ПМГ „Акад. Никола Обрешков“, гр. Бургас
Съюз на математиците в България

Втори български фестивал на младите математици

Втори кръг, 6-7 клас
20 Септември, 2011 г., Созопол

Задача 1. Числото 816239745 има следните свойства:

а) Всяка цифра от 1 до 9 включително се среща точно един път.

б) Ако изтрием цифрите $6, 7, 8, 9$ получаваме 12345.

в) Ако изтрием цифрите $7, 8, 9$ не получаваме 123456.

Колка са всички 9-цифрени числа, имащи свойствата а), б) и с)?

Задача 2. Намерете най-малкото естествено число x, за което съществуват две по две различни естествени числа a, b, c и d, изпълняващи равенствата:

$$x = ab + a - b = cd + c - d.$$

Задача 3. Едно подмножество на множеството $A = \{9, 10, \dots 63, 64\}$ ще наричаме *подходящо*, ако сборът на елементите му е 2011. Колко са подходящите подмножества на A?

Задача 4. Нека A е броят на n-цифрените числа, които се делят на 3, но не се делят на 10. Нека B е броят на n-цифрените числа, които се делят на 4. Да се определи кое от числата A и B е по-голямо.

Задача 5. В квадрат със страна 1 са поставени два еднакви равностранни триъгълника, които нямат обща вътрешна точка. Да се докаже, че височината на равностранния триъгълник не надминава дължината на половината от диагонала на квадрата.

Задача 6. Дадени са 2011 цели числа, които притежават следното свойство: което и от тях да премахнем, останалите 2010 числа могат да се разделят на две групи по 1005 числа с равни суми. Да се докаже, че всичките числа са равни помежду си.

Задача 7. Дадени са шест точки в равнината. Всички точки две по две са свързани с отсечки и всеки три отсечки правят триъгълник (така получаваме 15 отсечки и 20 триъгълници) . Всеки от получените триъгълници е с различни по дължина страни. Може ли една от дадените петнадесет отсечки да бъде едновременно най-къса страна в един от триъгълниците и най-дълга страна в друг от триъгълниците?

Задача 8. Даден е четириъгълник $ABCD$. Точките M и N са върху страната AB, като $AM = MN = NB$, а точките P и Q са върху страната CD, като $CP = PQ = QD$. Да се докаже, че

$$S_{ABCD} = 3S_{MNPQ}.$$

ПМГ „Акад. Никола Обрешков“ , гр. Бургас
Съюз на математиците в България

Втори български фестивал на младите математици

Втори кръг, 8-9 клас
20 Септември, 2011 г., Созопол

Задача 1. Да се намерят всички тройки естествени числа x, y, z, за които $2^x + 7^y = z^4$.

Задача 2. Да се докаже, че в n-ъгълник M могат да се прекарат най-много $n-3$ диагонала, всеки от които лежи изцяло в M и никои два диагонала не се пресичат.

Задача 3. В триъгълник ABC е вписана окръжност с център I, която допира страните CA и AB съответно в точките E и F. Ако BI пресича EF в точката K, да се докаже, че K лежи на правата през средите на страните BC и AC.

Задача 4. На два съседни острова има общо $n < 2011$ града, като всички са на морето. На всеки остров, всеки два града са свързани с автобусна линия, а всеки два града на различни острови са свързани с параходна линия. Броят на автобусните и параходните линии е еднакъв. Да се определи най-голямата възможна стойност на n.

Задача 5. Намерете всички прости числа p, за които съществуват цели числа x и y такива, че $p + 1 = 2x^2$ и $p^2 + 1 = 2y^2$.

Задача 6. В триъгълник ABC е вписана окръжност с център I, която допира страните BC, CA, AB съответно в точките D, E, F. Ако BI пресича EF в точката K, а AI пресича FD в точката L, да се докаже, че $\sphericalangle KCL = \sphericalangle EFD$.

Задача 7. Да се докаже, че за всеки три реални числа x, y и z е изпълнено неравенството

$$x^4 + y^4 + z^2 \geq \sqrt{8}xyz.$$

Да се намерят всички тройки (x, y, z), за които се достига равенство.

Задача 8. Да се намери най-малкото естествено число k, което може да се предстви във вида $k = 19^n - 5^m$ за някои естествени числа m и n.

ПМГ „Акад. Никола Обрешков“ , гр. Бургас
Съюз на математиците в България

Втори български фестивал на младите математици

Втори кръг, 10-12 клас
20 Септември, 2011 г., Созопол

Задача 1. В клетките на една квадратна таблица с размери $n \times n$ са записани в произволен ред числата $1, 2, \ldots, n$. Да се докаже, че съществуват две съседни клетки, за които разликата между числата, записани в тях, е не по-малка от n.

