Министерство на Образованието и Науката
Съюз на Математиците в България

Зимни Математически Състезания
Плевен, 3–5 февруари, 2006 г.

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалните неотрицателни параметри a и b, за които уравненията $x^2 + a^2x + b^3 = 0$ и $x^2 + b^2x + a^3 = 0$ имат общ реален корен.

Решение: Ако x_0 е общ корен на двете уравнения, то

$$x_0(a^2 - b^2) = a^3 - b^3.$$

Случай 1. При $a \neq b$ получаваме $x_0 = \dfrac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$. Тъй като очевидно $x_0 > 0$, заместването в първото уравнение ще даде $x_0^2 + a^2x_0 + b^3 > 0$, което е невъзможно. Следователно в този случай задачата няма решение.

Случай 2. При $a = b$ двете уравнения съвпадат и трябва само да проверим кога имат реални корени. Дискриминантата е $D = a^4 - 4a^3 = a^3(a - 4)$, като $a = 0$ е решение, а при $a > 0$ неравенството $D \geq 0$ е еквивалентно на $a \geq 4$. Следователно решенията на задачата са всички двойки (a, a), където $a \in \{0\} \cup [4, +\infty)$.

Задача 9.2. Нека b и c са реални параметри, за които квадратното уравнение $x^2 + bx + c = 0$ има два реални различни корена x_1 и x_2, такива, че $x_1 = x_2^2 + x_2$.

а) Да се намерят параметрите b и c, ако $b + c = 4$.

б) Да се намерят параметрите b и c, ако те са цели взаимнопрости числа.

Решение: Като използваме условието $x_1 = x_2^2 + x_2$, равенството $x_2^2 + bx_2 + c = 0$ и формулите на Виет, получаваме системата

$$\left|\begin{array}{rcr} x_1 + (b-1)x_2 & = & -c \\ x_1 + x_2 & = & -b \\ x_1x_2 & = & c \end{array}\right. ,$$

откъдето $c^2 + 4(1 - b)c + b^3 - b^2 = 0$, $b \neq 2$.

а) Заместваме $c = 4-b$ и получаваме $b^3+4b^2-28b+32 = 0 \iff (b-2)^2(b+8) = 0$. Следователно $b = -8$, откъдето намираме двойката $(b, c) = (-8, 12)$.

б) Да разгледаме равенството $c^2+4(1-b)c+b^3-b^2 = 0$ като квадратно уравнение относно c. Тъй като c е цяло число, дискриминантата $D = 16(1 - b)^2 - 4(b^3 - b^2) = 4(1-b)(b-2)^2$ трябва да бъде точен квадрат. Следователно $b = 2$ или $1-b = k^2$, където k е цяло число. Получаваме класа от решения $(b,c) = (1-k^2, k(k-1)^2)$, които са взаимнопрости само при $k-1 = \pm 1$. Тогава $k = 2$ или $k = 0$, откъдето $(b,c) = (-3,2)$ и $(1,0)$. И в двата случая корените на даденото уравнение са реални и различни.

Задача 9.3. Даден е $\triangle ABC$. Нека BL, $L \in AC$, е ъглополовяща на $\sphericalangle ABC$, а AH, $H \in BC$, е височината на триъгълника през върха A. Да се докаже, че $\sphericalangle AHL = \sphericalangle ALB$ тогава и само тогава, когато $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB + 90^\circ$.

Решение: ($\Rightarrow$) Нека $\sphericalangle AHL = \sphericalangle ALB = \varphi$ и I е центърът на вписаната в $\triangle ABH$ окръжност. Тогава $\sphericalangle AHI = \frac{1}{2} \sphericalangle AHB = 45^\circ$ и $\sphericalangle AIL = 180^\circ - \sphericalangle AIB = 45^\circ$. Оттук

$$\begin{aligned}\sphericalangle LAI + \sphericalangle LHI &= (180^\circ - \sphericalangle ALI - \sphericalangle AIL) + (\sphericalangle AHL + \sphericalangle AHI)\\ &= (180^\circ - \varphi - 45^\circ) + (\varphi + 45^\circ) = 180^\circ.\end{aligned}$$

Следователно четириъгълникът $AIHL$ е вписан в окръжност, откъдето $\varphi = 45^\circ$. Сега имаме $\sphericalangle BAC = 90^\circ + \sphericalangle BAI = 90^\circ + \frac{1}{2}(90^\circ - \sphericalangle ABC)$. Замесвайки в последното равенство $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle BAC - \sphericalangle ACB$, получаваме

