

ТЕМА 3

Задача 1. Дадено е уравнението

$$\log_2(4^x + a^2) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)$$

относно x , където a е параметър.

а) (2 точки) Решете уравнението при $a = -2$.

б) (2 точки) Докажете, че за всяко a уравнението има единствено решение x_0 и намерете за кои стойности на a е изпълнено $x_0 > 3$.

в) (2 точки) Нека $x_0 = f(a)$ е решението на уравнението като функция на a и нека $u(a) = 2^{f(a)}$. Пресметнете границата

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{u(a) + 1}{\sqrt{(u(a) - 3) \cdot u(a)}}$$

Задача 2. Върху страната BC на ромба $ABCD$ е взета точка M , така че $\frac{CM}{MB} = k$.

а) (3 точки) Известно е, че $\angle AMB = 2\angle BAM$. Докажете, че

$$\cos \angle BAM = \frac{k+1}{2}$$

и пресметнете $\cos \angle BAD$.

б) (2 точки) Докажете, че

$$\frac{S_{BMN}}{S_{BAM}} = \frac{1}{2+k}$$

където N е пресечната точка на AM и BD .

в) (2 точки) Докажете, че $\frac{S_{BMN}}{S_{ABCD}} < \frac{1}{4}$.

Задача 3. Дадена е триъгълна пирамида $ABCM$ с основа ABC и равни околни ръбове. Нека $BC = a$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle ABC = \beta$ и нека обемът на пирамидата е a^3 .

а) (2 точки) Пресметнете височината h през върха M на пирамидата.

б) (2 точки) Пресметнете радиуса R на описаната около пирамидата сфера, ако $\gamma = 90^\circ$.

в) (3 точки) Нека $\gamma = 90^\circ$. Пресметнете тангенса на ъгъла между медианите MC_1 в триъгълника ABM и BN в триъгълника BCM .