
**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО,
МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ**

ЗИМНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ

Б У Р Г А С

4 – 5 февруари 2011 г.

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

4 – 8 КЛАС

Решения и примерно точкуване

Задача 4.1. Дадени са числовите изрази:

$$A = 15 - 5 \cdot (55503 : 7 - 47508 : 6) : 5; \quad B = (543.4 - 4326 : 2) : 3 + 6 \quad \text{и}$$

$$C = [(1999 + 2000 + 2001 + 2002) - (2009 + 2010 + 2011)] \cdot 3 - 591.10.$$

Пресметнете стойностите им.

Решение:

$$A = 15 - 5 \cdot (55503 : 7 - 47508 : 6) : 5$$

$$B = (543.4 - 4326 : 2) : 3 + 6$$

$$A = 15 - 5 \cdot (7929 - 7918) : 5$$

$$B = (2172 - 2163) : 3 + 6$$

$$A = 15 - 5 \cdot 11 : 5 \quad (2 \text{ т.})$$

$$B = 9 : 3 + 6 \quad (2 \text{ т.})$$

$$A = 15 - 11$$

$$B = 3 + 6$$

$$A = 4$$

$$B = 9$$

$$C = [(1999 + 2000 + 2001 + 2002) - (2009 + 2010 + 2011)] \cdot 3 - 591.10$$

$$C = (8002 - 6030) \cdot 3 - 591.10$$

$$C = 1972 \cdot 3 - 5910 \quad (2 \text{ т.})$$

$$C = 5916 - 5910$$

$$C = 6$$

Задача 4.2. Качвайки се на лифта, забелязах, че седам на седалка с номер 5. Точно по средата на пътя срещнах седалката с номер 130.

а) Намерете броя на седалките, ако те са подредени по номера.

б) Една седалка изминава 50 м за една минута, а разстоянието между всеки две седалки е 8 м. За колко минути група от 26 ученици ще се изкачи на върха, ако на всяка седалка пътува по един пътник?

Решение: а) $(130 - 5) \cdot 2 = 125 \cdot 2 = 250$ седалки. (2 т.)

б) Дължината на въжето на лифта е $250 \cdot 8 = 2000$ м. Тогава разстоянието до върха е $2000 : 2 = 1000$ м. (1 т.) Първият ученик се изкачва за $1000 : 50 = 20$ минути. (1 т.) Когато той слиза, 26-ият ученик след него се намира на разстояние $25 \cdot 8 = 200$ м. (1 т.) Това разстояние се изминава за $200 : 50 = 4$ минути. Следователно групата ще се изкачи за $20 + 4 = 24$ минути. (1 т.)

Задача 4.3. Като се използват девет различни цифри, всяка по веднъж, са записани три трицифрени числа със сбор 2011. Например $381 + 704 + 926 = 2011$ или $413 + 620 + 978 = 2011$ и т.н. Нека A е най-малкото от трите записани трицифрени числа. Кое е най-голямото число, което може да бъде равно на A ?

$$\begin{array}{r} * * * \\ + * * * \\ * * * \\ \hline 2 \ 0 \ 1 \ 1 \end{array}$$

Решение: Отг. $A = 496$. Ще използваме, че сумата на всички цифри е 45. За да завършва сумата на единиците на трите числа на 1, тя трябва да е равна на 11 или 21. (1 т.) Ако сумата е 21, то сумата на десетиците на трите числа трябва да е равна на 19 или 9. Ако е 19, то $21 + 19 = 40$ и трябва сумата на трите стотици да е най-много 5 ($40 + 5 = 45$), което е невъзможно, защото сумата на три различни ненулеви цифри е поне $1 + 2 + 3 = 6$. (1 т.) Ако сумата на трите десетици е 9, то $21 + 9 = 30$ и трябва сумата на трите стотици да е най-много 15 ($30 + 15 = 45$), а в същото време да е равна на 19, за да е възможно $19 + 1 = 20$. Заключаваме, че сумата на трите единици е точно 11. (1 т.) Сега

