НЯКОИ НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ ПЕРИМЕТРИ НА ТРИЪГЪЛНИЦИ

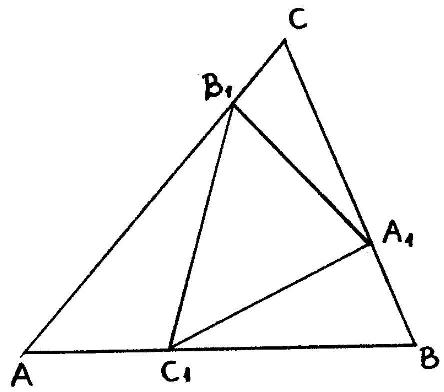
Емил Янков Стоянов

В статията е разгледана конструкцията "триъгълник, вписан в триъгълник", формулирани са и са доказани твърдения, свързани с периметрите на участващите в конструкцията триъгълници в общия случай и по-специално, когато върховете на вписания триъгълник са петите на чевианите на външния триъгълник или пък петите на перпендикулярите, спуснати към страните на външния триъгълник от вътрешна за него точка.

Известна е конструкцията "триъгълник, вписан в триъгълник" (черт. 1) (A_1, B_1 и C_1 са произволни точки съответно от страните BC, CA и AB на ΔABC) и свързаните с нея твърдения:

I. (Ердьош) "Поне едно от лицата на триъгълниците AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C не надминава лицето на $\Delta A_1B_1C_1$". (Доказано от Де Брунер – 1956 г.)

II. (VIII МОМ, 1966 г. – София) "Поне едно от лицата на триъгълниците AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C не надминава $\frac{1}{4}$ от лицето на ΔABC". (Предложена от Полша).



черт.1

Ще отбележим, че второто твърдение следва лесно от първото.

Наистина, ако $S_{A_1B_1C_1} > \frac{1}{4}S_{ABC}$ (с S_{XYZ} означаваме лицето на ΔXYZ), то поне едно от $S_{AB_1C_1}$, $S_{A_1BC_1}$ и $S_{A_1B_1C}$ няма да надминава $\frac{1}{4}S_{ABC}$, защото в противен случай

$$S_{ABC}=S_{AB_1C_1}+S_{A_1BC_1}+S_{A_1B_1C}+S_{A_1B_1C_1}>4\cdot\frac{1}{4}S_{ABC}=S_{ABC}.$$

Ако $S_{A_1B_1C_1} \le \frac{1}{4}S_{ABC}$, то от **I** всичко е ясно!

Логично е да възникне въпроса има ли аналогични твърдения за периметрите на триъгълниците от същата конфигурация, т.е. верни ли са твърденията:

III. "Поне един от периметрите на триъгълниците AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C не надминава периметъра на $\Delta A_1B_1C_1$".

IV. "Поне един от периметрите на триъгълниците AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C не надминава $a.P_{ABC}$ (с P_{XYZ} означаваме периметъра на ΔXYZ), където a е константа, по-малка или равна на 1 и независеща от вида на триъгълника".

Отговорът на **IV** е положителен и се доказва сравнително лесно , защото ако допуснем, че всеки от периметрите на триъгълниците AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C е по-голям от $\frac{2}{3}.P_{ABC}$, то

$$P_{AB_1C_1}+P_{A_1BC_1}+P_{A_1B_1C} > \cancel{3}\cdot\frac{2}{\cancel{3}}P_{ABC}=2P_{ABC},$$

но $$P_{AB_1C_1}+P_{A_1BC_1}+P_{A_1B_1C} = P_{ABC} + P_{A_1B_1C_1},\text{ т.е.}$$

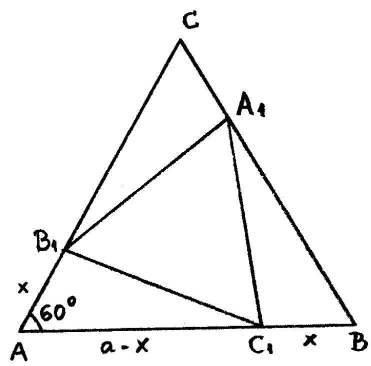
$$P_{ABC} + P_{A_1B_1C_1} > 2P_{ABC} \text{ от където}$$

$$P_{A_1B_1C_1} > P_{ABC},$$

което, лесно се вижда, е невъзможно!

