МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, 2004
MATHEMATICS AND EDUCATION IN MATHEMATICS, 2004
Proceedings of the Thirty Third Spring Conference of
the Union of Bulgarian Mathematicians
Borovets, April 1–4, 2004

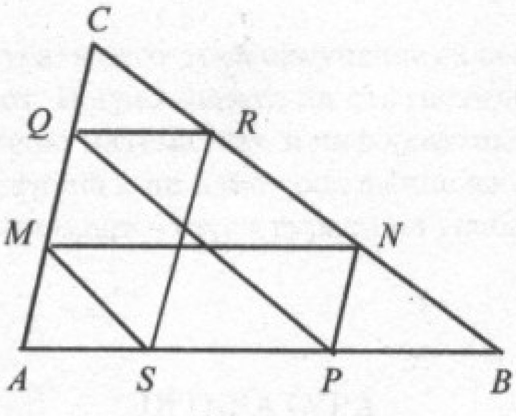
ЕДНА УСПОРЕДНА ТРАЕКТОРИЯ В ЧЕТИРИЪГЪЛНИК

Емил Я. Стоянов

В тази статия се разглежда един аналог на „Фигурата на Томзен" за произволен четириъгълник.

На страниците на [1], а и не само там, можем да срещнем следното твърдение:

I. Ако M е произволна точка от страната AC на триъгълника ABC (Черт. 1) ($M \neq A$, $M \neq C$) и $MN \| AB$ ($N \in BC$), $NP \| AC$ ($P \in AB$), $PQ \| BC$ ($Q \in AC$), $QR \| AB$ ($R \in BC$) и $RS \| AC$ ($S \in AB$), то $SM \| BC$. (Ако M е средата на AC, то $N \equiv R$, $M \equiv Q$ и $P \equiv S$).



Черт. 1

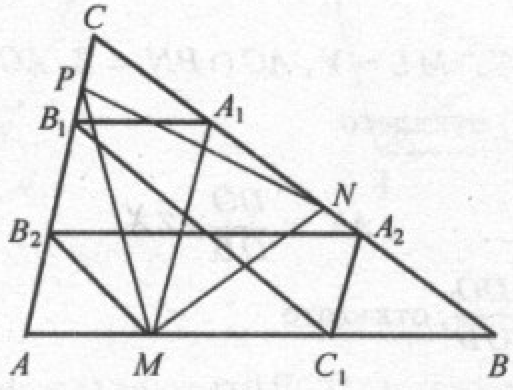
За да докажем твърдението е достатъчно да приложим няколко пъти теоремата на Талес, а именно $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{BP}{BA} = \dfrac{RQ}{BA} = \dfrac{AS}{BA}$ т.е. $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AS}{BA}$ и от обратната теорема на теоремата на Талес получаваме $SM \| BC$. Съществено използвахме и факта, че четириъгълниците $ASRQ$ и $PBRQ$ са успоредници.

Така получената конфигурация е известна като „Фигура на Томзен". Освен, че е един красив геометричен факт, фигурата може да намери приложение и при решаването на други задачи в съчетание с известните твърдения:

II. „Лицето на триъгълник, разположен в успоредник, не надминава половината от лицето на успоредника." и

III. „Лицето на успоредник, разположен в триъгълник, не надминава половината от лицето на триъгълника.", фигурата на Томзен ни дава елегантно решение на следната задача от VIII МОМ в София:

Задача. *Ако точките M, N и P са съответно от страните AB, BC и CA на триъгълника ABC, то поне едно от лицата на триъгълниците MNB, NPC и PMA не надминава $\frac{1}{4}$ от лицето на ABC. (Черт. 2).*



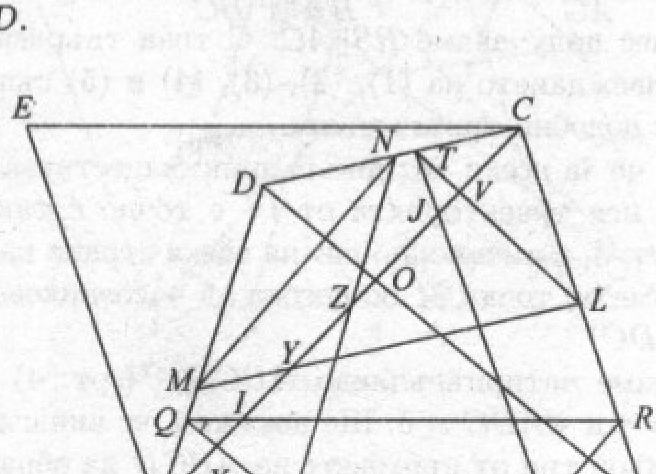
Черт. 2

Решение: Да построим фигурата на Томзен за точка M. Това е начупената линия $MA_1B_1C_1A_2B_2M$. Ако $P \in AB_1$, то триъгълникът AMP попада в успоредника MA_1B_1A и от твърдения II и III всичко е ясно.

Нека $P \in B_1C$. Тогава, ако $N \in CA_2$, то NPC се се съдържа в успоредника $C_1A_2CB_1$, ако $N \in BA_2$, то триъгълник MNB се съдържа в успоредника MBA_2B_2. С това задачата е решена.

