник е 15.

7 точки



60^{-та} НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 12.02.2011 г.

V клас

1зад. Намерете числената стойност на израза $M = 18,09 : a - b : 0,8 + c$, където:

(1) a е едно от числата 1,9; 4,5; 7,5, за което е вярно, че числото $0,2 \cdot a - 0,3$ е по-голямо от 0,5, но е по-малко от 1,1;

(2) b е стойността на неизвестното число от равенството:

$$2,55 : 0,05 - (18,7 - 13,2 : x) = 0,389 \cdot 100$$

(3) c е разликата (в см) на отсечките AB и CD , където $AB = 6,2$ дм, $CD = 11$ см и 5 мм

7 точки

2зад. Трапецът $ABCD$ ($AB > CD$) и успоредникът $DCMN$ имат обща страна CD . Трапецът $ABCD$ е правоъгълен с прави ъгли при върховете A и D , $AD = DC$ и $AB = 15,2$ см. За успоредника е известно, че $DC = 2MC$, височината NH (H е от CD) е 4 см, а обиколката му е 30 см. Намерете с колко лицето на трапеца е по-голямо от лицето на успоредника.

7 точки

3зад. Деница имала четири котенца. Един ден тя ги претеглила по две, като образувала всички възможни комбинации от тях. Получила следните тегла: 5,45 кг; 6,92 кг; 6,26 кг; 8,02 кг; 9,49 кг и 8,68 кг. Колко е общото тегло на котенцата в грамове?

7 точки

60^{-та} НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 12.02.2011 г.

VI клас

1зад. Дадени са изразите

$$a = 6,6 - \left(13\frac{6}{7} - 1,6\right) + \left(13\frac{6}{7} - 2,6\right) - 6\frac{3}{5},$$

$$b = -1\frac{1}{5} + 9,5 - \left(17\frac{6}{7} - \frac{1}{2}\right) - \left|-6 - 3\frac{2}{5}\right| + \left(-\frac{1}{7} + 18\right)$$

а) Сравнете $|a|$ и $|b|$ б) Пресметнете $\frac{a-b}{|a|+|b|}$

7 точки

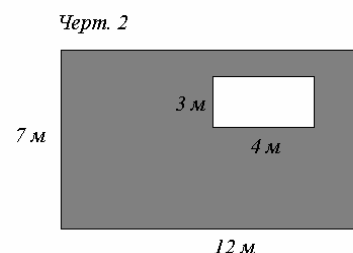
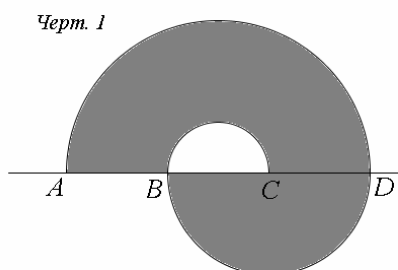
2зад. В едно училище $\frac{2}{3}$ от участниците в училищния кръг на олимпиадата по математика се класират за областния кръг, а $\frac{3}{8}$ от участниците в областния кръг са получили награди. Първа награда е присъдена на двама ученика, втора награда – на 15 ученика, и трета награда – 25 ученика.

а) Намерете броя на учениците, участвали в училищния кръг;

б) Ако броя на участниците в училищния кръг на олимпиадата по физика е 25% от броя на явилите се на училищния кръг по математика, намерете колко ученици са участвали и на двете олимпиади.

7 точки

3зад. В двора на Емил има басейн с формата на полукръг с диаметър $BC = 4$ м. Той е заобиколен от тревна площ, защрихована на чертеж 1, ограничена от полуокръжности и отсечката AB . Дължината на отсечките AB и CD са по 4 м. В двора на Сашо също има басейн – с правоъгълна форма с размери 3 м на 4 м, заобиколен от тревна площ с формата на правоъгълник с размери 7 м на 12 м, която е защрихована на чертеж 2. В кой двор тревата покрива по-голяма площ? 7 точки



60^{-та} НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 12.02.2011 г.
VII клас

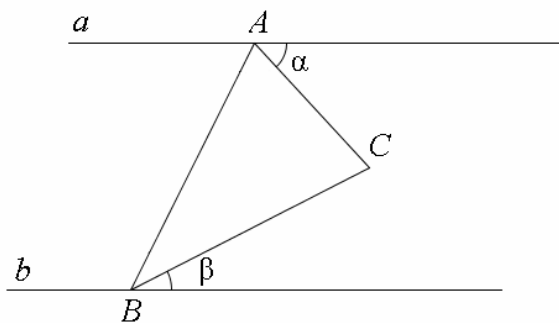
1зад. Опростете частното $\frac{x^2 - 81}{x^2 - ax - b}$, ако:

(1) коефициентът a е равен на мярката на ъгъла при върха А на триъгълник ABC , за който: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$ и външния ъгъл при върха С равен на 20° ;

(2) коефициентът b е равен на сбора от корените на уравнението $4 - 3|2y + 9| = -11$

7 точки

2зад. На чертежа правите a и b , построени през върховете А и В на триъгълника ABC , са успоредни. Ако $\alpha + \beta = 80^\circ$ и $\sphericalangle ABC : \sphericalangle BAC = 2 : 3$, намерете ъглите на триъгълника ABC .



7 точки

3зад. От град А за град В, разстоянието между които е 60 km, пътуват велосипедист и мотоциклетист. Скоростта на велосипедиста е 20 km/h, а на мотоциклетиста 2,5 пъти по-голяма от скоростта на велосипедиста. Мотоциклетистът тръгнал от град А след велосипедиста, но двамата пристигнали едновременно в В. На какво разстояние от А е бил велосипедистът в момента, в който е тръгнал мотоциклетистът? Колко време след тръгването на велосипедиста е тръгнал мотоциклетистът?