$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB + 90^\circ.$$

($\Leftarrow$) Ще използваме стандартните означения за ъглите в $\triangle ABC$. Нека $\alpha = 90^\circ + \gamma$. Тогава лесно се вижда, че AL е външна ъглополовяща за $\triangle ABH$. Следователно L е центърът на външновписаната окръжност за $\triangle ABH$ към страната AH. Сега имаме $\sphericalangle AHL = \frac{1}{2} \sphericalangle CHA = 45^\circ$. От друга страна,

$$\begin{aligned}\sphericalangle ALB &= 180^\circ - \sphericalangle BAL - \sphericalangle ABL\\ &= 180^\circ - \alpha - \frac{\beta}{2}\\ &= 180^\circ - \alpha - \frac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2}\\ &= 90^\circ - \frac{\alpha - \gamma}{2} = 45^\circ.\end{aligned}$$

Следователно $\sphericalangle AHL = \sphericalangle ALB$.

Задача 9.4. В клетките на таблица с размер 8×8 са разположени пулове, като са спазени следните правила:

(1) В поне едно от полетата на всеки правоъгълник с размер 2×1 или 1×2 има поне един пул.

(2) За всеки правоъгълник с размер 7×1 или 1×7 има поне два пула, които са разположени в съседни полета.

Да се намери минималния възможен брой пулове.

Решение: От фиг. 1 следва, че е възможно да разположим 37 пула при изпълнени условия (1) и (2). Ще докажем, че 37 е търсеният минимален брой.

	•		•		•	•	
•		•		•	•		•
	•		•	•		•	
•		•	•		•		•
	•	•		•		•	•
•	•		•		•	•	
•		•		•	•		•
	•		•	•		•	

Фиг. 1

От (1) следва, че всеки стълб на таблицата съдържа поне по 4 пула. Да разгледаме стълбовете на таблицата 6×6, получена от дадената след отрязване на крайните редове и стълбове. От (1) следва, че всеки такъв стълб съдържа поне три пула.

В никой от стълбовете 6×1 с три пула не е възможно тези пулове да са през едно поле, защото тогава за съответния стълб в голямата таблица не е изпълнено (2). Следователно в стълбовете с по три пула тези три пула са разположени във второ, трето и пето или във второ, четвърто и пето поле.

Да означим с k броя на стълбовете с по 3 пула. Останалите $6-k$ малки стълба и двата крайни големи стълба съдържат поне по 4 пула. Да отбележим още, че от (1) следва, че стълбовете от голямата таблица, които съдържат стълбове от малката с по 3 пула, задължително съдържат по 5 пула.

Да допуснем, че два стълба с по три пула са съседни. Тогава съседните им първи полета образуват правоъгълник 2×1, в който няма пул – противоречие. Тъй като разглеждаме общо 6 стълба, най-много 3 от тях съдържат по 3 пула, т.е. $k \leq 3$.

Да разгледаме двата правоъгълника 6×1, разположени под и над малката таблица. Имаме две възможности:

Случай 1. Ако един от тези правоъгълници съдържа не повече от 3 пула, то в крайните стълбове на голямата таблица има поне по 5 пула и следователно в цялата таблица има поне

$$5k + 2 \cdot 5 + 4(6-k) + 2(3-k) = 40 - k \geq 37$$

пула.

Случай 2. Ако и двата правоъгълника съдържат поне по 4 пула, общият брой на пуловете е поне

$$5k + 4(8-k) + 2(4-k) = 40 - k \geq 37.$$

Задача 10.1. Дадено е неравенството

$$\sqrt{x} + \sqrt{2-x} \geq \sqrt{a},$$

където a е реален параметър.

а) Да се реши неравенството при $a = 3$.

б) Да се намерят стойностите на a, за които неравенството има решения и множеството от решенията му е интервал с дължина, ненадминаваща $\sqrt{3}$.