Задача 2. Дадени са реалните числа $0 < a < b \leq c < d$. Да се докаже неравенството:

$$\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}+\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}\right) \leq 1.$$

Кога се достига равенство?

Задача 3. В триъгълник ABC е вписана окръжност k, която допира страните BC, CA, AB съответно в точките D, E, F. Нека точката P е вътрешна за окръжността k. Ако правите DP, EP, FP пресичат k съответно в точките D', E', F', да се докаже, че правите AD', BE' и CF' се пресичат в една точка.

Задача 4. Да се докаже, че множеството $\{1, 2, \ldots, 12001\}$ може да се разбие на 5 групи така, че нито една от тях да не съдържа 11 членна аритметична прогресия.

Задача 5. Върховете на $\triangle ABC$ лежат върху графиката на функцията $f(x) = x^2$, а медицентърът му съвпада с точката $M(1, 7)$. Да се намери възможно най-голямата стойност на лицето на $\triangle ABC$.

Задача 6. В група от n човека всеки има по едно великденско яйце. Те разменят яйцата си по следния начин: при всяка смяна двама човека разменят яйцата си, които имат в момента. Всеки двама разменят яйцата си поне един път. След няколко такива смени се оказало, че всеки има същото яйце, което е имал в началото. Да се определи минималният възможен брой смени, ако а) $n = 5$; б) $n = 6$.

Задача 7. Вписаната в $\triangle ABC$ $(AC < BC)$ окръжност се допира до страните AC и BC съответно в точки X и Y. През средата M на AB е построена права, успоредна на XY, която пресича страната BC в точка N. Нека точката $L \in BC$ е такава, че $NL = AC$ и L е между C и N. Правите ML и AC се пресичат в точка K. Да се докаже, че $BN = CK$.

Задача 8. Нека S е множеството от всички 9-цифрени естествени числа, в чийто десетичен запис участват само цифрите 1, 2 и 3. Да се намерят всички функции $f : S \to \{1, 2, 3\}$, които притежават следните свойства:
(1) $f(111111111) = 1$, $f(222222222) = 2$, $f(333333333) = 3$, $f(122222222) = 1$;
(2) ако $x, y \in$ се различават във всеки разряд, то $f(x) \neq f(y)$.

Втори български фестивал на младите математици

Втори кръг, 6-7 клас, Кратки решения на задачите

Задача 1. Числото 816239745 има следните свойства:

а) Всяка цифра от 1 до 9 включително се среща точно един път.
б) Ако изтрием цифрите $6, 7, 8, 9$ получаваме 12345.
в) Ако изтрием цифрите $7, 8, 9$ не получаваме 123456.

Колка са всички 9-цифрени числа, имащи свойствата а), б) и с)?

Решение. Първо ще преброим числата, които удовлетворяват а) и б). За целта първо поставяме цифрите $6, 7, 8, 9$ на някои от 9-те позиции. За цифрата 6 има 9 възможности, след това за 7 имаме 8 възможности, за 8 – 7 възможности и накрая, за 9 – 6 възможности. Общо $9.8.7.6 = 3024$ възможности. Поради б) цифрите $, 2, 3, 4, 5$ е разполагат по едниствен начин в останалите пет позиции.

Трябва да извадим числата, които не удовлетворяват с), т.е. онези, за които след изтриване на $7, 8, 9$, получаваме 123456. Както по-горе първо фиксираме местата на 7, 8 и 9, това става по $9.8.7 = 504$ начина.

Окончателно, търсеният брой е $3024 - 504 = 2520$.

Задача 2. Намерете най-малкото естествено число x, за което съществуват две по две различни естествени числа a, b, c и d, изпълняващи равенствата:

$$x = ab + a - b = cd + c - d.$$

Решение. Записваме равенствата във вида $x-1 = (a-1)(b+1) = (c-1)(d+1)$. Директна проверка показва, че при $x - 1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ не получаваме решение, а при $x - 1 = 6$ имаме решението $a = 4, b = 1, c = 3, d = 2$. Следователно $x = 7$.

Задача 3. Едно подмножество на множеството $A = \{9, 10, \dots 63, 64\}$ ще наричаме *подходящо*, ако сборът на елементите му е 2011. Колко са подходящите подмножества на A?

