1995г.

Задача 1. Да се намерят най-малката и най-голямата стойност на функцията: $f(x) = 8^{-x^2} - 4^{-x^2} + 2$.

Задача 2. Върху по-малките дъги $\overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{CA}, \overset{\frown}{AB}$ на описаната около равностранния триъгълник ABC окръжност са избрани съответно точките A_1, B_1, C_1 по такъв начин, че триъгълникът $A_1B_1C_1$ е също равностранен. Да се докаже, че:

а) Ако отсечката A_1B_1 пресича отсечките CA и CB съответно в точките P и Q, то лицето на триъгълника CPQ е равно на

$$\frac{1}{3} Stg\,\frac{\alpha}{2} \cot g\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right),$$

където S е лицето на триъгълника ABC и $\alpha = \angle$ CPQ;

б) Ако T е лицето на общата част на триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$, то $3T \geq 2S$.

Задача 3. Дадена е правилна четириъгълна пирамида QABCD с основа ABCD. През върха A е прекарана равнина λ, перпендикулярна на ръба QC, която пресича ръба QC във вътрешна точка. Ако е известно, че лицето на полученото сечение е два пъти по-малко от лицето на основата, да се намери отношението на обемите на телата, на които се разделя дадената пирамида от равнината λ.

Задача 4. Нека x и y са реални числа, такива че $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 20 = 0$. Да се докаже, че $y + 7 - 3\sqrt{2} \leq x \leq y + 7 + 3\sqrt{2}$.

Време за работа – 5 часа.

1997г.

Задача 1. Дадени са уравненията $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 - qx + p = 0$. Да се намерят p и q, така че всяко от числата –1, 1, 2, 3 да е корен на поне едно от дадените уравнения.

Задача 2. Да се намерят мерките на острите ъгли (в градуси или радиани) на правоъгълен триъгълник ABC, ако ъглополовящата на правия ъгъл CL (L∈AB) се разделя от центъра I на вписаната окръжност в отношение $\frac{CI}{IL} = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Задача 3. Дадена е правилна четириъгълна пирамида SABCD с основа ABCD. Върху ръба SC е дадена точка M, такава че SM:SC=k. Да се

намери k, ако е известно, че равнината през точките A, B и M разделя пирамидата на две равнообемни части.

Задача 4. Да се докаже, че ако $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < \frac{x}{\sin x} + \frac{x}{tgx} < 2$.

Време за работа – 5 часа.

1998г.

Задача 1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които неравенството

$$a.4^{x^2} + (a-1).2^{x^2+2} + a - 1 > 0$$

е изпълнено за всяко реално число x.

Задача 2. Даден е остроъгълен триъгълник ABC, в който M е средата на AB, H е неговият ортоцентър, CL е ъглополовяща и CP е височина (L и P са точки от AB). Ако CH=2, HP=1 и ML:LP=1:2, да се намери дължината на CM.

Задача 3. Околните ръбове на правилна триъгълна пирамида SABC с връх S имат дължина l. Върху ръба SA е взета точка M, за която AM:MS=1:2. Центърът на окръжността, описана около триъгълника BCM, лежи на височината на пирамидата през върха S. Да се намери обемът на пирамидата.

Задача 4. Да се докаже, че функцията $f(x) = 4x^4 - 24x^2 + 16x - 3$ има три локални екстремума, стойностите на които са отрицателни числа.

Време за работа – 5 часа.

1999г.

Задача 1. а) Да се докаже, че за всяко естествено число n>1 е в сила неравенството $3^n > 2n + 1$.

б) Да се намерят всички цели числа x, които удовлетворяват уравнението

$$3^{2x+1} - x.3^{x+1} - 3^x - 6x^2 - 7x - 2 = 0.$$

Задача 2. Четириъгълникът ABCD е вписан в окръжност с радиус 1, като AB=2, ∠BAD=α и ∠ABC=β.

а) Да се изрази чрез α и β лицето S на четириъгълника ABCD.

б) Ако $\alpha=\beta$, да се намери стойността на α, за която лицето S на четириъгълника ABCD е най-голямо.

Задача 3. Даден е кубът ABCDA'B'C'D' с ръб a. Нека P е средата на ръба AB, а Q е центърът на стената BCC'B'.

а) Да се докаже, че триъгълникът D'QP е правоъгълен.

б) Да се намери обемът на пирамидата D'PCB'.

Задача 4. Дадена е системата уравнения

$$\begin{cases} 3x^2-8xy-3y^2=\dfrac{10a-a^2}{4a^2+9} \\ x^2-5xy+6y^2=\dfrac{10-a}{4a^2+9} \end{cases},$$

където a е реален параметър.

Да се намерят стойностите на параметъра a, за които системата има решение (x;y), такова че $x\le 0$ и $y>0$.

За намерените стойности на параметъра a, да се определи най-голямата и най-малката стойност на сбора x^2+y^2.