Решение: а) При $a = 3$ и $x \in [0, 2]$ неравенството е равносилно с $2\sqrt{x(2-x)} \geq 1$ или $4x^2 - 8x + 1 \leq 0$. Следователно решенията му са

$$x \in \left[\frac{2-\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right].$$

б) При $a \geq 0$ и $x \in [0, 2]$ неравенството е равносилно с $2\sqrt{x(2-x)} \geq a - 2$. Ако $a \leq 2$, то всяко $x \in [0, 2]$ е решение и условието не е изпълнено. Нека $a > 2$. Тогава неравенството е равносилно с $4x(2-x) \geq (a-2)^2$ (оттук следва и $x \in [0, 2]$) или $4x^2 - 8x + a^2 - 4a + 4 \leq 0$. Ако $D = 16(4a - a^2) < 0$, то полученото квадратно неравенство няма решение и условието отново не е изпълнено. Нека $D \geq 0$, т.е. $a \in (2, 4]$. Сега решенията на квадратното неравенство са $x \in [x_1, x_2]$, където $x_1 \leq x_2$ са корените на лявата му страна и условието става $x_2 - x_1 \leq \sqrt{3}$. Имаме

$$x_2 - x_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{4a - a^2}$$

и $\sqrt{4a - a^2} \leq \sqrt{3}$ е равносилно с $a^2 - 4a + 3 \geq 0$. Оттук и от $a \in (2, 4]$ получаваме търсените стойности на параметъра: $a \in [3, 4]$.

Задача 10.2. На страните AB и BC на успоредника $ABCD$ са построени точки E и F, така че DE разполовява ъгъл ADF и $AE + CF = DF$. Права през C, перпендикулярна на DE, пресича страната AD в точка L и диагонала BD в точка H. Нека DE пресича AC в точка N.

а) Да се докаже, че $AE = DL$;

б) Ако $HN || AD$, да се докаже, че $BC = CD$;

в) Ако $HN || AD$, да се докаже, че $ABCD$ е квадрат.

Решение: а) Нека $M \in DE \cap CL$, $K \in DF \cap CL$. Тогава DM е височина и ъглополовяща в $\triangle LKD$, значи $DL = DK$. Имаме $\triangle LKD \sim \triangle CKF$, така че $KF = CF$ и значи $AE = DF - CF = DF - KF = DK = DL$.

б) От подобията $\triangle ANE \sim \triangle CND$, $\triangle HNC \sim LAC$ и $\triangle LHD \sim \triangle CHB$ имаме

$$\frac{AE}{CD} = \frac{AN}{NC} = \frac{LH}{HC} = \frac{DL}{BC}.$$

Тъй като $AE = DL$, получаваме $BC = CD$.

в) От б) следва, че $ABCD$ е ромб, така че $DB \perp AC$ и значи H е ортоцентър на $\triangle DNC$. Оттук $HN \perp DC$, така че $AD \perp DC$ и $ABCD$ е квадрат.

Задача 10.3. Да се реши в естествени числа t, x, y, z уравнението

$$2^t = 3^x 5^y + 7^z.$$

Решение: От даденото уравнение получаваме $2^t \equiv 1 \mod 3$ и оттук 2 дели t. Също така получаваме $2^t \equiv 2^z \mod 5$ или (очевидно $t > z$) $2^{t-z} \equiv 1 \mod 5$ и оттук 4 дели $t-z$, така че 2 дели z. По-нататък, имаме (очевидно $t > 4$) $0 \equiv 3^x(-3)^y + (-1)^z \mod 8$ или $3^{x+y} \equiv (-1)^{y+1} \mod 8$. Ако 2 дели y, то $3^{x+y} \equiv -1 \mod 8$, което е невъзможно. Значи 2 не дели y и $3^{x+y} \equiv 1 \mod 8$, така че 2 дели $x+y$ и оттук 2 не дели x. Да положим $t = 2m(m \geq 3), z = 2n(n \geq 1)$ и да запишем уравнението във вида

$$(2^m - 7^n)(2^m + 7^n) = 3^x 5^y.$$

Лесно се вижда, че $(2^m - 7^n, 2^m + 7^n) = 1$. Следователно имаме следните три случая:

1) $2^m - 7^n = 3^x, 2^m + 7^n = 5^y$;

2) $2^m - 7^n = 5^y, 2^m + 7^n = 3^x$;

3) $2^m - 7^n = 1, 2^m + 7^n = 3^x 5^y$.

В случаите 1) и 2) имаме $2^m \mp 7^n = 3^x$. Оттук (предвид $m \geq 3$ и 2 не дели x) следва $\mp(-1)^n \equiv 3 \mod 8$, т.е. $3 \equiv \pm 1 \mod 8$, което е невъзможно.

