Софийски Университет „Св. Климент Охридски”
Писмен конкурсен изпит по математика
13 юли 2010 г.

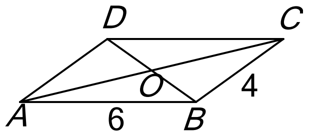
ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 2

Задача 1. Да се пресметне стойността на израза $\sqrt[3]{a^3b^5}-2ab\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[6]{a^6b^{10}}$ при $a=-3$ и $b=2^{\frac{3}{2}}$.

Решение: Преобразуваме израза: $A=\sqrt[3]{a^3b^5}-2ab\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[6]{a^6b^{10}}=ab\sqrt[3]{b^2}-2ab\sqrt[3]{b^2}+|ab|\sqrt[6]{b^4}=$
$=(|ab|-ab)\sqrt[3]{b^2}$. При $a=-3$, $b=2^{\frac{3}{2}}$ имаме $|ab|-ab=\left|-3.2^{\frac{3}{2}}\right|-\left(-3.2^{\frac{3}{2}}\right)=2.3.2^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{b^2}=2$.
Следователно $A=4.3.2^{\frac{3}{2}}=24\sqrt{2}$.

Задача 2. Даден е успоредник $ABCD$ със страни 6 и 4. Да се намери лицето на успоредника, ако острият ъгъл между диагоналите е $45°$.

Решение: Нека $AB=6,\ BC=4, AC\cap BD=O$ и $\sphericalangle BOC=45°$. От
$BC^2=OB^2+OC^2-2OB.OC\cos 45°$ и $AB^2=OA^2+OB^2+2OA.OB\cos 45°$
следва, че $AB^2-BC^2=4OB.OC\cos 45°$, т.е. $OB.OC=\dfrac{6^2-4^2}{4\cos 45°}=\dfrac{5}{\cos 45°}$

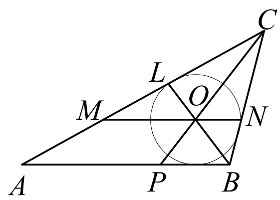


Но $S_{ABCD}=2OB.OC\sin 45°$ откъдето намираме $S_{ABCD}=10\operatorname{tg}45°=10$.

Задача 3. Да се пресметне границата $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-5x+6}$.

Решение: Имаме $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x+9}{x-2}=27$.

Задача 4. В триъгълника ABC, BL е ъглополовяща и O е центърът на вписаната окръжност. Правата през O, успоредна на AB, пресича страните AC и BC съответно в точки M и N. Да се намери периметърът на триъгълника, ако $OM=2ON$, $AL=6$ и $LC=4$.



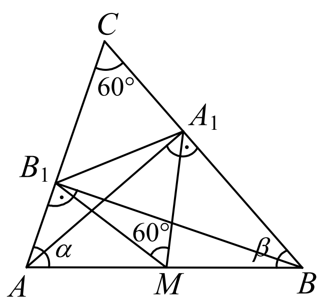
Решение: Тъй като BL е ъглополовяща, то $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AL}{LC}=\dfrac{3}{2}$. Нека
$CO\cap AB=P$. От $MN\parallel AB$ следва, че $\dfrac{AP}{BP}=\dfrac{MO}{ON}=\dfrac{2}{1}$. Но CP е ъглополовяща, така че
$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AP}{BP}=\dfrac{2}{1}$, т.е. $BC=\dfrac{1}{2}AC=5$. Но $AB=\dfrac{3}{2}BC=\dfrac{15}{2}$. Следователно $P_{ABC}=10+5+\dfrac{15}{2}=\dfrac{45}{2}$.

Задача 5. Да се реши уравнението $\sqrt{3}\cos^3 x-4\cos^2 x\sin x+\sqrt{3}\cos x\sin^2 x=0$.