От друга страна, нека ΔABC е равностранен (черт. 2) със страна a и $AB_1=BC_1=CA_1=x$. Тогава

$$P_{AB_1C_1} = P_{A_1BC_1} = P_{A_1B_1C} = a+\sqrt{a^2-3x(a-x)}$$



черт.2

и $\quad P_{AB_1C_1} \le 2a$, защото

$$a + \sqrt{a^2 - 3x(a-x)} \le 2a \iff 3x(a-x) \ge 0,$$

което е очевидно вярно, като “=” се достига при $x = a$ или $x = 0$, т.е. $\Delta A_1B_1C_1$ съвпада с ΔABC.

Но $\frac{2}{3}P_{ABC} = \frac{2}{3}\cdot 3a = 2a$

И така $P_{AB_1C_1}$ = $P_{A_1BC_1}$ = $P_{A_1B_1C}$ $\le \frac{2}{3}P_{ABC}$, като “=”-то се достига.

Следователно отговорът на **IV** е $a = \frac{2}{3}$.

Сега ще се спрем на два частни случая за конфигурацията от черт.1 и ще докажем за тях нещо повече от общия случай **III**. А именно:

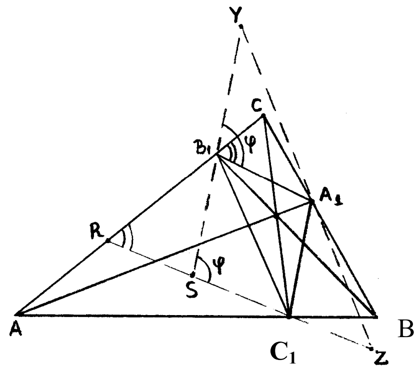
V. “Ако AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка, то измежду периметрите на AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C поне един не надминава $P_{A_1B_1C_1}$ и поне един е по-голям или равен на $P_{A_1B_1C_1}$.”

VI. “Ако A_1, B_1 и C_1 са петите на перпендикулярите, спуснати от вътрешна точка X за ΔABC (A_1, B_1 и C_1 са от страните), то измежду периметрите на триъгълниците AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C поне един не надминава $P_{A_1B_1C_1}$ и поне един е по-голям или равен на $P_{A_1B_1C_1}$.” (Авторът предложи това твърдение като задача на МОМ в САЩ през 2001г. И тя бе включена в селекцията).

Първо ще докажем **V**.

Доказателство на V:

При условията на твърдението съществува точка S (черт.3) от ΔABC такава, че четириъгълникът с върхове A_1, B_1, C_1 и S е успоредник (вж. [1]). Нека за определеност $S \in \Delta AB_1C_1$.



черт.3

Тогава $P_{A_1B_1C_1} = P_{B_1C_1S} \le P_{AB_1C_1}$, т.е. $P_{AB_1C_1} \ge P_{A_1B_1C_1}$ и втората част на твърдението е доказана!

Сега да построим права, успоредна на B_1C_1 през точка A_1 и пресичаща лъчите SB_1 и SC_1 съответно в точките Y и Z. Нека $\angle A_1B_1Y = \angle C_1SB_1 = \varphi$. Тогава $\angle A_1B_1C = \angle C_1RC \le \varphi$ (φ е външен ъгъл за ΔRSB_1, като "=" се достига при $S \equiv R$), т.е.

(1) $\angle A_1B_1Y \ge \angle A_1B_1C$

Аналогично получаваме

(2) $\angle A_1C_1Z \ge \angle A_1C_1B$

От равенствата $\angle B_1A_1C + \angle B_1A_1C_1 + \angle C_1A_1B = 180°$ и

$$\angle B_1A_1Y + \angle B_1A_1C_1 + \angle C_1A_1Z = 180°$$

пък следва, че не може едновременно да са изпълнени неравенствата

$$\angle B_1A_1C > \angle B_1A_1Y \text{ и}$$
$$\angle C_1A_1B > \angle C_1A_1Z$$

Нека $\angle B_1A_1C \le \angle B_1A_1Y$ (както е на черт.3)

Това и (1) дава, че точка C е вътрешна за ΔB_1A_1Y.

(Ако $\angle C_1A_1B \le \angle C_1A_1Z$ от (2) пък следва, че $B \in \Delta C_1A_1Z$).

Вече е ясно, че $P_{B_1A_1C} \le P_{B_1A_1Y} = P_{A_1B_1C_1}$ като "=" се достига когато A_1, B_1 и C_1 са средите на страните на ΔABC, с което доказахме и първата част на твърдението **V**.

(Ако $S \in \Delta A_1BC_1$ или $S \in \Delta A_1B_1C$, разсъжденията са аналогични).