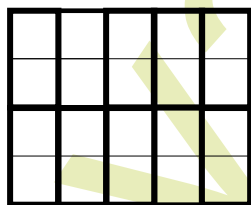
сумата на десетиците на трите числа е 20 или 10. Ако е 20, то сумата на трите стотици е най-много 14, а в същото време трябва да е равна на 18. В крайна сметка получаваме, че сумата на трите единици е 11, а сумата на трите десетици е 10. (1 т.) Сега сумата на трите стотици трябва да е 19. Търсеното число е по-малко от 600, защото $600 + 700 + 800 = 2100 > 2011$. Да проверим възможно ли е то да започва с 5. Ако започва с 5, сумата на другите две стотици е 14, което е възможно само ако трите стотици са 5, 6 и 8. За сумата на единиците на трите числа (в някакъв ред) има 3 случая: $9 + 2 + 0 = 11$, $7 + 4 + 0 = 11$ и $7 + 3 + 1 = 11$. В нито един от тези случаи обаче не е възможно да се образува сума 10 с някои три от неизползваните цифри. Следователно цифрата на стотиците на търсеното число е най-много 4. (1 т.) Тъй като търсим възможно най-голямото число, то първата възможност е да проверим за число от вида $49*$. Сега единствената възможност за стотиците на другите две числа е те да са 7 и 8 ($4 + 7 + 8 = 19$), а за десетиците на другите две числа единствената възможност е те да са 0 и 1 ($9 + 1 + 0 = 10$). Тогава най-голямото възможно число, което търсим, може да бъде 496. (1 т.) За цифрите на единиците на другите две числа остава единствената възможност да са 2 и 3. По този начин получаваме пример, който дава решение на задачата: $496 + 713 + 802 = 2011$. (1 т.)

Задача 4.4. Дъска е разграфена на единични квадратчета, всяко от които е с дължина на страната 1 см. Гошко и Тошко разполагат с червени и сини правоъгълни плочки от домино с размери 2 см и 1 см. Гошко покрива дъската с червени плочки без застъпване. След това Тошко отстранява червените плочки и се стреми да покрие дъската със сини плочки без застъпване така, че никоя синя плочка да не заеме мястото на някоя червена. Винаги ли е възможно Тошко да покрие дъската по указания начин, ако дъската е:

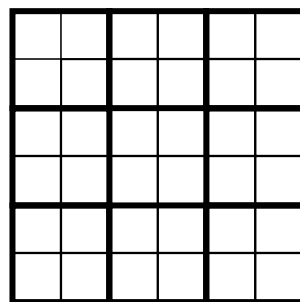
а) правоъгълник с размери 5 см и 4 см;

б) квадрат със страна 6 см?

Решение:



Черт. 1



Черт. 2

а) Не винаги е възможно. Да разгледаме например покриването с червени плочки от Черт. 1, в което всички плочки са вертикални (1 т.) и да вземем например първия ред 5×2 . (1 т.) За да е изпълнено условието на задачата, Тошко трябва да покрие този ред само с хоризонтални сини плочки. Очевидно това е невъзможно. (1 т.)

б) Винаги е възможно. Да разделим дъската на квадрати 2×2 (вж. Черт. 2) и да разгледаме един такъв квадрат. (1 т.) Ако в него не се е намирала изцяло червена плочка, то Тошко може да постави в този квадрат 2 хоризонтални или 2 вертикални плочки по избор. (1 т.) Ако в разглеждания квадрат се е намирала хоризонтална червена плочка, то в него със сигурност не е могло да има вертикална плочка (изцяло) и Тошко може да постави 2 вертикални плочки. Аналогично, ако в разглеждания квадрат се е намирала вертикална червена плочка, то Тошко може да постави 2 хоризонтални плочки. (1 т.) Описаното покриване прилагаме за всички квадрати 2×2 . Със сигурност никоя синя плочка няма да заеме мястото на някоя червена. (1 т.)

Задача 5.1. Намерете стойността на израза: $A = x - 0,01b$, ако

$$b = 3,54.73 + 0,23.25 + 35,4.2,7 + 1,7.2,5,$$

а x е неизвестното число от равенството $5,1:(x - 5,97) + 1,25 = 68,5.2,5$.

Решение: Отг. $b = 364$, $x = 6$, $A = 2,36$.

$$b = 3,54.73 + 0,23.25 + 35,4.2,7 + 1,7.2,5$$

$$b = 3,54.73 + 35,4.2,7 + 0,23.25 + 1,7.2,5$$

$$b = 3,54.73 + 3,54.27 + 0,23.25 + 0,17.25$$

$$b = 3,54(73 + 27) + 25(0,23 + 0,17) \quad (2 \text{ т.})$$

$$b = 3,54.100 + 25.0,4$$

$$b = 354 + 10$$

$$b = 364$$

$$5,1:(x - 5,97) + 1,25 = 68,5.2,5$$

$$5,1:(x - 5,97) + 1,25 = 171,25$$

$$5,1:(x - 5,97) = 171,25 - 1,25$$

$$5,1:(x - 5,97) = 170 \quad (2 \text{ т.})$$

$$x - 5,97 = 5,1:170$$

$$x = 5,97 + 0,03$$

$$x = 6$$

$$A = x - 0,01b$$

$$A = 6 - 0,01.364$$

$$A = 6 - 3,64$$

$$A = 2,36$$

Задача 5.2. В книжарницата Ани си харесала четири книги, но забелязала, че не ѝ достигат 2 лв., за да си ги купи. Тя пресметнала, че ако си купи книгите без първата, ще ѝ останат 4,50 лв., ако си купи книгите без втората, ще ѝ останат 5,30 лв., ако си купи книгите без третата, ще ѝ останат 3,90 лв., а ако си купи книгите без четвъртата, ще ѝ останат 4,90 лв. Колко лева е имала Ани и колко струва всяка от четирите книги?