Решение: Имаме $\sqrt{3}\cos^3 x-4\cos^2 x\sin x+\sqrt{3}\cos x\sin^2 x=\cos x\left(\sqrt{3}(\sin^2 x+\cos^2 x)-4\sin x\cos x\right)=$
$=\cos x\left(\sqrt{3}-2\sin 2x\right)=0$. Следователно $\cos x=0$ или $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. От $\cos x=0$ намираме
$x=(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k=0,\pm1,\pm2,..$, а от $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ имаме $x=\frac{\pi}{6}+l\pi,\ l=0,\pm1,..$ и $x=\frac{\pi}{3}+m\pi, m=0,\pm1,...$

Задача 6. В остроъгълния триъгълник ABC с лице 8, AA_1 и BB_1 са височини, а точката M е средата на страната AB. Да се намери лицето на триъгълника A_1B_1C, ако триъгълникът A_1B_1M е равностранен.

Решение: Нека $\sphericalangle CAB=\alpha$, $\sphericalangle CBA=\beta$. Тъй като B_1M е медиана в правоъгълния ΔABB_1, то $B_1M=AM$. Тогава $\sphericalangle AMB_1=180°-2\alpha$.
Аналогично $\sphericalangle BMA_1=180°-2\beta$. Тъй като A_1B_1M е равностранен, то $\sphericalangle A_1MB_1=60°$ и $\sphericalangle AMB_1+\sphericalangle BMA_1=180°-\sphericalangle A_1MB_1=120°$, откъдето
$\alpha+\beta=120°$. Следователно $\sphericalangle ACB=60°$. Тогава $CA_1=CA\cos 60°=\frac{1}{2}CA$
и $CB_1=CB\cos 60°=\frac{1}{2}CB$. Следователно $S_{A_1B_1C}=\frac{1}{4}S_{ABC}=2$.



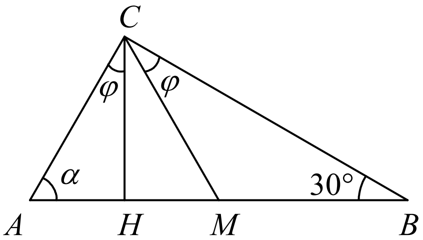
Задача 7. Да се намерят реалните решения на системата $\begin{vmatrix} x+y+z=2 \\ 2xy-z^2=4 \end{vmatrix}$.

Решение: От $x+y=2-z$ получаваме $x^2+2xy+y^2=(2-z)^2$. Тъй като $2xy=4+z^2$, то $x^2-2xy+y^2=(2-z)^2-2(4+z^2)=-(z+2)^2$, т.е. $(x-y)^2+(2+z)^2=0$. Но $(x-y)^2 \geq 0, (2+z)^2 \geq 0$, така че $x=y$ и $z=-2$. Оттук имаме $2x=2-z=4$, т.е. $x=y=2$.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър *a*, при които всяко решение на неравенството $\log_x(5x^2-8x+3)>2$ е решение на неравенството $x^2-2x-a^4+1>0$.

Решение: От $5x^2-8x+3>0$, $x>0, x\neq 1$ получаваме дефиниционната област на първото неравенство: $x\in\left(0,\frac{3}{5}\right)\cup(1,+\infty)$. Тъй като $\log_x(5x^2-8x+3)>2 \Leftrightarrow \log_x(5x^2-8x+3)>\log_x x^2$, при $x\in\left(0,\frac{3}{5}\right)$ имаме $5x^2-8x+3<x^2 \Leftrightarrow 4x^2-8x+3<0 \Rightarrow x\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$, откъдето $x\in\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right)$, а при $x\in(1,+\infty)$ – $5x^2-8x+3>x^2 \Leftrightarrow 4x^2-8x+3>0 \Rightarrow x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$, откъдето $x\in\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$.