Логично възниква въпросът: „Има ли подобна фигура за четириъгълник?“ Имайки предвид, че една от съществените разлики между триъгълник и четириъгълник е появата на два диагонала във втория, ще докажем следното твърдение:

IV. Ако четириъгълникът $ABCD$ е разположен в успоредника $ABCE$ (Черт. 3), а за произволна точка M от страната AD ($M \neq A$, $M \neq D$) построим начупената линия $MNPQRSTLM$ така, че $MN \| AC$ ($N \in CD$), $NP \| AD$ ($P \in AB$), $PQ \| BD$ ($Q \in AD$), $QR \| AB$ ($R \in BC$), $RS \| AC$ ($S \in AB$), $ST \| BC$ ($T \in CD$) и $TL \| BD$ ($L \in BC$), то $LM \| CD$.



Черт. 3

Начупената линия ще наречем „траектория на т. M". Първо ще докажем твърдението, когато разположението на точките от траекторията е точно както на чертежа, а след това ще поясним, че то наистина е такова. Ще приемем, че обхождаме траекторията от R към Q, а не от M към N и ще докажем, че $RS \| AC$. (Оставяме на читателя да съобрази, че това е равносилно на обхождането от M към N и доказването на $LM \| CD$).

Нека $AC \cap PQ = X$, $AC \cap ML = Y$, $AC \cap PN = Z$, $AC \cap TL = V$, $AC \cap BD = O$. Тогава $\frac{AX}{XZ} = \frac{QX}{XP} = \frac{DO}{OB}$, откъдето

(1) $$AX = \frac{DO}{OB} \cdot ZX$$

Освен това $\frac{CV}{VY} = \frac{TV}{VL} = \frac{DO}{OB}$, откъдето

(2) $$CV = \frac{DO}{OB} \cdot VY$$

От друга страна четириъгълниците $AZNM$ и $CYMN$ са успоредници, което с използване на (1) и (2) дава

(3) $$AX = CV.$$

Ако $AC \cap RQ = I$ и $AC \cap TS = J$, то $\frac{XI}{AX} = \frac{QX}{XP} = \frac{DO}{OB} = \frac{TV}{VL} = \frac{VJ}{CV}$, т.е $\frac{AX}{XI} = \frac{CV}{VJ}$ и от (3) получаваме

(4) $$XI = VJ.$$

Сега от (3) и (4) $AI = AX + XI = CV + VJ = CJ$, т.е.

(5) $$AI = CJ$$

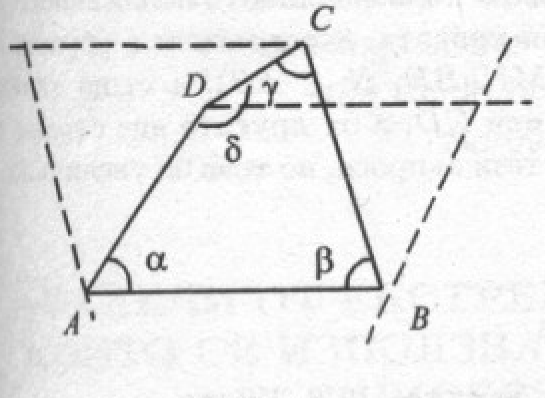
Но $\frac{BS}{BA} = \frac{CJ}{CA}$ и $\frac{BR}{BC} = \frac{AI}{AC}$ и от (5) $\Rightarrow \frac{BS}{BA} = \frac{BR}{BC}$, откъдето от обратната теорема на теоремата на Талес получаваме $RS \| AC$. С това твърдението е доказано. Ще отбележим, че при извеждането на (1), (2), (3), (4) и (5) съществено използвахме теоремата на Талес и подобни триъгълници.

Сега ще докажем, че за всеки четириъгълник съществува такава страна, че за произволна точка от нея траекторията от IV е точно с такова разположение на точките, както на черт. 3, а именно, по две на всяка страна на четириъгълника при положение, че тръгваме от точка M по посока на часовниковата стрелка (в случая с черт. 3 от AD към DC).

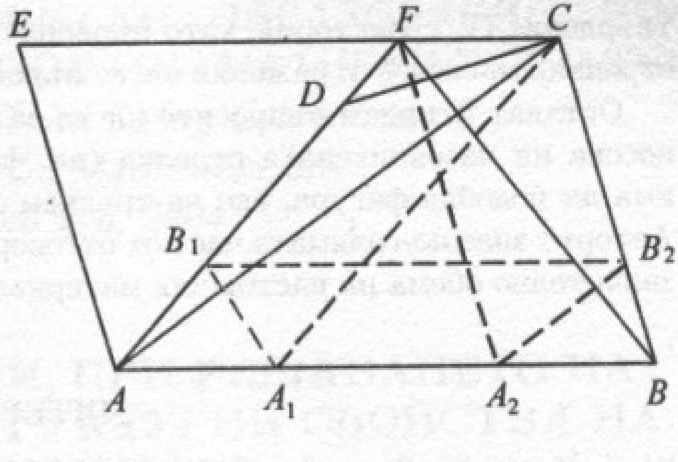
Първо да разгледаме четириъгълника $ABCD$ (Черт. 4) и нека $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle BCD = \gamma$ и $\sphericalangle ADC = \delta$. Ще докажем, че винаги съществува точка E такава, че заедно с някои три от върховете на $ABCD$ да образуват успоредник, т.е че четириъгълникът $ABCD$ е разположен в успоредник, както на черт. 3.