Решение: Ако към общата цена на втората, третата и четвъртата книга прибавим 4,50 лв., ще получим сумата, с която е разполагала Ани. (1 т.) Ако прибавим 2 лв. повече, т.е. 6,50 лв., ще получим увеличената с 2 лв. първоначална сума на Ани, което е общата цена на четирите книги. (1 т.) Следователно четирите книги без първата и още 6,50 лв. струват колкото четирите книги. Оттук заключаваме, че първата книга струва 6,50 лв. (2 т.) По същия начин получаваме, че втората книга струва $5,30 + 2 = 7,30$ лв., третата книга струва $3,90 + 2 = 5,90$ лв., а четвъртата струва $4,90 + 2 = 6,90$ лв. (1 т.) Ани е имала:

$$6,50 + 7,30 + 5,90 + 6,90 - 2 = 26,60 - 2 = 24,60 \text{ лв.} \quad (1 \text{ т.})$$

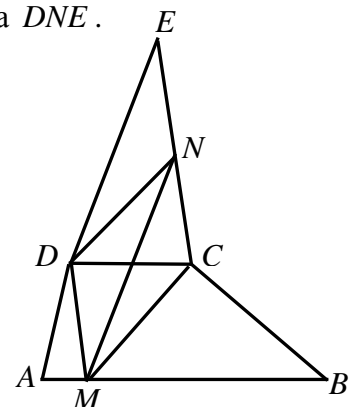
Задача 5.3. Даден е трапец $ABCD$ с лице 30 кв. см. Основите AB и CD изпълняват условието $AB = 2CD$. Извън трапеца е построен триъгълник DCE . Точката M лежи на основата AB и DM е успоредна на EC . Точката N лежи на отсечката CE и MN е успоредна на DE . Да се намери лицето на триъгълника DNE .

Решение: Нека $CD = a$ и h е височината на трапеца.

Тогав $AB = 2a$ (1 т.) и $S_{ABCD} = \frac{2a + a}{2} \cdot h = 30$, откъдето

$$ah = 20. \quad (1 \text{ т.}) \text{ От друга страна } S_{DMC} = \frac{a \cdot h}{2} = 10. \quad (1 \text{ т.})$$

Освен това триъгълниците DMC и DMN имат обща страна DM и равни височини към DM съответно от върховете C и N (защото правите DM и CN са успоредни). Следователно $S_{DMN} = S_{DMC} = 10$. (2 т.) Тъй



като диагоналят DN разделя успоредника $DMNE$ на триъгълниците DMN и DNE , които са с равни лица, то $S_{DNE} = 10$ кв. см. (2 т.)

Задача 5.4. Учителката записва на дъската няколко различни естествени числа, а учениците трябва да запишат в тетрадките си всички възможни сборове на числата по двойки. При това, ако един сбор се получи повече от един път, то той трябва да се запише в тетрадките само веднъж. Например, ако на дъската са записани числата 1, 2, 6 и 7, учениците трябва да запишат в тетрадките си по веднъж числата 3, 7, 8, 9 и 13.

а) Учителката записала на дъската 5 числа. Колко най-малко и колко най-много числа могат да запишат учениците в тетрадките си?

б) Колко най-малко числа трябва да запише учителката на дъската, за да могат учениците да запишат в тетрадките си точно 11 числа?

Решение: а) Нека записаните числа на дъската са: $a < b < c < d < e$. (1 т.) Тогава сумите $a+b$, $a+c$, $a+d$, $a+e$, $b+e$, $c+e$ и $d+e$, които са 7 на брой, са различни, защото са наредени по големина. Следователно учениците трябва да запишат в тетрадките си поне 7 числа. (1 т.) Ако на дъската са записани например числата 1, 2, 3, 4 и 5, лесно може да се провери, че учениците трябва да запишат точно 7 суми – числата от 3 до 9 включително. (1 т.) Най-голям брой числа, които учениците могат да запишат в тетрадките си, ще се получи, ако всички двойки суми са различни. Тъй като броят на всички двойки суми е $4+3+2+1=10$, то най-големият възможен брой числа, които могат да се запишат в тетрадките, е 10. (1 т.) Това може да се случи, ако на дъската са записани например числата 1, 2, 4, 8 и 16. (1 т.)