Решение. Сборът на елементите на множеството A е $\dfrac{1}{2}65.64 - 36 = 2044$. Подходящите подмножества на A се получават, като се изключат елементи със сбор 33. Подмножествата със сбор 33 са с най-много 3 елемента и броят им е:

едно с един елемент, $\{33\}$,
9 с два елемента, $\{25, 8\}$, $\{24, 9\}$ и т.н. до $\{17, 16\}$;
7 с три елемента, $\{8, 9, 16\}, \{8, 10, 15\}, \{8, 11, 14\}, \{9, 10, 14\}, \{8, 12, 13\}, \{9, 11, 13\}, \{10, 11, 12\}$.
Следователно A има 17 подходящи подмножества.

Задача 4. Нека A е броят на n-цифрените числа, които се делят на 3, но не се делят на 10. Нека B е броят на n-цифрените числа, които се делят на 4. Да се определи кое от числата A и B е по-голямо.

Решение. Ще покажем, че $A = 270.10^{n-3}$ и $B = 225.10^{n-3}$, т.е. $A > B$. Първите отляво надясно $n-1$ цифри на n-цифрено число, което се дели на 3, но не се дели на 10, могат да бъдат избрани по произволен начин, т.е. по 9.10^{n-2} начина. Последната цифра не може да бъде 10 и за да се дели числото на 3, тя може да бъде избрана по 3 начина (тъй като във всяка от групите $1, 2, 3$; $4, 5, 6$; $7, 8, 9$ има по точно едно число, което дава даден остатък при деление на 3). Следователно $A = 9.10^{n-2}.3 = 270.10^{n-3}$.

Първите $n-2$ цифри на n-цифрено число могат да бъдат избрани по 9.10^{n-3}. За да се дели това число на 4, трябва числото, образувано от последните му две цифри да се дели на 4. Тъй като има точно 25 такива двуцифрени числа, то $B = 9.10^{n-3}.25 = 225.10^{n-3}$.

Задача 5. В квадрат със страна 1 са поставени два еднакви равностранни триъгълника, които нямат обща вътрешна точка. Да се докаже, че височината на равностранния триъгълник не надминава дължината на половината от диагонала на квадрата.

Решение. Ще докажем, че всеки равностранен триъгълник с височина по-голяма от половината диагонал на квадрата съдържа центъра на квадрата, като вътрешна точка. Допускаме, че това не е вярно. Построяваме равностранен триъгълник с височина по-голяма от половината диагонал на дадения квадрат и той да не съдържа центъра O на квадрата. През O построяваме права успоредна на една от страните на триъгълника, която не пресича триъгълника. Височината на триъгълника е по-малка от перпендикуляра h към правата през O успоредна на страната на триъгълника, а този перпендикуляр очевидно е по-къс от половината диагонал $\frac{d}{2}$. Така получаваме противоречие с допускането, че височината на триъгълника е по-дълга от $\frac{d}{2}$.

Задача 6. Дадени са 2011 цели числа, които притежават следното свойство: което и от тях да премахнем, останалите 2010 числа могат да се разделят на две групи по 1005 числа с равни суми. Да се докаже, че всичките числа са равни помежду си.

Решение. Нека дадените числа са $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_{2011}$. Като извадим a_1 от всички тези числа, получаваме числата $b_1 = a_1 - a_1 = 0$, $b_2 = a_2 - a_1, \ldots, b_{2011} = a_{2011} - a_1$. Лесно се съобразява, че получените числа също изпълняват условието на задачата. Сега, ако $S = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2011}$, от условието следва, че числата $S - b_1$, $S - b_2, \ldots S - b_{2011}$ са четни. Тогава всички числа $b_1, b_2, \ldots, b_{2011}$ са с еднаква четност (четността на S). Но $b_1 = 0$ е четно число и значи всички тези числа са четни. Като ги разделим на 2, получените числа отново изпълняват условието на задачата и отново първото от тях е равно на 0. Следователно и тези числа са четни. Отново ги делим на 2 и т.н. Този процес може да бъде безкраен, само ако $b_1 = b_2 = \cdots = b_{2011}$. Тогава $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2011}$, което и трябваше да се докаже.

Задача 7. Дадени са шест точки в равнината. Всички точки две по две са свързани с отсечки и всеки три отсечки правят триъгълник (така получаваме 15 отсечки и 20 триъгълници) . Всеки от получените триъгълници е с различни по дължина страни. Може ли една от дадените петнадесет отсечки да бъде едновременно най-къса страна в един от триъгълниците и най-дълга страна в друг от триъгълниците?

Решение. Нека всяка най-дълга страна в даден триъгълник да оцветим в червено. Останалите отсечки да са бели. Известна е задачата, че ако всеки две отсечки, свързващи шест точки в равнината, оцветим в един от два цвята, то съществува едноцветен триъгълник. Ако този триъгълник е червен, то една от страните му е най-малка. Триъгълникът не може да е бял, защото всеки триъгълник има най-голяма страна.