В случай 3) от $2^m - 7^n = 1$ следва $2^m \equiv 1 \mod 7$ и оттук 3 дели m. Нека $m = 3k(k \geq 1)$. Тогава $(2^k - 1)(2^{2k} + 2^k + 1) = 7^n$. Лесно се вижда, че $(2^k - 1, 2^{2k} + 2^k + 1) = 1$ или 3. Следователно $2^k - 1 = 1, 2^{2k} + 2^k + 1 = 7^n$. Оттук последователно получаваме $k = 1, n = 1, m = 3, t = 6, z = 2$ и (от $2^m + 7^n = 3^x 5^y$) $x = 1, y = 1$.

Окончателно, единственото решение е $t = 6, x = 1, y = 1, z = 2$.

Задача 10.4. В двора на крал Артур има 40 рицари, които всяка сутрин се дуелират по двойки (всеки има по един противник на сутрин), а всяка вечер сядат около кръгла маса (без да се местят по време на вечерята).

а) Колко най-малко сутрини са необходими на крал Артур, за да организира дуелите така, че всеки двама рицари да са се дуелирали поне веднъж?

б) Колко най-малко вечери са необходими, за да може всеки двама рицари да са били съседи на масата поне два пъти?

Решение: а) Двойките рицари са $40.39/2 = 20.39$. Понеже на сутрин се образуват по 20 двойки, необходими са не по-малко от 39 сутрини. За 39 сутрини това може да се извърши по следния начин: разполагаме 39 от рицарите A_1, A_2, ..., A_{39} във върховете на правилен 39-ъгълник, а последния (B) поставяме в центъра. През сутрин номер i, нека B се дуелира с A_i, а останалите дуели да са съставени от хордите $A_{i-j}A_{i+j}$, перпендикулярни на BA_i (номерацията е по модул 39). Понеже 39 е нечетно, всяка хорда е перпендикулярна на единствен радиус, така че всяка двойка ще се появи в някой от 39-те дни.

б) Необходимите съседства са $40.39.2/2 = 40.39$. Понеже на вечер се образуват по 40 съседства, необходими са не по-малко от 39 вечери. За 39 вечери масата може да се подреди с помощтта на схемата от (а) по следния начин. Нека свържем всички отсечки, съответстващи на дуели в дните i и $i+1$ (номерацията на дните също е по модул 39). Ще получим затворената веригата

$$BA_iA_{i+2}A_{i-2}A_{i+4}A_{i-4}...A_{i+38}A_{i-38}$$

(имаме $A_{i-38} = A_{i+1}$), която обхваща 40 точки без повторения (никои два номера не се различават с 39, заради четността, нито с негово кратно, понеже най-голямата разлика е $38 - (-38) < 2.39$). Значи тази верига обхваща всичките 40 точки; нека тя задава последователността на рицарите около масата през вечер i. Съгласно а), всеки двама рицари ще са били съседи два пъти: в навечерието на дуела си и на вечерта след дуела (по модул 39).

Задача 11.1. Да се реши уравнението

$$\log_a(a^{2(x^2+x)} + a^2) = x^2 + x + \log_a(a^2+1),$$

където a е реален параметър.

Решение: Очевидно имаме $a^{x^2+x}(a^2+1) = a^{2(x^2+x)} + a^2$. Полагайки $u = a^{x^2+x}$, получаваме квадратното уравнение $u^2 - (a^2+1)u + a^2$, което има корени 1 и a^2. За x получаваме съответно $x^2 + x = 0$ и $x^2 + x - 2 = 0$. Окончателно получаваме, че за всяко $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ уравнението има четири корена $x = -2, -1, 0, 1$.