б) От решението на а) следва, че на дъската трябва да бъдат записани поне 6 числа. (1 т.) Това е търсеният най-малък брой, защото примерът със записани числа 1, 2, 3, 4, 5 и 8 дава точно 11 различни суми – всички числа от 3 до 13 включително. (1 т.)

Задача 6.1. Стая има дължина 5,5 м, широчина 4 м, височина 2 м 80 см, врата с размери 2 м на 75 см, разположена на едната малка стена, и прозорец, заемащ 35% от едната голяма стена. Работник, започвайки работа в 7:55, успял до 9:32 да боядиса тавана и стената, на която е прозорецът. В колко часа трябва да продължи работа работникът, за да успее да боядиса останалите стени до 12:00 същия ден? (Считаме, че таванът и стените се боядисват еднакво бързо. Прозорецът и вратата не се боядисват.)

Решение: Стените имат лица $5,5 \cdot 2,8 = 15,4$ кв.м и $4 \cdot 2,8 = 11,2$ кв.м. Боядисаната до 9:32 площ е $4 \cdot 5,5 + 0,65 \cdot 15,4 = 22 + 10,01 = 32,01$ кв.м. (1 т.), като работата е продължила $5 + 60 + 32 = 97$ мин. (1 т.) Боядисвани са по $32,01 : 97 = 0,33$ кв.м на минута. (1 т.) За боядисване са останали $15,4 + 2 \cdot 11,2 - 2 \cdot 0,75 = 36,3$ кв.м, (1 т.) за които са нужни $36,3 : 0,33 = 110$ мин = 1 ч 50 мин. (1 т.) Работникът трябва да продължи в 10:10 часа. (1 т.)

Задача 6.2. Даден е трапец $ABCD$, диагоналите на който AC и BD се пресичат в т. O и $AO = 3OC$. Бедрото AD е перпендикулярно на основите, лицето на $\triangle COB$ е 12 кв.см.

а) Намерете лицето на трапеца $ABCD$.

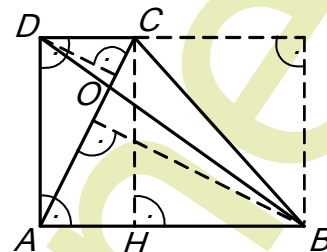
б) Докажете, че височината на трапеца през върха C разделя трапеца на две равнолицеви части.

Решение: а) Триъгълниците AOB и COB имат обща височина от върха B , откъдето $S_{AOB} = 3S_{COB} = 36$ кв.см. (1 т.) Триъгълниците ACD и BCD имат обща основа и равни

височини и следователно $S_{ACD} = S_{BCD}$. Но $S_{AOD} = S_{ACD} - S_{COD} = S_{BCD} - S_{COD} = S_{COB} = 12$ кв. см. (1 т.) Триъгълниците COD и AOD имат обща височина от върха D и $S_{COD} = \frac{1}{3}S_{AOD} = 4$ кв. см. (1 т.) Лицето на трапеца е $12 + 12 + 36 + 4 = 64$ кв. см. (1 т.)

б) Нека CH е височината на трапеца от върха C . Тогава $AHCD$ е правоъгълник и лицето му е 2 пъти по-голямо от лицето на триъгълника ACD . (1 т.) Имаме $S_{ACD} = S_{AOD} + S_{COD} = 12 + 4 = 16$ кв. см. и следователно

$$S_{AHCD} = 2 \cdot 16 = 32 \text{ кв. см.} = \frac{1}{2}S_{ABCD}. \text{ (1 т.)}$$

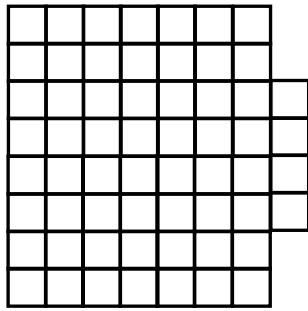


Задача 6.3. Естествените числа n и k ($k > 1$) са такива, че сборът от цифрите на числото n^k е равен на 9, а произведението от цифрите му е равно на 24. Да се намерят n и k .