7 точки

60^{-та} НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 12.02.2011 г.
VIII клас

1зад. Графиките на функциите $f(x) = ax - b$, $a \neq 0$ и $g(x) = 5x - 13$ се пресичат в точка с абсциса равна на 3.

а) Ако графиката на $f(x)$ пресича ординатната ос в точка с ордината равна на (-4) , намерете стойностите на a и b ; **4 точки**

б) Начертайте графиката на функцията $f(x)$ при $a = 2$ и $b = 4$ и намерете лицето на триъгълника, получен при пресичането на графиката с координатните оси.

3 точки

2зад. Средите E и F съответно на страните BC и AD на успоредника $ABCD$ са съединени с върховете D и B .

а) Докажете, че FB и DE делят диагонала AC на три равни части. **4 точки**

б) Ако лицето на триъгълник ABM (M е пресечна точка на AC и FB) е 8 cm^2 намерете лицето на успоредника. **3 точки**

3зад. За уравнението $x^2 - (m^2 + m)x + (m + 1)^2(m - 1) = 0$

а) Докажете, че при m цяло и $m \neq \pm 1$ единият корен е делител на другия **3 точки**

б) Намерете корените на уравнението за стойност на $m = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ **4 точки**

60^{-та} НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 12.02.2011 г.
IX клас

1зад. а) Да се намерят стойностите на параметъра p , за които отношението на корените на квадратното уравнение $x^2 + px + 1 = 0$ е равно на 4.

3 точки

б) Да се реши уравнението $x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42$

4 точки

2зад. Диаметърът AD на описаната около $\triangle ABC$ окръжност пресича страната BC в точката P . PM и PN са перпендикулярни съответно на AB и AC . Да се докаже, че $MBCN$ е трапец.

7 точки

3зад. Ако работят заедно два багера свършват определена работа за 12 часа. Ако се подобри организацията и се намали времето, за което всеки поотделно може да извърши цялата работа, съответно първия – с 2 часа и втория – с 6 часа, то след като първия работи 6 часа, а вторият – 8 часа, те ще извършат $\frac{2}{3}$ от цялата работа. Да се намери за колко часа се е предвиждало всеки сам да свърши работата.

7 точки

60^{-та} НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 12.02.2011 г.
X клас

1зад. Дадена е функцията $f(x) = (k-1)x^2 - (k+4)x + 2k + 5$, където k е параметър.

а) Да се намерят стойностите на k , за които уравнението $f(x) = 0$ има реални корени. **4 точки**

б) Да се намерят стойностите на k , за които неравенството $f(x) > 0$ е изпълнено за всяко x . **3 точки**

2зад. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$ и $AB > CD$) е вписана полуокръжност с радиус $r = 12$ cm, така че центърът ѝ точката O лежи на AB . Намерете периметъра на трапеца, ако $OC = 13$ cm и $OD = 15$ cm.

7 точки

3зад. а) Докажете равенството:

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$$

3 точки

б) Решете неравенството:

$$\frac{1}{2^x - 1} < \frac{1}{1 - 2^{x-1}}$$

4 точки

Време за работа – 4 часа

Желаем Ви успех!

60^{-та} НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 12.02.2011 г.
XI клас

1зад. Четири числа имат следните свойства: първите три образуват геометрична прогресия, а последните три – аритметична прогресия. Сумата на крайните числа е 7, а на средните е 6. Намерете тези числа.

7 точки

2зад.

а) Ако $\alpha \in (0; \pi)$ намерете стойностите на α , за които корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2 - x \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 0$ удовлетворяват зависимостта $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$

б) За $\triangle ABC$ мярката на $\sphericalangle ACB$ е по-малката намерена стойност на α в а). Дължината на страна AC е равна на стойността на израза $M = -\log_2(\log_2 \sqrt[4]{2})$, а дължината на страна BC е равна на стойността на израза $N = (\frac{1}{2} \log_2 16 - 3 \log_2 \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \log_2 32 + 2 \log_2 \frac{1}{8}) \cdot \sqrt{2}$. Намерете лицето на $\triangle ABC$.

7 точки

3зад. Даден е равнобедрен триъгълник ABC със страна a . През точка M , лежаща на страната AB (M е между A и B), са прекарани успоредни прави на страните AC и BC . Правите пресичат AC и BC съответно в точки K и L . Ако $KL = d$, да се намери лицето на триъгълника KLM .

7 точки

60^{-та} НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 12.02.2011 г.
XII клас

1зад. Даден е равностранен триъгълник ABC със страна a . През точка M , лежаща на страната AB (M е между A и B), са прекарани успоредни прави на страните AC и BC . Правите пресичат AC и BC съответно в точки K и L . Ако $KL = d$, да се намери лицето на триъгълника KLM .

7 точки

2зад. Хипотенузата AB на правоъгълния триъгълник ABC лежи в равнината π , а катетите му AC и BC сключват с тази равнина съответно ъгли α и β . Да се определи ъгълът между равнината на триъгълника и равнината π .

7 точки

3зад. Дадена е функцията $f(x) = 2^{2\cos x} - 3a \cdot 2^{\cos x} + 2a^2$, където a е параметър.

а) Да се реши уравнението $f(x) = 0$ за $a = 1$.

б) За кои стойности на a уравнението $f(x) = 0$ има решение.

7 точки