Задача 11.2. Даден е $\triangle ABC$, в който $\sphericalangle ACB = 60^\circ$. Редицата от точки $A_0, A_1, \ldots, A_{2006}$ е дефинирана така: $A_0 = A$, A_1 е петата на перпендикуляра от A_0 към правата BC, A_2 е петата на перпендикуляра от A_1 към правата AC и т.н., A_{2006} е петата на перпендикуляра от A_{2005} към правата AC. По аналогичен начин е дефинирана редицата $B_0, B_1, \ldots, B_{2006}$: $B_0 = B$, B_1 е петата на перпендикуляра от B_0 към правата AC и т.н. Да се докаже, че правата $A_{2006}B_{2006}$ се допира до вписаната в $\triangle ABC$ окръжност тогава и само тогава, когато

$$\frac{AC+BC}{AB} = \frac{2^{2006}+1}{2^{2006}-1}.$$

Решение: Последователно имаме $CA_1 = \frac{1}{2}CA_0$, $CA_2 = \frac{1}{4}$ и т.н. Ясно е, че $CA_{2006} = \frac{1}{2^{2006}}CA_0 = \frac{1}{2^{2006}}CA$ и аналогично $CB_{2006} = \frac{1}{2^{2006}}CB$. От обратната теорема на Талес следва, че $A_{2006}B_{2006} \parallel AB$, като $A_{2006}B_{2006} = \frac{1}{2^{2006}}AB$. Правата $A_{2006}B_{2006}$ се допира до вписаната в $\triangle ABC$ окръжност тогава и само тогава, когато четириъгълникът $ABB_{2006}A_{2006}$ е вписан. Последното е еквивалентно на

$$\begin{aligned} AB + A_{2006}B_{2006} = AA_{2006} + BB_{2006} \quad &\Leftrightarrow \quad AB + \frac{1}{2^{2006}}AB = \frac{2^{2006}-1}{2^{2006}}(AC+BC) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{AC+BC}{AB} = \frac{2^{2006}+1}{2^{2006}-1}. \end{aligned}$$

Задача 11.3. Да се намерят всички реални числа x, y, z, за които

$$a(\cos 2x + \cos 2y + \cos 2z) + 2(1-a)(\cos x + \cos y + \cos z) + 6 = 9a,$$

където a е целочислен параметър.

Решение: С помощта на формулата $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ записваме уравнението във вида

$$a(\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z) + (1-a)(\cos x + \cos y + \cos z) + 3 - 6a = 0.$$

Да разгледаме функцията $f(t) = at^2 + (1-a)t + 1 - 2a$, $t \in [-1, 1]$. Корените на квадратното уравнение $f(t) = 0$ са $t_1 = -1$ и $t_2 = \frac{2a-1}{a}$, $a \neq 0$. Имаме три възможности:

1) $a < 0$. Имаме $\frac{2a-1}{a} > 1$ и от свойствата на квадратната функция заключаваме, че $f(t) \geq 0$ за всяко $t \in [-1, 1]$, като $f(t) = 0$ тогава и само тогава, когато $t = -1$.

2) $a = 0$. Имаме $f(t) = t + 1 \geq 0$ за всяко $t \in [-1, 1]$, като $f(t) = 0$ тогава и само тогава, когато $t = -1$.

3) $a > 0$. Понеже a е цяло число, имаме $a \geq 1$. Сега $\frac{2a-1}{a} \geq 1$, като равенство се достига само при $a = 1$. От графиката на $f(t)$ се вижда, че $f(t) \geq 0$ за всяко $t \in [-1, 1]$, като $f(t) = 0$ за $t = -1$ при $a > 1$ и $f(t) = 0$ за $t = \pm 1$ при $a = 1$.

Тъй като разглежданото уравнение има вида $f(\cos x) + f(\cos y) + f(\cos z) = 0$, горните разсъждения показват, че решенията му са:

Ако $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 1$, то $\cos x = \cos y = \cos z = -1$, т.е. $x = (2k+1)\pi$, $y = (2l+1)\pi$, $z = (2m+1)\pi$, където $k, l, m \in \mathbb{Z}$.

Ако $a = 1$, то освен горното решение имаме още $\cos x = \cos y = \cos z = 1$, т.е. $x = 2r\pi$, $y = 2s\pi$, $z = 2t\pi$, където $r, s, t \in \mathbb{Z}$.

Задача 11.4. Едно число с 2006 цифри наричаме "лошо", ако всяко число, образувано от три негови последователни цифри, не се дели на 3.

а) Да се намери броят на "лошите" числа, в чиито десетичен запис участват само цифрите 1, 2 и 3.

б) Нека a и b са различни "лоши" числа, в чиито десетичен запис участват само цифрите 1, 2 и 3. Ако $a + b$ е лошо число и k е броят на разредите, в които a и b имат еднакви цифри, да се намерят всички възможни стойности на k.