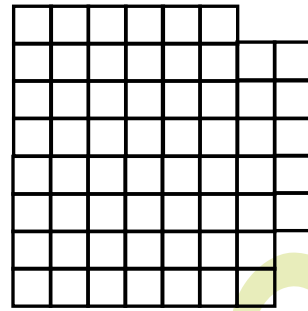
Решение: От условието следва, че в записа на числото n^k не може да се среща цифрата 0. Не могат да се срещат също цифрите 5, 7 и 9, тъй като тези цифри не са делители на 24. (1 т.) Да предположим, че в записа на n^k участва 8. Тогава освен осмицата трябва да има само една единица ($8+1=9$) и няма как произведението на цифрите на n^k да е равно на 24. Следователно цифрата 8 не участва в записа на n^k . (1 т.) Да предположим сега, че в записа участва цифрата 6. Тогава сборът на останалите цифри трябва да е равен на 3, а това е възможно само ако останалите цифри са 1 и 2 или ако са три единици. Но и в двата случая няма как произведението от цифрите на n^k да е равно на 24. (1 т.) Заклучаваме, че всички цифри в записа на n^k са измежду 1, 2, 3 и 4. Ако цифрата 4 участва, то тя е само една. Тогава сборът на останалите цифри трябва да е равен на 5, а произведението им на 6. Оттук следва, че в записа на n^k трябва да има точно една цифра 3. За останалите цифри получаваме, че имат сбор 2 и произведение 2, а това е възможно точно когато в записа участва единствена двойка. Следователно в този случай цифрите на n^k са три: 2, 3 и 4. Ето защо n^k е някое от шестте числа: 234, 243, 324, 342, 423 и 432. Тъй като $234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$, $243 = 3^5$, $324 = 2^2 \cdot 3^4 = 18^2$, $342 = 2 \cdot 3^2 \cdot 19$, $423 = 3^2 \cdot 47$ и $432 = 2^4 \cdot 3^3$, то оттук получаваме решенията $n = 3, k = 5$ и $n = 18, k = 2$. (2 т.) Нека сега в n^k не участва цифрата 4, т.е. участващите в записа на n^k цифри са 1, 2 и 3. За да бъде произведението на тези цифри 24, трябва да имаме три двойки и една тройка. Тъй като $2+2+2+3=9$, цифрата 1 не може да участва. Заклучаваме, че за n^k има още четири възможности: 2223, 2232, 2322 и 3222. Сега $2223 = 3^2 \cdot 13 \cdot 19$, $2232 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 31$, $2322 = 2 \cdot 3^3 \cdot 43$ и $3222 = 2 \cdot 3^2 \cdot 179$, откъдето не получаваме нови решения. (2 т.) Така, единствените решения на задачата са $n = 3, k = 5$ и $n = 18, k = 2$.

Задача 6.4. Квадратна дъска 8×8 е разделена на квадратчета 1×1 , след което от нея са изрязани два правоъгълника 1×2 . Възможно ли е останалата част от дъската да се покрие с плочки от домино с размери 1×2 , половината от които са хоризонтални, ако:

- двата правоъгълника са изрязани, както е показано на Черт. 1;
- двата правоъгълника са изрязани, както е показано на Черт. 2.

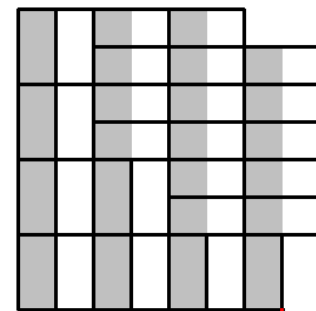
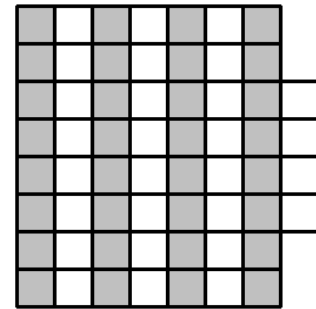


Черт. 1



Черт. 2

Решение: а) Не е възможно. Оцветяваме дъската по колони в два цвята: черно и бяло, както е показано. (1 т.) Всички квадратчета са $64 - 4 = 60$ и са необходими $60 : 2 = 30$ плочки от домино. Следователно 15 от плочките трябва да са хоризонтални и 15 трябва да са вертикални. Броят на черните квадратчета е $4 \cdot 8 = 32$, а този на белите е $3 \cdot 8 + 4 = 28$. (1 т.) За една хоризонтална плочка са необходими едно черно и едно бяло квадратче, а за една вертикална плочка – съответно две бели или две черни. (1 т.) От друга страна 15 хоризонтални плочки покриват 15 бели и 15 черни квадратчета. Следователно за вертикалните остават $32 - 15 = 17$ черни и $28 - 15 = 13$ бели квадратчета. Тъй като 17 и 13 са нечетни числа, покриването е невъзможно. (1 т.)

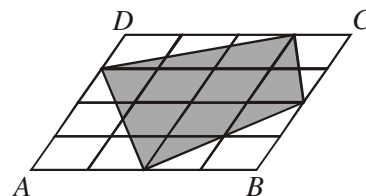


б) Възможно е. Оцветяваме дъската по същия начин. Сега черните квадратчета са $3 \cdot 8 + 7 = 31$, а белите са $3 \cdot 8 + 5 = 29$. Хоризонталните плочки ще покрият 15 бели и 15 черни квадратчета. Следователно за вертикалните остават $31 - 15 = 16$ черни и $29 - 15 = 14$ бели квадратчета. (1 т.) Показан е пример на такова покриване. (2 т.)

