<u>Как да измислим задача за Международната Олимпиада по Математика?</u>

Това е лесно. Просто трябва да хванем една добре известна геометрична конфигурация. Например тази от **черт.1**. Всички знаем, че височините в остроъгълния триъгълник ABC се пресичат в една точка – ортоцентърът H на триъгълника, а също така, че около четириъгълниците $ABPT, BCTD, CADP$ могат да се опишат съответно окръжностите $k_1, k_2,$ и k_3. Учи се в 8-ми клас от всички. Банално, нали? Нека погледнем по-внимателно и да видим какво още може да изцедим от тази конфигурация?

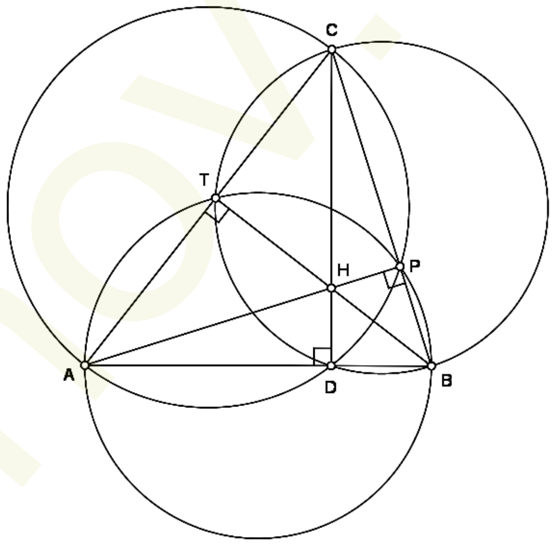
Ами да означим пресечната точка на k_1 и CD със Z, на k_2 и AP - с X, на k_3 и BT - с Y и да ги свържем с върховете на триъгълника, какво друго? Така получаваме **черт. 2**. Да ви се струва, че $AZ = AY$, $BZ = BX$ и $CX = CY$?

Нека опитаме да го докажем!

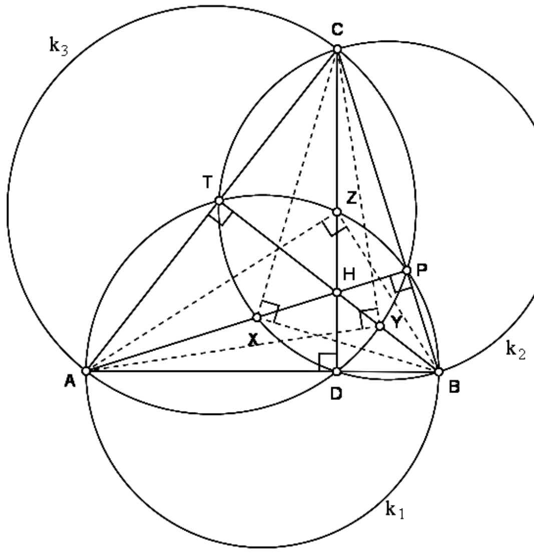
Ясно е, че $\angle AZB = 90^0$ (AB все пак е диаметър на k_1, нали?) и от метричните зависимости в правоъгълния триъгълник намираме $AZ^2 = AD.AB$ **(1)**. Е, да, ама от правоъгълния триъгълник CAY получаваме както преди малко $AY^2 = AT.AC$ **(2)**. Остана да забележим, че от свойството на секущите на k_2 през точката A следва $AD.AB = AT.AC$ и от **(1)** и **(2)** $AZ = AY$. Аналогично доказваме и $BZ = BX$, както и $CX = CY$. Предположенията ни се оказаха верни.

Какво да измислим още? Ами то е на чертежа. Ако означим пресечната точка на AY и BX с M и свържем C с M, е ясно, че $\Delta MCX \cong \Delta MCY$ (правоъгълни с обща хипотенуза и по един катет) и следователно $MX = MY$.

И това е всичко приятели! Както обикновено правят авторите на задачите за състезания и олимпиади, да изтрием част от чертежа и да оставим това, което е на **черт. 3**. Условието на пета задача на тазгодишната МОМ(втората по трудност задача!!!), проведена в Аржентина, гласи следното (буквичките са променени!):



Черт.1



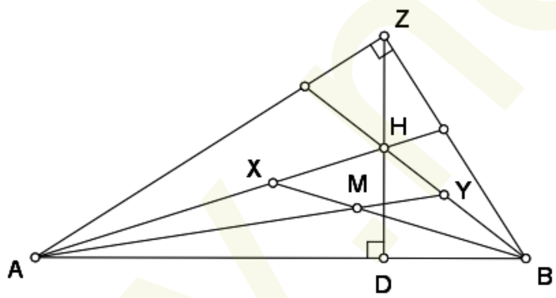
Черт.2

Нека ZD ***е височината към хипотенузата в правоъгълния триъгълник*** ABZ***.*** H ***е произволна точка от отсечката*** ZD***. Точката*** X ***лежи върху*** AH ***и*** $BZ = BX$***. Точката*** Y ***лежи върху*** BH ***и*** $AZ = AY$***. Ако*** M ***е пресечната точка на*** AY ***и*** BX***, да се докаже, че*** $MX = MY$***.***

Виждате ли разлика с току-що доказаното? Има. Малко по-горе просто точката H не беше произволна, а X и Y лежаха на k_2 и k_3, които тук ги няма.

Можем ли да решим задачата от МОМ като използваме по-горните разсъждения?

Можем.



Черт.3

Нека опишем окръжност около триъгълника ABZ, която пресича лъчите AH и BH съответно в точките P и T (тук би трябвало да гледате черт. 2). Нека пресечната точка на AT и BP е C. Тъй като в триъгълника ABC точката H е ортоцентър (пресечна точка на височините AP и BT), то CD е третата височина в ABC. Отново имаме $AZ^2 = AD.AB$, а следователно $AY^2 = AD.AB \Leftrightarrow \angle AYD = \angle ABY$. Но $\angle ABY = \angle ACD \Rightarrow \angle AYD = \angle ACD$, т.е Y лежи на k_3. Аналогично доказваме, че X лежи на k_2. Нататък всичко е както в нашата задача! Да умре човек от яд, че не се е сетил той, нали? Но какво да се прави, има и други такива познати конфигурации, от които може да се изтиска нещо ценно и ново.

Дерзайте!

Автор: Емил Стоянов
ПМГ – Видин
27.07.2012 г.