Задача 8. Даден е четириъгълник $ABCD$. Точките M и N са върху страната AB, като $AM = MN = NB$, а точките P и Q са върху страната CD, като $CP = PQ = QD$. Да се докаже, че

$$S_{ABCD} = 3S_{MNPQ}.$$

Решение. Тъй като $S_{MQD} = S_{MQP}$ и $S_{PNB} = S_{PNM}$, то $S_{MBPD} = 2S_{MNPQ}$.

От друга страна $S_{AMD} + S_{BCP} = \frac{1}{3}S_{ABD} + \frac{1}{3}S_{DBC} = \frac{1}{3}S_{ABCD}$.

Тогава $S_{MBPD} = \frac{2}{3}S_{ABCD}$ и следователно $S_{MNPQ} = \frac{1}{3}S_{ABD}$.

Втори български фестивал на младите математици

Втори кръг, 8-9 клас, Кратки решения на задачите

Задача 1. Да се намерят всички тройки естествени числа x, y, z, за които $2^x + 7^y = z^4$.

Решение. При $x = 1$ имаме $7^y + 2 = z^4$. Ако 2 не дели y, то $7^y \equiv 7 \pmod 1)6$, а ако 2 дели y, то $7^y \equiv 1 \pmod 1)6$. Следователно $7^y + 2 \equiv 9$ или $3 \pmod 1)6$. От друга страна, очевидно 2 не дели z и тогава $z^4 \equiv 1 \pmod 1)6$, така че достигаме до противоречие.

Нека $x \geq 2$. Тогава получаваме $7^y \equiv 1 \pmod 4$ и оттук 2 дели y. Нека $y = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Записваме равенството във вида

$$(z^2 - 7^k)(z^2 + 7^k) = 2^x.$$

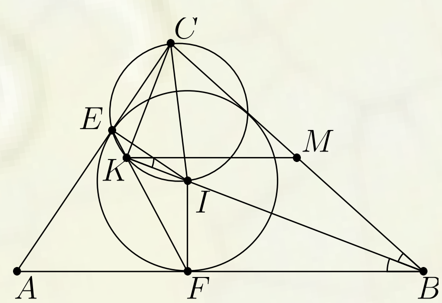
Тъй като $(z^2 - 7^k, z^2 + 7^k) = 2$, оттук следва, че $z^2 - 7^k = 2$ и $z^2 + 7^k = 2^{x-1}$. От тези равенства получаваме $2^{x-2} - 1 = 7^k$. При $x \geq 6$ оттук следва $7^k \equiv -1 \pmod 1)6$, което е невъзможно. Следователно $x \leq 5$ и намираме, че $x = 5,\ k = 1$ и значи $y = 2$ и $z^2 = 7^k + 2 = 9$, т.е. $z = 3$. Окончателно $x = 5$, $y = 2$, $z = 3$.

Задача 2. Да се докаже, че в n-ъгълник M могат да се прекарат най-много $n-3$ диагонала, всеки от които лежи изцяло в M и никои два диагонала не се пресичат.

Решение. Ще докажем твърдението с индукция по $n \geq 3$. За $n = 3$ твърдението е очевидно. Нека то е вярно за всяко $n \leq k$, където k е естествено число. Да разгледаме произволен $n + 1$-ъгълник M и нека XY е негов диагонал, който изцяло леги в M. Този диагонал разделя M на два многоъгълника. Да означим броя на върховете на тези два многоъгълника с p и q. Тогава $p + q = n + 2$ (тъй като X и Y се броят по два пъти). Понеже $p < n + 1 \leq k$ и $q < n + 1 \leq k$, от индукционното допускане следва, че в двата многоъгълника могат да се прекарат най-много съответно $p - 3$ и $q - 3$ диагонала. Тогава в M могат да се прекарат най-много $p - 3 + q - 3 + 1 = n - 3$ непресичащи се диагонали.

Задача 3. В триъгълник ABC е вписана окръжност с център I, която допира страните CA и AB съответно в точките E и F. Ако BI пресича EF в точката K, да се докаже, че K лежи на правата през средите на страните BC и AC.

Решение. Нека правата през K, успоредна на AB, пресича BC в точката M. Твърдението на задачата е равносилно на това да докажем, че M е среда на BC.



Очевидно $\triangle BKM$ е равнобедрен, като $BM = KM$. Освен това $\sphericalangle BKF = \dfrac{\gamma}{2}$, следователно четириъгълникът $EKIC$ е вписан. Оттук $\sphericalangle IKC = \sphericalangle IEC = 90°$. Това означава, че в правоъгълния триъгълник BKC отсечката KM е медиана.