Задача 7.1. Един влак изминава разстоянието между гарите A и B за 4 ч 30 мин, а друг влак изминава същото разстояние за 6 ч 45 мин. В колко часа ще се срещнат влаковете, ако тръгнат едновременно един срещу друг от A и B в 8 ч 30 мин?

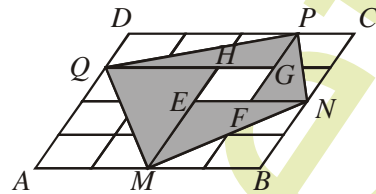
Решение: Нека разстоянието между A и B е s , а x е времето до срещата. Тогава, ако v_a е скоростта на влака, тръгнал от A , а v_b скоростта на влака, тръгнал от B , имаме $v_a x + v_b x = s$ (*). (2 т.) От друга страна, от равенството $v_a \cdot 4\frac{1}{2} = s$ намираме $v_a = \frac{2}{9}s$, а от $v_b \cdot 6\frac{3}{4} = s$ намираме $v_b = \frac{4}{27}s$. (2 т.) Като заместим в (*), получаваме $\frac{2}{9}sx + \frac{4}{27}sx = s$, откъдето $\frac{2x}{9} + \frac{4x}{27} = 1$, $10x = 27$, $x = \frac{27}{10}$ (1 т.). Влаковете ще се срещнат след 2 ч 42 мин, т.е. в 11 ч 12 мин. (1 т.)

Задача 7.2. Страните на успоредника $ABCD$ са разделени на 4 равни части с успоредни прави. Да се намери лицето на успоредника, ако лицето на затъмнения четириъгълник е равно на 68.



Решение: Да разделим четириъгълника $MNPQ$ на четири триъгълника и един

успоредник, както е показано на чертежа. (2 т.) Имаме $S_{AMQ} = S_{MHQ}$, $S_{MBN} = S_{MEN}$, $S_{NCP} = S_{NPF}$ и $S_{PDQ} = S_{PGQ}$. (1 т.) Тогава, ако S е лицето на успоредника $ABCD$, то $S = 2S_{MNPQ} - S_{EFGH}$. (2 т.) Понеже $S_{EFGH} = \frac{1}{16}S$, имаме



$$S = 2.68 - \frac{1}{16}S, \text{ откъдето } S = 128. \text{ (1 т.)}$$

Задача 7.3. В таблица 4×4 са разположени всички числа от 1 до 13, като в полетата от първия ред числата са еднакви, а в останалите полета са различни. Възможно ли е сборът по всеки ред и по всеки стълб да е един и същ? Обосновеge отговора си.

Решение: Нека в полетата на първия ред е записано x и сборът по ред и стълб е S . Тогава, ако съберем сборовете по всички редове без първия и по всички стълбове, всяко от числата от 1 до 13 ще е броено по два пъти (1 т.), освен числото x , което ще е броено 4 пъти. (1 т.) Полученият сбор е $7S = 13.14 + 2x$. (1 т.) Тъй като $S = 4x$, от равенството $28x = 13.14 + 2x$ намираме $x = 7$ (1 т.), откъдето $S = 28$. Показани са две възможни разположения. За верен пример (3 т.), от които (1 т.) за частичен резултат.

7	7	7	7
1	13	10	4
11	2	3	12
9	6	8	5

7	7	7	7
1	13	10	4
12	3	2	11
8	5	9	6

Задача 7.4. Едно естествено число се нарича *интересно*, ако след прибавяне към него на сумата от цифрите му, се получава число, записано със същите цифри. Например числата 45, 279 и 9324 са *интересни*, защото $45 + 4 + 5 = 54$, $279 + 2 + 7 + 9 = 297$ и $9324 + 9 + 3 + 2 + 4 = 9342$.

а) Възможно ли е някое *интересно* число да е просто?

б) Да се докаже, че съществуват безброй много *интересни* числа със сбор от цифрите 36.

в) Да се докаже, че съществуват безброй много *интересни* числа, които са точни квадрати.

Решение: а) Ще използваме, че всяко естествено число и сборът от цифрите му дават един и същ остатък при деление на 9. (1 т.) Ако n е произволно *интересно* число със сума от цифрите s , то n и s дават един същ остатък x при деление на 9. От друга страна, числото $n + s$ трябва да има същите цифри като n и следователно трябва да дава остатък x при деление на 9. Получаваме, че числата $x + x$ и x трябва да дават един и същ остатък при деление на 9. Това е възможно само ако $x = 0$, т.е. ако n се дели на 9. Следователно няма *интересно* число, което е просто. (1 т.)