Време за работа – 5 часа.

2000г.

Задача 1. Да се намерят стойностите на параметъра a, за които неравенството

$$\sqrt{x^2+8x+20}\ge\frac{a^2-3a+4}{a^2-2a-8}$$

е изпълнено за всяко реално x.

Задача 2. Даден е трапец ABCD с основи AB и CD, за който $\angle ACD=2\angle ABD$. Да се намери лицето на трапеца, ако AC=CD=5 и AB=6.

Задача 3. За триъгълната пирамида SABC са известни равнинните ъгли $\angle BSC=90°$ и $\angle ASB=\angle ASC=60°$. Върховете A, S и средите на ръбовете SB, SC, AB и AC лежат върху една сфера с радиус 3.

а) Да се докаже, че SA е диаметър на сферата.

б) Да се намери обемът на пирамидата.

Задача 4. Разглеждаме всички правоъгълници, два от върховете на които лежат на абсцисната ос, а другите два – върху графиката на функцията $y=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cos x,\ |x|\le\dfrac{\pi}{2}$.

eStoyanov.net

а) Измежду разглежданите правоъгълници да се намери този с най-голям периметър.

б) Да се докаже, че измежду разглежданите правоъгълници има точно един с най-голямо лице и това лице е по-голямо от $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

Време за работа – 5 часа.

2001г.

Задача 1. Да се докаже, че уравнението $16x^5 - 4x^3 + x - 1 = 0$ има единствен корен и той принадлежи на интервала $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$.

Задача 2. В окръжност с радиус R>$\frac{1}{2}$ са построени две равни хорди AB и AC с дължина 1. Да се докаже, че съществуват най-много три хорди в окръжността, които пресичат AB и AC и се разделят от пресечните точки на три равни части. Да се изразят дължините на тези хорди чрез R.

Задача 3. Дадена е права триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$) с размери AB=BC=2, AA_1=1 и ∠ABC=90°. През средите на страните AB, CC_1 и A_1C_1 е построена равнина α. Да се намери лицето на сечението на равнината α с дадената призма и да се намери ъгълът, който сключва α с равнините на основите.

Задача 4. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които системата уравнения

$$\begin{cases} \log_2(x+y) = 1 + \log_2 x \\ (x-a)^2 + (y-x-a)^2 = 1 \end{cases}$$

има единствено решение.

Време за работа – 5 часа.

2002г.

Задача 1. Дадена е функцията $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2x + 2}$. Да се реши уравнението

$$\sin 2\pi(f(x)) = \frac{1}{2}.$$

eStoyanov.net

Задача 2. Окръжностите k_1 и k_2 с центрове O_1 и O_2 и радиуси съответно 1 и $\sqrt{2}-1$ се допират външно. Точката М е такава, че $O_2M=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ и $\angle MO_2O_1=\alpha$, $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

а) Да се намерят стойностите на α, за които точката М е външна за двете окръжности.

б) За намерените в а) стойности на α да се намери сборът от дължините на частите от отсечката O_2M (може и да е една), които са външни за двете окръжности.

Задача 3. Основата ABCD на прав паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е ромб със страна a и $\angle BAD=60°$. Околните ръбове AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 имат дължина a. Да се намери лицето на сечението на паралелепипеда с равнина, минаваща през средата М на основния ръб АВ и перпендикулярна на диагонала CA_1.

Задача 4. Дадена е системата уравнения

$$\begin{cases} x^2=y^3 \\ x+y^2+\sqrt[8]{x^2y}=26 \end{cases}$$

а) Да се намерят всички решения на системата, при които x>0.

б) Да се намери броят на решенията на системата, при които x<0.

Време за работа – 5 часа.

2003г.

Задача 1. Дадено е уравнението $\left|x^2+x\right|=2x^2+a$, където a е реален параметър.

а) Да се реши уравнението при $a=\frac{1}{12}$.

б) Да се докаже, че при $a<0$ уравнението има един положителен и един отрицателен корен.

Задача 2. Триъгълникът АВС е равнобедрен и правоъгълен. Върху хипотенузата му АВ са дадени точки М и N, такива че $AM^2+BN^2=MN^2$.

а) Да се намери $\angle MCN$.

б) Да се намери $\angle CMN$, така че отношението $\frac{MN}{AB}$ да е най-малко.

Задача 3. Всички стени на паралелепипед са еднакви ромбове с диагонали 8cm и 6cm. Да се намери обемът на паралелепипеда.

Задача 4. Нека a,b и c са неотрицателни реални числа.

а) Да се намери най-малката стойност на функцията

$$f(x)=\left(x+\sqrt[3]{b+\sqrt{c}}\right)^{10}-bcx, \text{ за } x\geq 0.$$

б) Да се докаже, че $\sqrt[4]{a+\sqrt[3]{b+\sqrt{c}}}\geq\sqrt[40]{abc}$.

Време за работа – 5 часа.