Решение: а) Нека $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ е n-цифрено, $n > 1$, число, записано с 1, 2 и 3. Тъй като точно едно от числата $\overline{a_{n-1} a_n 1}$, $\overline{a_{n-1} a_n 2}$, $\overline{a_{n-1} a_n 3}$ се дели на 3, то две от числата $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n 1}$, $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n 2}$, $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n 3}$ са лоши, а едно не е. Следователно от едно n-цифрено ("лошо" или не) число, записано с 1, 2 и 3 чрез добавяне на една от тези цифри могат да се получат точно две $(n+1)$-цифрени "лоши" числа. Тъй като двуцифрените числа, записани с 1, 2 и 3, са 9, то търсеният брой е $9 \cdot 2^{2004}$.

б) Числата $122122\dots12212$ и $233233\dots23323$ са "лоши" числа, записани с 1, 2 и 3, чиято сума $355355\dots35535$ също е "лошо" число. Следователно $k=0$ е една от търсените стойности.

Нека $a = \overline{a_1a_2\dots a_n}$ и $b = \overline{b_1b_2\dots b_n}$ са "лоши" числа, чиято сума $a+b$ също е "лошо" число. Тогава $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}$, $b_i+b_{i+1}+b_{i+2}$ и $a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+b_i+b_{i+1}+b_{i+2}$ не се делят на 3. Това е възможно само когато $a_i+a_{i+1}+a_{i+2} \equiv b_i+b_{i+1}+b_{i+2} \equiv 1$ или $2 \pmod 3$. Ако две от цифрите a_i, a_{i+1}, a_{i+2} съвпадат със съответните цифри от b_i, b_{i+1}, b_{i+2}, то от горнот следва, че и третата цифра съвпада. Продължавайки това разсъждение, ще видим, че двете числа са равни, което е невъзможно.

Следователно измежду всеки три последователни цифри на a най-много една съвпада със съответната цифра на b. От друга страна, ако $a_i = b_i$, то $a_{i+3} = b_{i+3}$ (и аналогично $a_{i-3} = b_{i-3}$). Наистина, от $a_i+a_{i+1}+a_{i+2} \equiv b_i+b_{i+1}+b_{i+2} \pmod 3$ следва, че $a_{i+1}+a_{i+2} \equiv b_{i+1}+b_{i+2} \pmod 3$. Ако $a_{i+3} \neq b_{i+3}$, то $a_i+a_{i+1}+a_{i+2} \equiv b_i+b_{i+1}+b_{i+2} \pmod 3$ е невъзможно.

Следователно, ако $k>0$, то измежду всеки три последователни цифри на a точно една съвпада със съответната цифра на b. Това означава, че $a_1=b_1$, $a_2=b_2$ или $a_3=b_3$. Оттук получаваме $k=669$ или $k=668$.

Задача 12.1. Дадена е функцията $f(x) = \dfrac{x^2-2006x+1}{x^2+1}$.

а) Да се реши неравенството $f'(x) \geq 0$.

б) Да се докаже, че $|f(x)-f(y)| \leq 2006$ за произволни реални числа x и y.

Решение: а) Имаме

$$f'(x) = \frac{(2x-2006)(x^2+1)-2x(x^2-2006x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2006(x^2-1)}{(x^2+1)^2}.$$

Следователно $f'(x) \geq 0$ тогава и само тогава, когато $x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$.

б) *Първи начин.* От а) следва, че $f(x)$ расте пре $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ и намалява при $x \in (-1,1)$. Следователно най-голямата ѝ стойност е $f(-1)=1004$, а най-малката е $f(1)=-1002$. Оттук $|f(x)-f(y)| \leq |1004-(-1002)| = 2006$, за произволни x и y.

Втори начин. Множеството от стойностите на функцията $f(x)$ се състои от всички реални числа t, за които уравнението $\frac{x^2-2006x+1}{x^2+1} = t$ има поне едно решение. Това е изпълнено точно когато дискриминантата на квадратното уравнение $(1-t)x^2-2006x+(1-t)=0$ е неотрицателна, т.е. $2006^2-4(1-t)^2 \geq 0$. Оттук намираме $t \in [-1002,1004]$ и следователно $|f(x)-f(y)| \leq 2006$ за произволни x и y.