Задача 4. На два съседни острова има общо $n < 2011$ града, като всички са на морето. На всеки остров, всеки два града са свързани с автобусна линия, а всеки два града на различни острови са свързани с параходна линия. Броят на автобусните и параходните линии е еднакъв. Да се определи най-голямата възможна стойност на n.

Решение. Нека на единия остров има k града. По условие параходните линии са половината от общия брой, така че $n(n-1) = 4k(n-k)$. Оттук $n = (n-2k)^2$, така че n трябва да е точен квадрат. Най-големият такъв е $n = 44^2 = 1936$ (условието се изпълнява за $k = 946$).

Задача 5. Намерете всички прости числа p, за които съществуват цели числа x и y такива, че $p+1 = 2x^2$ и $p^2+1 = 2y^2$.

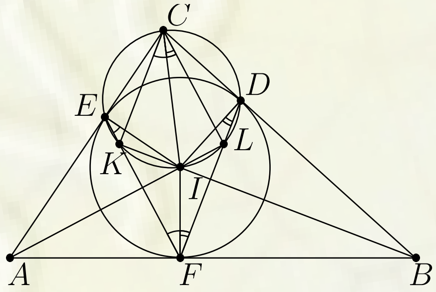
Решение. Можем да считаме, че x и y са естествени числа. Тъй като $2(y^2-x^2) = p(p-1)$ и $p \neq 2$, то p дели $y-x$ или $y+x$. Освен това $x < p$, $y < p$ и $x < y$. Следователно p не дели $y-x$, защото иначе $x = y$. Остава p да дели $y+x$ и от $x < p$, $y < p$ следва, че $x+y = p$. Сега остава да решим системата

$$\left| \begin{array}{l} p+1 = 2x^2 \\ p^2+1 = 2(p-x)^2. \end{array} \right.$$

След почленно изваждане и съкращаване на p, намираме $p-1 = 2p-4x$, т.е. $x = \dfrac{p+1}{4}$. След заместване в първото уравнение намираме $p^2-6p-7 = 0$ с решения $p = 7$ и $p = -1$. Следователно търсената стойност е $p = 7$.

Задача 6. В триъгълник ABC е вписана окръжност с център I, която допира страните BC, CA, AB съответно в точките D, E, F. Ако BI пресича EF в точката K, а AI пресича FD в точката L, да се докаже, че $\sphericalangle KCL = \sphericalangle EFD$.

Решение. Ще докажем, че точката K лежи на окръжността k с диаметър IC. Очевидно E и D лежат на k. Намираме $\sphericalangle BKF = \sphericalangle AFE - \sphericalangle KBF = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\gamma}{2}$. Тъй като и $\sphericalangle ECI = \dfrac{\gamma}{2}$, то четириъгълникът $EKIC$ е вписан, т.е. K лежи на k. Оттук $\sphericalangle KCI = \sphericalangle KEI = \dfrac{\alpha}{2}$.



Аналогично $\sphericalangle LCI = \dfrac{\beta}{2}$ и оттук $\sphericalangle KCL = \sphericalangle EFD$.

Задача 7. Да се докаже, че за всеки три реални числа x, y и z е изпълнено неравенството

$$x^4 + y^4 + z^2 \geq \sqrt{8}xyz.$$

Да се намерят всички тройки (x, y, z), за които се достига равенство.

Решение. Прилагаме неравенството $a^2 + b^2 \geq 2ab$ (което е изпълнено за произволни реални числа a и b) последователно за $a = x^2, b = y^2$ и $a = \sqrt{2}xy, b = z$ и получаваме

$$x^4 + y^4 + z^2 \geq 2x^2y^2 + z^2 \geq 2\sqrt{2x^2y^2z^2} = \sqrt{8}|xyz| \geq \sqrt{8}xyz.$$

Равенство се достига когато $x^2 = y^2$, $\sqrt{2}xy = z$ и $xyz \geq 0$. От първите две равенства получаваме, че ако $x = t$, то $y = \pm t$ и $z = \pm\sqrt{2}t^2$. Тогава $xyz = \sqrt{2}t^4$. Следователно търсените тройки са

$$(t, \pm t, \pm\sqrt{2}t^4),$$

където t произволно реално число.

Задача 8. Да се намери най-малкото естествено число k, което може да се предстви във вида $k = 19^n - 5^m$ за някои естествени числа m и n.

Решение. Търсеното число е $14 = 19 - 5$.

Ако n е четно число, последната цифра на k е 6. Но от равенството $19^n - 5^m = 6$ по модул 3 следва, че m също е четно. Ако $n = 2n_1$ и $m = 2m_1$, получаваме $(19^{n_1} + 5^{m_1})(19^{n_1} - 5^{m_1}) = 6$, което няма естествени решения.