2004г.

Задача 1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\frac{\log_2(16ax-24a+81)-2\log_2(4x+3)}{\sqrt{9^x-4.3^{x+1}+27}}=0$$

има единствен реален корен.

Задача 2. Нека CH, CL и CM са съответно височина, ъглополовяща и медиана през върха C на триъгълника ABC (точките H, L и M лежат на правата AB). Да се намерят мерките на ъглите на триъгълника ABC, ако CH=HL= LM.

Задача 3. Основата ABC на триъгълна пирамида ABCD е равнобедрен триъгълник, за който AC=BC= b и $\angle BAC=\alpha$. Околните ръбове AD и BD са равни. Ръбът CD сключва с равнината на основата ъгъл α и има дължина b .

а) Да се намери обемът на пирамидата.

б) Да се намери радиусът на описаната около пирамидата сфера.

Задача 4. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, при които уравнението

$$a\sin x+tgx+1=\frac{1}{\cos x}$$

има поне едно решение $x\neq 2k\pi$, където k е произволно цяло число.

Време за работа – 5 часа.

eSlavov.net

2005г.

Задача 1. Дадена е системата $\begin{vmatrix} x^2-(2a+1)x-y=3-a^2 \\ y^2-(2a+1)y-x=3-a^2 \end{vmatrix}$, където a е реален параметър.

а) Да се реши системата за $a=-\frac{3}{2}$ и $a=0$.

б) Да се намерят стойностите на параметъра a, за които системата има единствено решение.

Задача 2. Квадрат е вписан в полуокръжност с радиус 1(два от върховете на квадрата лежат на диаметъра, а другите два – на полуокръжността). Правоъгълен триъгълник с хипотенуза диаметъра на полуокръжността също е вписан в полуокръжността и има лице равно на лицето на квадрата.

а) Да се докаже, че ъглополовящата на по-големия от острите ъгли на триъгълника минава през връх на квадрата.

б) Да се докаже, че центърът на вписаната в триъгълника окръжност лежи на страна на квадрата и да се намери отношението, в което той дели страната на квадрата.

Задача 3. Основата на четириъгълна пирамида ABCDQ е правоъгълник ABCD със страни AB $=2\sqrt{2}$ и BC = 2. Околните стени ADQ и CDQ са перпендикулярни на равнината на основата. Околният ръб BQ има дължина 4.

а) Да се намерят обемът и лицето на повърхнината на пирамидата.

б) Да се намери лицето на сечението на пирамидата с равнина γ през средата M на ръба CD, перпендикулярна на ръба BQ.

Задача 4. Дадена е функцията $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$.

а) Да се намери най-малката стойност на функцията $f(x)$.

б) Ако a е реален параметър, да се реши уравнението

$$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}=-x^2+2(a-1)x-2a^2+4a-3.$$

Време за работа – 5 часа.

eStoyanov.net

2006г.

Задача 1. Да се реши неравенството $\frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(1-4x^2)} \geq 0.$

Задача 2. Да се пресметне стойността на израза
$\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 200^\circ}} - \cos 50^\circ.$

Задача 3. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с катети AC=3 и BC=4. Точката K е такава, че AK=3 и BK=6. Ако D е петата на височината през върха C, да се намери косинусът на ъгъла KDB.

Задача 4. Да се реши уравнението $\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{x}-1.$

Задача 5. Да се реши неравенството $\log_{\frac{1}{2}} x - 2\log_x \frac{1}{2} > 1.$

Задача 6. Даден е триъгълник ABC с ъгли $\angle BAC = 45^\circ$ и $\angle ABC = 60^\circ$. Върху страните AB и BC са избрани съответно точки D и E, такива че $\angle CAE = \angle ACD = 30^\circ$. Да се намери дължината CD, ако радиусът на описаната окръжност около ΔCDE е равен на 1.

Задача 7. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $(a+1)4^{x^2} - 2(a-2)2^{x^2} + 4a + 4 = 0$
има два различни реални корена.

Задача 8. Даден е триъгълник ABC със страни AB=3, BC=2 и $\angle ABC = 30^\circ$. През върха B са построени височината BH ($H \in AC$) и ъглополовящата BL ($L \in AC$). Точките M и N са ортогоналните проекции на върховете A и C върху правата BL. Да се намери радиусът на окръжността, описана около триъгълника MHN.

Задача 9. Дадена е правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ с основен ръб AB=3. Построена е равнина γ през медицентъра M на триъгълника ABC и центровете N и P съответно на стените ABB_1A_1 и ACC_1A_1. Да се намери обемът на призмата, ако тангенсът на ъгъла, който равнината γ сключва с равнината ABB_1, е равен на $\sqrt{6}$.

Задача 10. Да се намерят всички цели числа x, които удовлетворяват неравенството $x - \frac{1}{2} < 2.\log_5(x+2).$

Време за работа – 5 часа.