Доказателство на твърдение VI:

Първо ще докажем следната

Лема: При условията на твърдението винаги съществува точка S вътре или по контура на ΔABC и такава, че върховете на поне един от триъгълниците (черт.4) AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C заедно с S са върхове на успоредник.

Доказателство на лемата:

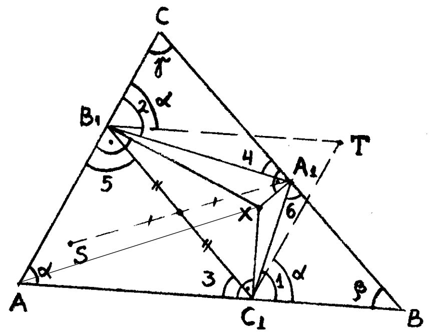
Да въведем означенията

$\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle BCA=\gamma$,

$\angle A_1C_1B=\angle 1$, $\angle CB_1A_1=\angle 2$,

$\angle AC_1B_1=\angle 3$, $\angle B_1A_1C=\angle 4$,

$\angle AB_1C_1=\angle 5$, $\angle C_1A_1B=\angle 6$



черт.4

Ако $\angle 1\geq\alpha$ и $\angle 2\geq\alpha$, то A_1 е в успоредника AC_1TB_1 ($C_1T||AC$, $B_1T||AB$) и следователно симетричната точка на A_1 относно средата на B_1C_1 е в ΔAC_1B_1, т.е. това ще е търсената точка S.

Аналогични са разсъжденията, ако $\angle 3\geq\beta$ и $\angle 4\geq\beta$ или $\angle 5\geq\gamma$ и $\angle 6\geq\gamma$.

Да допуснем, че не е изпълнен нито един от горните три случая. Без да ограничаваме общността можем да приемем, че $\angle 1<\alpha$. Тогава $\angle 6>\gamma$ (от ΔA_1BC_1 и $\angle 1+\angle 6+\beta=180°$) и следователно $\angle 5<\gamma$ (от допускането!), от което пък следва $\angle 3>\beta$ (както преди малко, но от ΔAB_1C_1) и значи $\angle 4<\beta$ (отново от допускането), което пък води до $\angle 2>\alpha$ (от ΔA_1B_1C). От всичко това получаваме

$\angle 1<\angle 2$, $\angle 3>\angle 4$ и $\angle 5<\angle 6$.

Но от □AC_1XB_1 вписан в окръжност, следва $\angle AXB_1=\angle 3$. Аналогично $\angle CXB_1=\angle 4$.

$$AX=\frac{XB_1}{\cos\angle 3}>\frac{XB_1}{\cos\angle 4}=CX, \text{ т.е.}$$

(1) $AX>CX$

По същия начин от $\angle 6>\angle 5$ и $\angle 2>\angle 1$ следват неравенствата $BX>AX$ и $CX>BX$, което заедно с (1) води до противоречивата верига

AX>CX>BX>AX !

Следователно допускането не е вярно, т.е. изпълнен е един от трите случая, за които стана въпрос в началото. С това лемата е доказана!

От тук нататък доказателството на **VI** е точно повторение на доказателството на **V**, но имайки впредвид черт.4.

Накрая ще отбележим, че втората част на твърденията **V** и **VI** не е изпълнена в общия случай, т.е. не можем да допълним **III** с твърдението, че поне един от периметрите на триъгълниците AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C е по-голям или равен на $P_{A_1B_1C_1}$, което е ясно от доказателството на **IV**. Там при $x \neq \frac{a}{2}$ имаме (черт.2)

$P_{A_1B_1C_1} = 3\sqrt{a^2 - 3x(a-x)}$,

$P_{AB_1C_1} = P_{A_1BC_1} = P_{A_1B_1C} = a + \sqrt{a^2 - 3x(a-x)}$ и

$3\sqrt{a^2 - 3x(a-x)} > a + \sqrt{a^2 - 3x(a-x)} \Leftrightarrow 3(a-2x)^2 > 0$, което при направеното предположение за x е очевидно вярно!

И така $P_{A_1B_1C_1} > P_{AB_1C_1} = P_{A_1BC_1} = P_{A_1B_1C}$.

С това съдържанието на настоящия материал е изчерпано.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Стоянов. Някои геометрични оценки в триъгълник, *Математика и математическо образование*, София, 1993 г., 274-275.

Емил Янков Стоянов
ж.к. Плиска
бл.6, ет.9, ап.53
3700 Видин, България