Трети начин. Неравенството $|f(x) - f(y)| \leq 2006$ е еквивалентно на

$$|(x-y)(xy-1)| \leq (x^2+1)(y^2+1).$$

Достатъчно е да докажем, че $(x^2+1)(y^2+1) \geq (x-y)(xy-1)$ за произволни x и y. За целта записваме неравенството във вида

$$x^2(y^2-y+1) + x(y^2+1) + (y^2-y+1) \geq 0.$$

Тъй като $y^2-y+1 > 0$ и $(y^2+1)^2 - 4(y^2-y+1)^2 = -(y-1)^2(3y^2-2y+3) \leq 0$ за всяко y, заключаваме, че даденото неравенство е изпълнено за произволни x и y.

Задача 12.2. Върху диаметър на окръжност с радиус $\sqrt{5}$ са взети точки M и N, равноотдалечени от центъра ѝ. През M е построена хорда AB, а през N е построена хорда AC така, че

$$\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{3}{MN^2}.$$

Да се намери разстоянието от центъра на окръжността до точките M и N.

Решение: Нека O е центърът на окръжността и нека PQ е диаметърът, върху който лежат M и N ($M \in PO, N \in QO$). Да означим $x = MO = NO$, $0 \leq x \leq \sqrt{5}$. Тогава

$$MA \cdot MB = MP \cdot MQ = (\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x) = 5 - x^2.$$

Аналогично $NA \cdot NC = 5 - x^2$. Оттук получаваме

$$\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{MA^2 + NA^2}{(5-x^2)^2}.$$

От формулата за медианата AO в $\triangle MNA$ имаме

$$5 = AO^2 = \frac{1}{4}(2(MA^2 + NA^2) - 4x^2),$$

т.е. $MA^2 + NA^2 = 2(5+x^2)$. Следователно

$$\frac{1}{MB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{2(5+x^2)}{(5-x^2)^2} = \frac{3}{4x^2},$$

тъй като $MN^2 = 4x^2$. Оттук $x^4 + 14x^2 - 15 = 0$, т.е. $x = 1$.

Задача 12.3. Да се намери максималният брой телефонни номера, които изпълняват следните три условия:

а) всички те са петцифрени числа, като могат да започват с 0;

б) във всеки номер участват най-много две различни;

в) изтриването на произволна цифра в два произволни номера (възможно в различни позиции) не води до две идентични редици с дължина 4.

Решение: Нека C е множество от телефонни номера, което удовлетворява условията а)–в) и което е с максимална мощност. Да означим с A множеството от телефонни номера от C, в които съществува цифра, която се среща 4 или 5 пъти, а с B – множеството от тези номера от C, в които съществува цифра, която се среща точно 3 пъти. Очевидно $C = A \cup B$. Тъй като C съдържа най-много един номер, в който фиксиран символ се появява 4 или 5 пъти, то $|A| \leq 10$.

Да означим с $B_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq 9$, множеството от номера, в които цифрата i се среща 3 пъти, а цифрата j се среща 2 пъти. Ще докажем, че максималният брой телефонни номера в $B_{i,j} \cup B_{j,i}$ е 4. Без ограничение на общността можем да разгледаме случая $i = 0$, $j = 1$. Да означим с a_i броя на телефоните от $B_{0,1} \cup B_{1,0}$ с точно i блока. (Редицата ot simvoli $a_i, \ldots, a_j$ се нарича блок, ако $a_{i-1} \neq a_i = \cdots = a_j \neq a_{j+1}$.) Ако допуснем, че $|B_{0,1} \cup B_{1,0}| = 5$, то

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 5 \\ 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 &\leq 14 \end{aligned}$$

Последното неравенство следва от факта, че никои два номера нямат обща подредица с дължина 4. При това непосредствено се проверява, че $a_2 \leq 2$ и $a_3 \leq 2$. Следователно единствената възможност е $a_2 = a_3 = 2$, $a_4 = 1$. Такова множество от номера задължително съдържа 01110 и 10001. Сега е очевидно, че към тези два номера не може да бъде добавен телефонен номер, съставен от два блока.