Ако n е нечетно, последната цифра на k е 4. Развенството $19^n - 5^m = 4$ е невъзможно по модул 3.

Втори български фестивал на младите математици

Втори кръг, 10-12 клас, Кратки решения на задачите

Задача 1. В клетките на една квадратна таблица с размери $n \times n$ са записани в произволен ред числата $1, 2, \ldots, n$. Да се докаже, че съществуват две съседни клетки, за които разликата между числата, записани в тях, е не по-малка от n.

Решение. С M_k означаваме множеството от онези клетки в които са записани числата $1, 2, \ldots, k$. Нека k_0 е най-малкото k, за което M_k съдържа линия. Ясно е, че $k_0 < n^2 - n + 2$. Нека например M_{k_0} съдържа реда с номер l. Тогава M_{k_0-1} съдържа l-я ред без една клетка. Нека тя се съдържа в s-ия стълб. Да разгледаме останалите $n-1$ стълба. Поне един от тях няма да съдържа нито едно от числата $k_0+1, k_0+2, \ldots, k_0+n-2$. Нека това е стълбът с номер r. В него има числа, по-големи от k_0 и следователно числа, по-големи от k_0+n-2. Да разгледаме онова от тях, което е най-близо до l-я ред. Ясно е, че то има за съсед в r-я стълб число, което е по-малко от k_0. Следователно тяхната разлика е поне $(k_0+n-1)-(k_0-1)=n$.

Задача 2. Дадени са реалните числа $0 < a < b \leq c < d$. Да се докаже неравенството:

$$\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}+\frac{1}{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}\right) \leq 1.$$

Кога се достига равенство?

Решение. Да разгледаме функцията

$$f(x)=p(x-a)(x-c)+q(x-b)(x-d)=(p+q)x^2-(p(a+c)+q(b+d))x+pac+qbd,$$

където p и q са реални положителни числа. Поради $0 < a < b \leq c < d$, директно се проверява, че $f(a) > 0$, $f(b) \leq 0$, $f(c) \leq 0$ и $f(d) > 0$, като равенствата са възможни само при $b=c$. Следователно $f(x)$ винаги има корен, което дава, че $D \geq 0$. При $p=\dfrac{1}{a+c}$ и $q=\dfrac{1}{b+d}$ условието $D \geq 0$ е еквивалентно на даденото в условието неравенство. За да имаме равенство е необходимо $f(x)$ да има единствен корен, което е възможно само при $b=c$, като тогава този корен ще бъде $x=b=c$ и $f(x)=(p+q)(x-c)^2$. Следователно

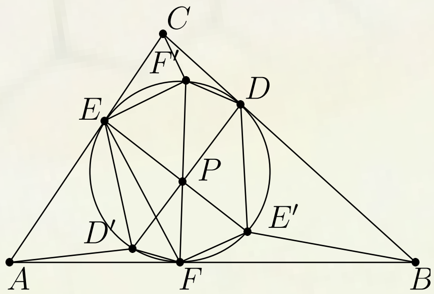
$$f(x)=p(x-a)(x-c)+q(x-c)(x-d)=(p+q)(x-c)^2$$

и след приравняване на коефициентите намираме $c^2=ad$.

Задача 3. В триъгълник ABC е вписана окръжност k, която допира страните BC, CA, AB съответно в точките D, E, F. Нека точката P е вътрешна за окръжността k. Ако правите DP, EP, FP пресичат k съответно в точките D', E', F', да се докаже, че правите AD', BE' и CF' се пресичат в една точка.

Решение. Ще докажем твърдението с теоремата на Чева със синуси. По синусовата теорема имаме

$$\frac{\sin \sphericalangle EAD'}{\sin \sphericalangle FAD'}=\frac{\frac{D'E}{AD'}\sin \sphericalangle AED'}{\frac{D'F}{AD'}\sin \sphericalangle AFD'}=\frac{D'E\sin \sphericalangle EFD'}{D'F\sin \sphericalangle FED'}=\left(\frac{D'E}{D'F}\right)^2.$$



Аналогично

$$\frac{\sin \sphericalangle FBE'}{\sin \sphericalangle DBE'} = \left(\frac{E'F}{E'D}\right)^2, \quad \frac{\sin \sphericalangle DCF'}{\sin \sphericalangle ECF'} = \left(\frac{F'D}{F'E}\right)^2.$$

Като умножим получените три равенства виждаме, че условието на теоремата на Чева ще е изпълнено точно когато $D'E.E'F.F'D = D'F.E'D.F'E$. Това обаче е известен факт, тъй като главните диагонали на вписания шестоъгълник с върхове D, E, F, D', E', F се пресичат в една точка (точката P). (Равенството следва от отношенията $D'E : E'D = D'P : PE'$, $E'F : F'E = E'P : PF'$, $F'D : D'F = F'P : PD'$.)