Ясно е, че ако $\alpha + \beta > 180°$, $\beta + \gamma > 180°$, $\gamma + \delta > 180°$ и $\delta + \alpha > 180°$, то събирайки еднопосочните неравенства ще получим $\alpha + \beta + \gamma + \delta > 360°$, което е невъзможно!

Следователно, без да ограничаваме общността, можем да предположим, че $\alpha + \beta \leq$



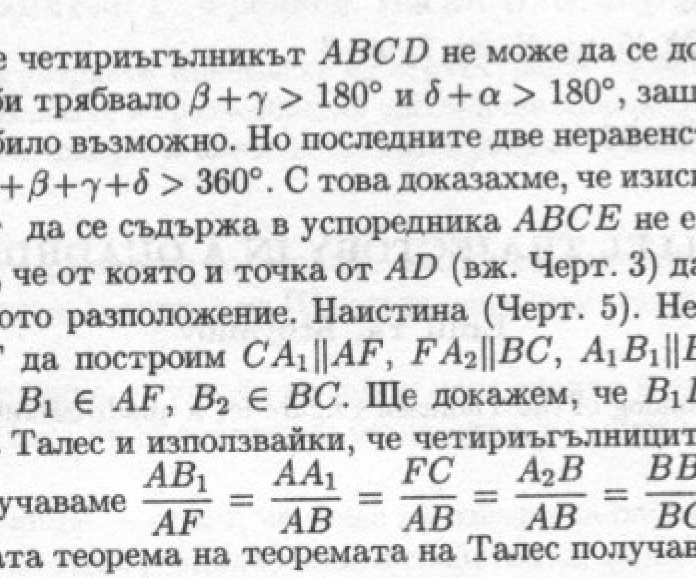
Черт. 4



Черт. 5

$180°$. Да допуснем, че четириъгълникът $ABCD$ не може да се допълни с точка E до успоредник. Тогава би трябвало $\beta+\gamma > 180°$ и $\delta+\alpha > 180°$, защото в противен случай допълването би било възможно. Но последните две неравенства отново ни водят до противоречието $\alpha+\beta+\gamma+\delta > 360°$. С това доказахме, че изискването в твърдение IV четириъгълникът да се съдържа в успоредника $ABCE$ не е ограничение.

Сега ще покажем, че от която и точка от AD (вж. Черт. 3) да „тръгнем“, винаги ще се получава същото разположение. Наистина (Черт. 5). Нека $AD^{\rightarrow} \cap CE = F$ и за трапеца $ABCF$ да построим $CA_1 \| AF$, $FA_2 \| BC$, $A_1B_1 \| BF$, $A_2B_2 \| AC$, като $A_1 \in AB$, $A_2 \in AB$, $B_1 \in AF$, $B_2 \in BC$. Ще докажем, че $B_1B_2 \| AB$. Прилагайки отново теоремата на Талес и използвайки, че четириъгълниците AA_1CF и A_2BCF са успоредници, получаваме $\dfrac{AB_1}{AF} = \dfrac{AA_1}{AB} = \dfrac{FC}{AB} = \dfrac{A_2B}{AB} = \dfrac{BB_2}{BC}$, т.е $\dfrac{AB_1}{AF} = \dfrac{BB_2}{BC}$, откъдето по обратната теорема на теоремата на Талес получаваме $B_1B_2 \| FC$.



Черт. 6

Сега вече от Черт. 6 е ясно, че „проблематичната“ точка T остава върху CD и по-точно върху CG, където $G = CD \cap A_2F$. С това поставената задача е решена. Доказахме, че за произволен четириъгълник $ABCD$ винаги съществува страна, която е такава, че ако за произволна точка M от нея започнем да описваме споменатата в твърдение IV траектория, като първоначално тръгнем по посока на часовниковата стрелка, то след 7 отражения ще се върнем отново в първоначалното положение.

Остават открити въпросите ще се затвори ли кривата, ако тръгнем в обратна посока на часовниковата стрелка (на Черт. 3 $MN \| BD$, $N \in AB$), а също така има ли подобна фигура, ако не тръгнем от AD или CD, а от другите две страни. Авторът знае по-голямата част от отговорите на тези въпроси, но това би увеличило значително обема на настоящия материал.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Х. Кокстер. Вечната геометрия, София, Наука и изкуство, 1979, 259 стр.

Емил Янков Стоянов
ул. „Княз Борис I“ № 45, вх. Б, ет. 2, ап. 3
3700 Видин
e-mail: estoyanov@abv.bg

A PARALLEL TRAJECTORY IN A QUADRILATERAL

Emil Ya. Stoyanov

In this paper an analog of the Thomsen's figure for a quadrilateral is constructed.