б) Най-малкото естествено число със сбор от цифрите 36 е 9999, но то не е *интересно*. Затова ще потърсим *интересно* петцифрено число \overline{abcde} такава, че $a + b + c + d + e = 36$ и за което е вярно равенството $\overline{abcde} + 36 = \overline{abcd}$. (1 т.) От последното следва, че $\overline{de} + 36 = \overline{ed}$. Чрез непосредствена проверка за цифрите d и e получаваме следните възможности: $15 + 36 = 51$, $26 + 36 = 62$, $37 + 36 = 73$, $48 + 36 = 84$ и $59 + 36 = 95$. С помощта на някоя от последните три можем да намерим *интересно* петцифрено число със сбор от цифрите 36, например $89937 + 36 = 89973$ (сборът от цифрите на 89937 е 36). (1 т.) Сега остава да забележим, че всички числа от вида $8990\dots037$, където броят на нулите е произволен, са *интересни* и имат сбор от цифрите 36. (1 т.)

в) Единственото *интересно* двуцифрено число е 45, но то не е точен квадрат и при това няма точен квадрат, който да завършва на 45. Трицифрените *интересни* числа са 234, 279, 423, 468, 612, 657, 801 и 846. Нито едно от тях не е точен квадрат, като при това няма точен квадрат, който да завършва с последните две цифри на числата 234, 279, 423, 468, 612, 657 и 846. Изключение прави само числото 801. Затова да потърсим точен квадрат, последните две цифри на който са 01, който е *интересно* четирицифрено число, при това кратно на 9. (1 т.) Числата, които имат четирицифрени квадрати, завършващи на 01, са 49, 51 и 99. От тях $51^2 = 2601$ ни дава пример за *интересно* число, което е точен квадрат. Нещо повече, от това число лесно можем да получим, че числото $(5 \cdot 10^n + 1)^2 = 25 \cdot 10^{2n} + 10^{n+1} + 1 = 25 \underbrace{00 \dots 01}_{n-2} \underbrace{00 \dots 01}_n$ за всяко $n > 2$ е пример за *интересно* число, което е точен квадрат. (1 т.)

Задача 8.1. Да се решат уравненията:

а) $(x^2 + 3x + 2)^2 = 3x(x^2 + 3x + 2)$;

б) $(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 2x^2$.

Решение: а) $(x^2 + 3x + 2)^2 = 3x(x^2 + 3x + 2) \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)^2 - 3x(x^2 + 3x + 2) = 0$
 $(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x + 2 - 3x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 2) = 0$. (1 т.)

Отгук получаваме $x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2$ и $x^2 + 2 = 0$ няма решения. (1 т.)

б) $(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 2x^2 \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2 - 2x)(x^2 + 3x + 2 - x) = 2x^2 \Leftrightarrow$ (2 т.)
 $\Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)^2 - 3x(x^2 + 3x + 2) + 2x^2 = 2x^2 \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 2) = 0$
 $\Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -2$. (2 т.)

Задача 8.2. В трапеца $ABCD$ ($AB \parallel CD$) точката $H \in AB$ е петата на височината през върха D , точката E е средата на диагонала BD и $HE \parallel AC$. Ако лицето на триъгълника DBH е S , да се намери лицето на $ABCD$.

Решение: Построяваме $EF \parallel AB$, $F \in AC$. (1 т.) Тогава $AHEF$ е успоредник и $AF = HE$. (1 т.) Тъй като HE е медиана в правоъгълния $\triangle DHB$, то $HE = \frac{1}{2}BD$. Но $AF = \frac{1}{2}AC$ (1 т.), откъдето получаваме $AC = BD$.

Следователно $ABCD$ е равнобедрен трапец. (1 т.)

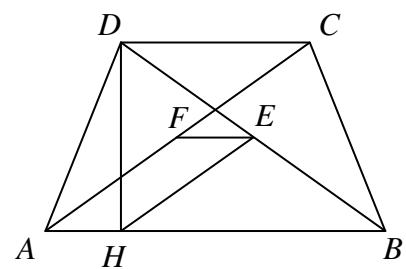
Имаме $HB = AB - AH = AB - \frac{AB - CD}{2} = \frac{AB + CD}{2}$ и

$S_{ABCD} = DH \cdot HB$. (1 т.) Но $S_{DBH} = S = \frac{1}{2}DH \cdot HB$, откъдето $S_{ABCD} = 2S$. (1 т.)