Задача 4. Да се докаже, че множеството $\{1, 2, \dots, 12001\}$ може да се разбие на 5 групи така, че нито една от тях да не съдържа 11 членна аритметична прогресия.

Решение. Нека k е броят на 11 членните аритметични прогресии, образувани от дадените числа. Ако a и d са съответно първият член и разликата на една такава прогресия, то $1 \le a \le 11991$ и $1 \le d \le \left[\frac{12001-a}{10}\right]$. Тогава:

$$k \le \sum_{a=1}^{11991} \left[\frac{12001-a}{10}\right] < 5^{10}.$$

Общият брой на разбиванията на множеството $\{1, 2, \dots, 12001\}$ на 5 групи (включително когато някои от множествата са празни) е 5^{12001} (тъй като за всяко число от множеството има 5 възможности). Общият брой на разбиванията, при които има поне една 11 членна аритметична прогресия е по-малък от $5.k.5^{12001-11}$ (тъй като фиксирана прогресия може да се избере по k, след което за нея и за всяко от останалите числа има по 5 възможности).

Тъй като $k < 5^{10}$, то $5.k.5^{12001-11} < 5^{12001}$, т.е. съществува разбиване без 11 членна прогресия.

Задача 5. Върховете на $\triangle ABC$ лежат върху графиката на функцията $f(x) = x^2$, а медицентърът му съвпада с точката $M(1, 7)$. Да се намери възможно най-голямата стойност на лицето на $\triangle ABC$.

Решение. Нека $A(x_1, x_1^2)$, $B(x_2, x_2^2)$, $C(x_3, x_3^2)$ и $x_1 < x_2 < x_3$. Тогава $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 1$, $\dfrac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{3} = 7$ и от тези равенства получаваме

$$x_1 + x_3 = 3 - x_2, x_1 x_3 = x_2^2 - 3x_2 - 6. \tag{1}$$

Ако A_1, B_1, C_1 са ортогоналните проекции на A, B и C върху абсцисната ос, за лицето S на $\triangle ABC$ имаме $S = S_{AA_1C_1C} - S_{AA_1B_1B} - S_{BB_1C_1C}$. Оттук лесно се получава $S = \dfrac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_2 - x_2)$. Сега имаме

$$S \le \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\left(\frac{x_2 - x_1 + x_3 - x_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}(x_3 - x_1)^3.$$

Използвайки (1), пресмятаме

$$(x_3 - x_1)^2 = (x_1 + x_3)^2 = 4x_1x_3 = 33 + 6x_2 - 3x_2^2 = 36 - 3(x_2 - 1)^2.$$

Оттук $(x_3 - x_1)^2 \leq 36$, т.е. $x_3 - x_1 \leq 6$ и следователно $S \leq \dfrac{1}{8}.6^3 = 27$. При това равенството се достига когато $x_2 - 1 = 0$, $x_3 - x_1 = 6$ и $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$, т.е. при $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$. Окончателно, най-голямата стойност на S е 27.

Задача 6. В група от n човека всеки има по едно великденско яйце. Те разменят яйцата си по следния начин: при всяка смяна двама човека разменят яйцата си, които имат в момента. Всеки двама разменят яйцата си поне един път. След няколко такива смени се оказало, че всеки има същото яйце, което е имал в началото. Да се определи минималният възможен брой смени, ако а) $n = 5$; б) $n = 6$.

Решение. Ще означаваме хората с $A, B, C, \dots$ и яйцата, които те имат в началото със съответните малки букви. По този начин първоначалното състояние се описва с Aa, Bb, Cc, Dd, Ee (, Ff). С XY ще означаваме размяна на яйцата на X и Y.

Двама човека се наричат съседи, ако техните букви са съседни.

а) Тъй като пет човека образуват $5.4/2 = 10$ двойки, то са необходими поне 10 размени. Ще покажем, че 10 размени са достатъчни. Последователно разменяме AB, след това BC и след това CA; сега имаме Aa, Bc, Cb, Dd, Ee. Сега разменяме AD, след това DE и след това EA; сега имаме Aa, Bc, Cb, De, Ed. Разменяме BE, след това CD; сега имаме Aa, Bd, Ce, Db, Ec. Разменяме BD, след това CE; сега имаме Aa, Bb, Cc, Dd, Ee и всеки има собственото си яйце.