От друга страна, възможно е да намерим четири думи в $B_{0,1} \cup B_{1,0}$, които удовлетворяват в), например

$$B_{0,1} \cup B_{1,0} = \{10001,\ 01010,\ 11100,\ 00111\}.$$

Множеството C може да се представи като

$$C = A \cup B = A \cup \left(\cup_{0 \leq i < j \leq 9} B_{i,j} \cup B_{j,i}\right).$$

Ясно е, че изборът на номерата в $B_{i,j} \cup B_{j,i}$ не влияе на избора на номерата в $B_{k,l} \cup B_{l,k}$ при $(i,j) \neq (k,l)$. Ясно е също така, че в A могат да бъдат избрани 10 номера, които да не влияят на избора на останалите номера от C, например

$$A = \{00000, 11111, \ldots, 99999\}.$$

Следователно търсеният максимален брой е

$$\begin{aligned}
|C| &= |A| + \sum_{0\le i<j\le 9} |B_{i,j} \cup B_{j,i}| \\
&= 10 + \binom{10}{2} \cdot 4 \\
&= 10 + 45 \cdot 4 = 190.
\end{aligned}$$

Задача 12.4. Нека O е центърът на описаната окръжност около равнобедрен триъгълник ABC с основа AB. Правата AO пресича бедрото BC в точка D. Известно е, че $|BD|$ и $|CD|$ са цели числа, а $|AO| - |CD|$ е просто число. Да се намерят тези три числа.

Решение: Да означим $AO = R$, $BD = b$, $CD = c$ и $OD = d$. Тъй като CO е ъглополовяща в $\triangle ACD$, то

$$\frac{d}{R} = \frac{c}{b+c}.$$

От друга страна, ако правата AO пресича описаната окръжност в точка E, то от свойството на секущите AE и BC следва, че

$$(R+d)(R-d) = bc.$$

Като заместим $d = \dfrac{cR}{b+c}$, получаваме

$$R^2 = \frac{(b+c)^2 c}{b+2c}.$$

Нека

$$k = (b, c, R),\ m = \left(\frac{b}{k}, \frac{c}{k}\right),\ R_1 = \frac{R}{k},\ b_1 = \frac{b}{km} \text{ и } c_1 = \frac{c}{km}.$$

Тогава

$$R_1^2 = \frac{m^2(b_1+c_1)^2 c_1}{b_1 + 2c_1}.$$

Понеже $(m, R_1) = 1$ и

$$(b_1 + 2c_1, b_1 + c_1) = (b_1 + 2c_1, c_1) = (b_1, c_1) = 1,$$

получаваме $R_1^2 = (b_1 + c_1)^2 c_1$ и $m^2 = b_1 + 2c_1$. Следователно c_1 е точен квадрат, например $c_1 = n^2$. Тогава $c = kmc_1 = kmn^2$, $b = kmb_1 = km(m^2 - 2n^2)$, както и $R = kR_1 = kn(m^2 - n^2)$.

Тъй като $1 > \sin \measuredangle BAC = \frac{b+c}{2R} = \frac{m}{2n}$, то $\sqrt{2}n < m < 2n$. (Обратно, при това условие триъгълникът съществува и е остроъгълен, т.е. правата AO пресича бедрото BC.) В частност, $n \geq 2$. Понеже $R - c = kn(m^2 - n^2 - mn)$ е просто число, следва, че n е просто числа, $k = 1$ и $m^2 - n^2 - mn = 1$, т.е. $(m-1)(m+1) = n(m+n)$. Имаме две възможности:

1) $m - 1 = ln$. Тогава $l(ln + 2) = ln + 1 + n$, т.е.

$$n = \frac{1 - 2l}{l^2 - l - 1}.$$

Последното число е отрицателно при $l \geq 2$. Следователно $l = 1$ и оттам $n = 1$, което е противоречие.

2) $m + 1 = ln$. Тогава $l(ln - 2) = ln - 1 + n$, т.е.

$$n = \frac{2l - 1}{l^2 - l - 1}.$$

Последното число не надминава 1 при $l \geq 3$, а при $l = 1$ е равно -1. Остава $l = 2$ и оттам

$$n = R - c = 3,\ m = 5,\ b = 35 \text{ и } c = 45.$$

Автори на задачите:

Петър Бойваленков: 9.1, 9.4
Стоян Атанасов: 9.2, 9.3
Ивайло Кортезов: 10.2, 10.4
Керопе Чакърян: 10.1, 10.3
Емил Колев: 11.1, 11.4
Александър Иванов: 11.2, 11.3
Олег Мушкаров: 12.1, 12.2
Иван Ланджев: 12.3
Николай Николов: 12.4