Задача 8.3. Нека a , b и c са дължините на страните на триъгълник. Да се намери броят на реалните корени на уравнението:

$$x^2 - 2c\sqrt{2(a^2 + b^2)}x + (a^2 - b^2)^2 + c^4 = 0.$$

Решение: Броят на реалните корени зависи от знака на дискриминантата:
 $\frac{1}{4}D = c^2 2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 - c^4$. Като използваме, че $2(a^2 + b^2) = ((a+b)^2 + (a-b)^2)$,



имаме: $\frac{1}{4}D = c^2 2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2 - c^4 = c^2((a+b)^2 + (a-b)^2) - (a^2 - b^2)^2 - c^4$. (1 т.)

Разкриваме скобите, групираме събираемите и разлагаме на множители:

$$c^2((a+b)^2 + (a-b)^2) - (a^2 - b^2)^2 - c^4 = c^2(a+b)^2 - c^4 + c^2(a-b)^2 - (a-b)^2(a+b)^2 = c^2((a+b)^2 - c^2) - (a-b)^2((a+b)^2 - c^2) = ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2). \quad (1 \text{ т.})$$

След повторно разлагане получаваме:

$$((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2) = (a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b). \quad (1 \text{ т.})$$

Тъй като a , b и c са страни на триъгълник, то $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$. (1 т.) Освен това $a+b > c$, $b+c > a$ и $c+a > b$. (2 т.) Следователно:

$(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b) > 0$ и уравнението има два реални корена. (1 т.)

Задача 8.4. За всяко реално число x означаваме с $[x]$ най-голямото цяло число, което е по-малко или равно на x . Да се намерят всички прости числа p , за които числото

$$\left[\frac{p^2+1}{2} \right] + \left[\frac{p^2+2}{3} \right] + \left[\frac{p^2+7}{8} \right] + \left[\frac{p^2+18}{24} \right]$$

е просто.

Решение: При $p=2$ имаме

$$\left[\frac{p^2+1}{2} \right] + \left[\frac{p^2+2}{3} \right] + \left[\frac{p^2+7}{8} \right] + \left[\frac{p^2+18}{24} \right] = \left[\frac{5}{2} \right] + \left[\frac{6}{3} \right] + \left[\frac{11}{8} \right] + \left[\frac{22}{24} \right] = 2+2+1+0=5,$$

което е просто число. Следователно $p=2$ е решение на задачата. (1 т.)

При $p=3$ имаме

$$\left[\frac{p^2+1}{2} \right] + \left[\frac{p^2+2}{3} \right] + \left[\frac{p^2+7}{8} \right] + \left[\frac{p^2+18}{24} \right] = \left[\frac{10}{2} \right] + \left[\frac{11}{3} \right] + \left[\frac{16}{8} \right] + \left[\frac{27}{24} \right] = 5+3+2+1=11,$$

което също е просто число. Следователно и $p=3$ е решение на задачата. (1 т.)

Нека $p \geq 5$ е просто число. Тогава $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$, което е произведение на две последователни четни числа и следователно се дели на 8. (1 т.) Освен това разглежданото произведение се дели и на 3, тъй като едно от числата $p-1$ или $p+1$ се дели на 3. (1 т.) Заключаваме, че $p^2 - 1$ се дели на 24 и следователно $p^2 = 24k + 1$ (k е естествено число). Оттук получаваме

$$\left[\frac{p^2+1}{2} \right] + \left[\frac{p^2+2}{3} \right] + \left[\frac{p^2+7}{8} \right] + \left[\frac{p^2+18}{24} \right] = \left[\frac{24k+2}{2} \right] + \left[\frac{24k+3}{3} \right] + \left[\frac{24k+8}{8} \right] + \left[\frac{24k+19}{24} \right] = 12k+1+8k+1+3k+1+k = 24k+3. \quad (2 \text{ т.})$$

Полученото число не може да бъде просто, защото се дели на 3 и е по-голямо от 3. (1 т.)

Така, $p=2$ и $p=3$ са единствените решения на задачата.

Автори на задачите са:

4.1. и 4.2. – И. Старибратов, 4.3. и 4.4. – Св. Дойчев и С. Гроздев;

5.1., 5.2. и 5.3. – Д. Миланова, 5.4. – Св. Дойчев и С. Гроздев;

6.1. – И. Кортезов, 6.2. – И. Шаркова, 6.3. – Св. Дойчев и С. Гроздев, 6.4. – Д. Миланова;

7.1. – И. Ангелов, 7.2. – Т. Витанов, 7.3. – И. Кортезов, 7.4. – Св. Дойчев и С. Гроздев;

8.1., 8.2. и 8.3. – Ч. Лозанов, 8.4. – Св. Дойчев и С. Гроздев.