б) Шест човека образуват $6.5/2 = 15$ двойки и следователно са необходими поне 15 размени. Ще покажем, че броят на размените трябва да бъде четно число. Ще казваме, че в даден момент две яйца x и y образуват "обратна" двойка, ако яйцето x в началото се е намирало преди y (т.е. човекът, който притежава x е с по-предна буква от този, притежаващ яйцето y), а в този момент y се намира преди x. Да означим с T броят на обратните двойки. В началото $T = 0$. Размяна между съседи променя T с 1. Всяка размяна е еквивалентна на нечетен брой размени между съседи и следователно променя четността на T. Тъй като накрая $T = 0$, общият брой размени трябва да бъде четен.

Следователно в този случай са необходими поне 16 размени. Разменяме AB, BC, CA и имаме Aa, Bc, Cb, Dd, Ee, Ff. Разменяме AD, DE, EA и имаме Aa, Bc, Cb, De, Ed, Ff. Разменяме FB, BE, EF и имаме Aa, Bd, Cb, De, Ec, Ff. Разменяме FC, CD, DF и имаме Aa, Bd, Ce, Db, Ec, Ff. Разменяне BD, CE, два пъти AF.

Следователно 16 размени са достатъчни.

Задача 7. Вписаната в $\triangle ABC$ $(AC < BC)$ окръжност се допира до страните AC и BC съответно в точки X и Y. През средата M на AB е построена права, успоредна на XY, която пресича страната BC в точка N. Нека точката $L \in BC$ е такава, че $NL = AC$ и L е между C и N. Правите ML и AC се пресичат в точка K. Да се докаже, че $BN = CK$.

Решение. Нека $N_1 = MN \cap AC$. Тогава от $NN_1 \| XY$ и равнобедрения $\triangle CXY$ следва, че $CN_1 = CN$. От теоремата на Менелай за $\triangle ABC$ и правата NMN_1 имаме $\frac{AN_1.BM.CN}{AM.BN.CN_1} = 1$, откъдето $AN_1 = BN$. Следователно

$$CL = CN - NL = CN_1 - AC = AN_1 = BN.$$

Прилагаме теоремата на Менелай за $\triangle ABC$ и правата KLM и получаваме $\frac{AM.BL.CK}{BM.CL.AK} = 1$, откъдето

$$\frac{BL}{CL} = \frac{AK}{CK} \iff \frac{BL - CL}{CL} = \frac{AK - CK}{CK} \iff \frac{BL - BN}{CL} = \frac{AC}{CK} \iff \frac{NL}{CL} = \frac{AC}{CK}.$$

От последното и от $NL = AC$ следва, че $CK = CL$, а това и доказаното по-горе $CL = BN$ дава исканото $CK = BN$.

Задача 8. Нека S е множеството от всички 9-цифрени естествени числа, в чийто десетичен запис участват само цифрите 1, 2 и 3. Да се намерят всички функции $f : S \to \{1, 2, 3\}$, които притежават следните свойства:
(1) $f(111111111) = 1$, $f(222222222) = 2$, $f(333333333) = 3$, $f(122222222) = 1$;
(2) ако $x, y \in$ се различават във всеки разряд, то $f(x) \neq f(y)$.

Решение. Ще докажем, че $f(x)$ е равно на първата цифра на x за всяко $x \in S$. Непосредствено от условието се вижда, че

$$\begin{aligned} f(111111111) = f(122222222) = f(133333333) = 1, \\ f(211111111) = f(222222222) = f(233333333) = 2, \\ f(311111111) = f(322222222) = f(333333333) = 3. \end{aligned}$$

Нека (a, b, c) е пермутация на цифрите 1,2,3. Ако $x \in S$ има първа цифра a и само цифри a и c, то $f(x) = a$. Действително, $f(x) \neq f(bbbbbbbbb) = b$, защото x и $bbbbbbbbb$ се различават във всеки разряд, и $f(x) \neq f(cbbbbbbbb) = c$, защото x и $cbbbbbbbb$ се различават във всеки разряд.

Нека сега $x = x_1 x_2 \ldots x_9$ е произволно число от S, като $x_1 = a$. Да разгледаме числата $y_1 y_2 \ldots y_9$ и $z_1 z_2 \ldots z_9$, дефинирани по следния начин: $y_1 = b$, $z_1 = c$, ако $2 \leq i \leq 9$, то при $x_i = a$ или $x_i = c$, полагаме $y_i = z_i = b$, а ако $x_i = b$, полагаме $y_i = z_i = c$. От доказаното погоре следва, че $f(y) = b$ и $f(z) = c$. Тогава $f(x) = a$, с което доказателството е завършено.