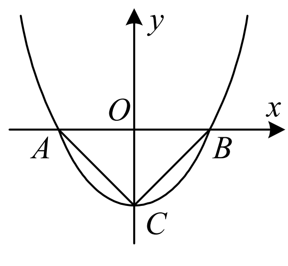
Решението на неравенството $x^2-2x-a^4+1>0$ е $x\in(-\infty,1-a^2)\cup(1+a^2,+\infty)$. Тъй като трябва да е изпълнено $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right)\subset(-\infty,1-a^2)$ и $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)\subset(1+a^2,+\infty)$, то $\frac{3}{5}\leq 1-a^2$ и $1+a^2\leq\frac{3}{2}$, откъдето $-\sqrt{\frac{2}{5}}\leq a\leq\sqrt{\frac{2}{5}}$ и $-\sqrt{\frac{1}{2}}\leq a\leq\sqrt{\frac{1}{2}}$. Окончателно $-\sqrt{\frac{2}{5}}\leq a\leq\sqrt{\frac{2}{5}}$.



Задача 9. В триъгълника *ABC, CH* е височина, *CM* – медиана и $\sphericalangle ACH=\sphericalangle BCM$. Да се намери лицето на триъгълника, ако $AB=2$, $\sphericalangle ABC=30^\circ$ и $30^\circ\leq\sphericalangle BAC<90^\circ$.

Решение: Означаваме $\sphericalangle ACH=\sphericalangle BCM=\varphi$ и $\sphericalangle BAC=\alpha$. Тъй като $\sphericalangle ABC\leq\sphericalangle BAC$, то $AC\leq BC$, откъдето $AH\leq BH$, т.е. $AH\leq AM$. Тогава $\sphericalangle ACM=\varphi+\sphericalangle HCM=\sphericalangle BCH$. Но $\sphericalangle BCH=90^\circ-30^\circ=60^\circ$. От ΔACM по синусова теорема имаме $\frac{CM}{AM}=\frac{\sin\alpha}{\sin 60^\circ}$, а от ΔBCM имаме $\frac{CM}{BM}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin\varphi}$. Тъй като $AM=BM$ и $\varphi=90^\circ-\alpha$, то $\frac{\sin\alpha}{\sin 60^\circ}=\frac{\sin 30^\circ}{\cos\alpha}$, откъдето $\sin\alpha.\cos\alpha=\sin 30^\circ\sin 60^\circ$ или $\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Оттук $2\alpha=60^\circ$ или $2\alpha=120^\circ$. Следователно $\alpha_1=30^\circ$ или $\alpha_2=60^\circ$. Тъй като $S_{ABC}=AB^2\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$, то при $\alpha_1=30^\circ$ имаме $S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, а при $\alpha_2=60^\circ$ – $S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 10. Нека a и b са реални числа, такива че графиката на функцията $f(x)=x^2+ax+b$ пресича оста Ox в точки *A* и *B*, оста Oy в точка *C* и $\sphericalangle ACB=90^\circ$. Да се намерят a и b, при които лицето на триъгълника *ABC* е най-малко.



Решение: Нека $A(x_1;0)$, $B(x_2;0)$ и $C(0;y)$. Тъй като $f(0)=b$, то $C(0;b)$. Понеже *OC* е височината към хипотенузата на правоъгълен триъгълник *ABC*, то $OC^2=OA.OB$, т.е. $b^2=|x_1x_2|=|b|$, откъдето $b=0,1,-1$. При $b=0$ $C\equiv A$ или $C\equiv B$, а при $b=1$, x_1 и x_2 са с еднакви знаци и точка *O* е външна за отсечката *AB*, т.е. ΔACB е тъпоъгълен. Следователно $b=-1$. Имаме $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.OC=\frac{1}{2}|x_2-x_1|.1$. Тъй като $|x_2-x_1|=\sqrt{a^2+4}$, то $S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+4}$. Но $\min\sqrt{a^2+4}=2$, при $a=0$. Следователно лицето на триъгълника *ABC* е най-малко при $a=0$ и $b=-1$.

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата 2 + 0,1.N, където N е броят на получените точки.