

Едно по-човешко решение на задача 10.1 от областния кръг на Националната олимпиада по математика – 2011 год.

Задача 10.1 Да се намерят всички стойности на реалните параметри a и b , за които неравенството $2|x^2 + ax + b| > 1$ няма решения в интервала $[1;3]$.

Решение. $2|x^2 + ax + b| > 1 \Leftrightarrow f(x) = 2x^2 + 2ax + 2b - 1 > 0$ или $g(x) = 2x^2 + 2ax + 2b + 1 < 0$.

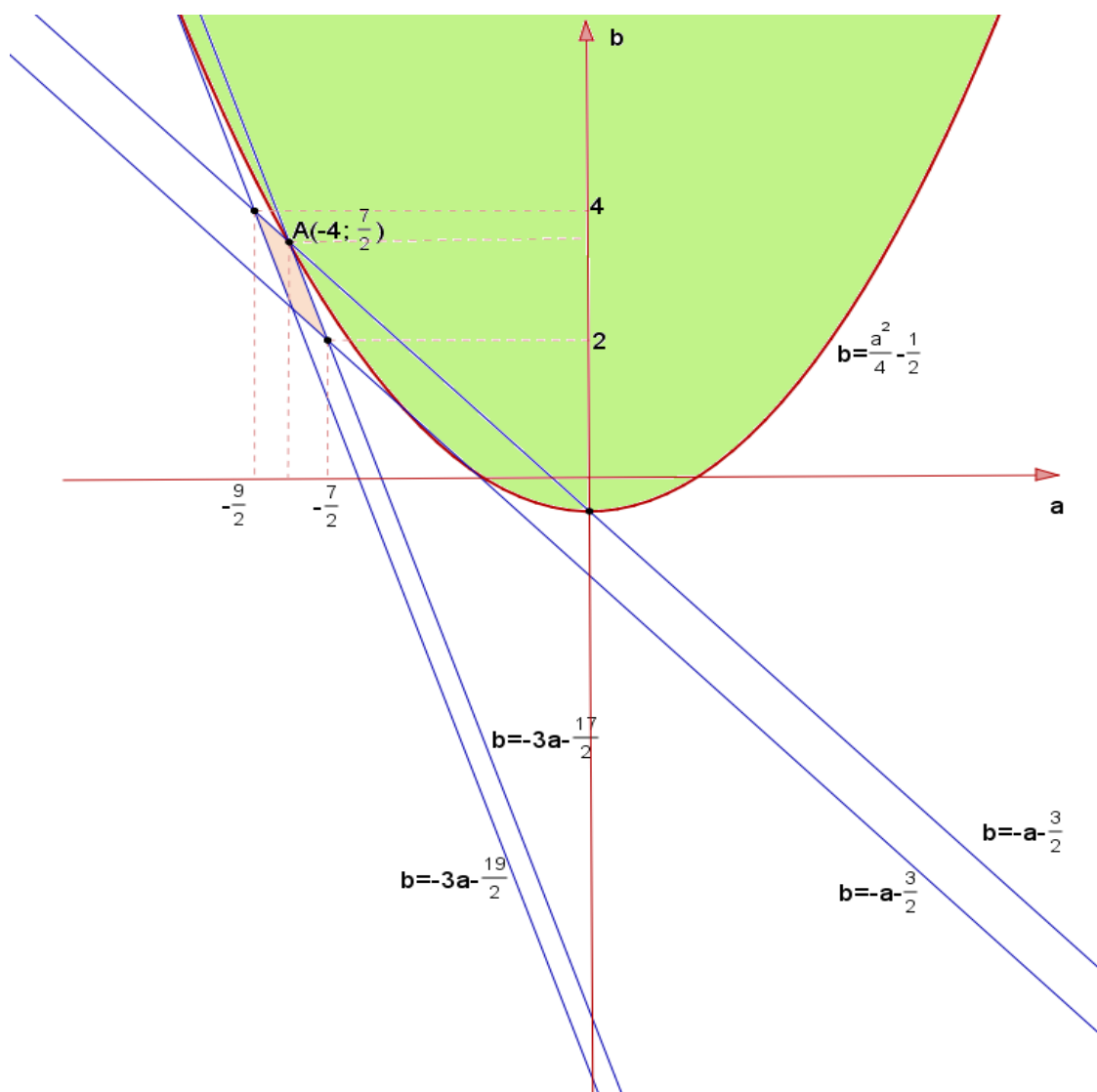
Тъй като и двете новополучени неравенства не трябва да имат решение в $[1;3]$, то лесно се съобразява, че трябва да са изпълнени неравенствата

$f(1) \leq 0, f(3) \leq 0, g(1) \geq 0, g(3) \geq 0$ (За първото неравенство, ако 1 и 3 не са между корените, то или е изпълнено за всяко число, когато дискриминантата му е отрицателна, или е изпълнено за всяко число без нулата, когато дискриминантата му е нула, или пък е вярно за някои(или всички!) числа от посочения интервал, когато дискриминантата е положителна. За второто неравенство пък, ако $g(1) < 0, g(3) < 0$, то това ни гарантира положителна дискриминанта, 1 и 3 между корените и следователно всички числа от $[1;3]$ ще са решения.) Да отбележим, че остава открит въпросът за разположението на върха на $g(x)$. Ако дискриминантата на $g(x) = 0$ е положителна, а абсцисата на върха е между 1 и 3, то условието на задачата няма да бъде изпълнено.

Сега от по-горните неравенства получаваме

$$\begin{cases} a + b \leq -\frac{1}{2} \\ 3a + b \leq -\frac{17}{3} \\ a + b \geq -\frac{3}{2} \\ 3a + b \geq -\frac{19}{3} \end{cases}.$$

Ако разглеждаме a като независима променлива, а b като функционална стойност и изобразим въпросните неравенства върху числова ос (виж чертежа), ще получим, че те



заграждат успоредник в равнината и лесно пресмятаме, че $a \in [-\frac{9}{2}; -\frac{7}{2}]$, $b \in [2; 4]$. От ограничения за a веднага следва, че $-\frac{a}{2} \in [\frac{7}{4}; \frac{9}{4}]$, т.е върхът на $g(x)$ попада в интервала $[1; 3]$. От това пък получаваме, че дискриминантата на $g(x) = 0$ е неположителна (виж обясненията по-горе!), т.е $a^2 - 4b - 2 \leq 0 \Leftrightarrow b \geq \frac{a^2}{4} - \frac{1}{2}$, което пък означава, че точките от равнината, които удовлетворяват това условие са вътре в параболата от чертежа. Вече не е трудно да се пресметне и докаже, че параболата и успоредникът имат само една обща точка и тя е точката $A(-4; \frac{7}{2})$, т.е $a = -4, b = \frac{7}{2}$.