Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

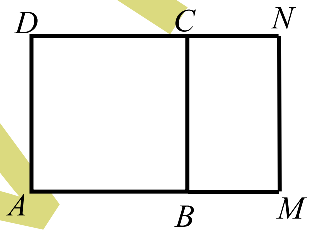
5 юни 2010 г.

ТЕМА за 3 – 4 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0 – 10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Обиколката на квадрата $ABCD$ е с 24 *см* по-голяма от обиколката на правоъгълника $BMNC$. Ако обиколката на $AMND$ е 96 *см*, страната AD е равна на:

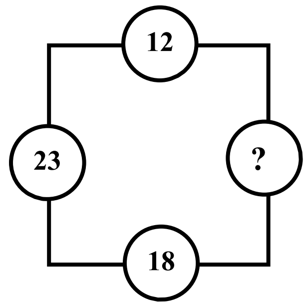


A) 20 *см* **B)** 18 *см* **C)** 15 *см* **D)** 12 *см* **E)** 9 *см*

2. Антон и Точица пътували в два съседни вагона на един влак. Антон пътувал в седемнадесетия пореден вагон от началото на влака, а Точица – в десетия пореден вагон, но от края на влака. Колко най-малко вагона може да има влакът?

A) 17 **B)** 20 **C)** 25 **D)** 26 **E)** 27

3. Във всеки от върховете на квадрата било записано по едно число, а върху всяка от страните му – разликата между числата, записани в двата й края. След това някои от числата били изтрити. Кое от числата **НЕ** може да е било на мястото на въпросителната?



A) 7 **B)** 17 **C)** 27 **D)** 29 **E)** 53

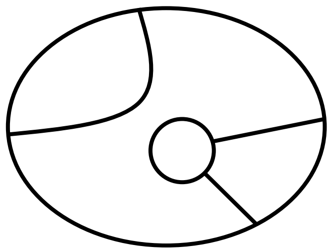
4. Ако един играч загуби игра на “Черен Петър”, “плаща” толкова жетони, че да удвои наличните жетони на всеки от останалите играчи. Гошо, Пешо и Тошо играли три игри. Първата игра загубил Гошо, втората – Пешо, а третата – Тошо. След третата игра всеки имал по 24 жетона. Колко жетони е имал в началото Гошо?

A) 48 **B)** 39 **C)** 36 **D)** 24 **E)** 21

5. Коя е цифрата на стотиците на най-малкото четирицифрено число, на което сборът от цифрите е 25?

A) 0 **B)** 1 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

6. Като се използват някои от цветовете червен, зелен, лилав, жълт и син, трябва да се оцветят различните области от показаната фигура така, че две съседни области да не са в един и същи цвят. По колко различни начина може да стане това?



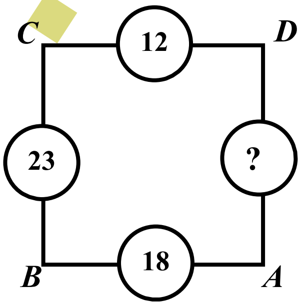
7. На дъската били записани едно след друго пет числа, отделени със запетаи, като разликата между всеки две съседни числа била една и съща. След това заменили цифрите с букви, като различните цифри заменили с различни букви, а еднаквите цифри – с еднакви букви. В резултат на това на дъската останал записът A, BC, DEA, CFC, FGA. Намерете първоначално записаните числа.

РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 3 – 4 клас

1. Отг. А). От условието следва, че BM и CN са с по 12 *см* по-къси от страната на квадрата. Ако ги направим равни на страната на квадрата, като ги увеличим вдясно с по 12 *см*, ще получим правоъгълник с ширина AD, равна на страната на квадрата, и дължина, която е два пъти по-голяма от нея. Периметърът на получения правоъгълник е $96+24=120$ *см*. Следователно страната на квадрата е равна на $120:6=20$ *см*.

2. Отг. С). Тъй като вагоните на Антон и Точица са съседни, то влакът ще бъде с най-малко вагони, ако вагонът на Точица е преди този на Антон, т.е. шестнадесети от началото, като след него има още 9 вагона.

3. Отг. С). Нека във върховете на квадрата са написани числата A, B, C и D. Възможни са няколко случая: 1) B е с 18 по-голямо от A, C е с 23 по-голямо от B и D е с 12 по-голямо от C. Тогава D е с 53 по-голямо от A и търсеното число е **53**. 2) B е с 18 по-голямо от A, C е с 23 по-голямо от B и D е с 12 по-малко от C. Тогава D е с 29 по-голямо от A и търсеното число е **29**. 3) B е с 18 по-голямо A, C е с 23 по-малко от B и D е с 12 по-голямо от C. Тогава D е със 7 по-голямо от A и търсеното число е **7**. 4) B е с 18 по-малко A, C е с 23 по-голямо от B и D е с 12 по-голямо от C. Тогава D е със 17 по-малко от A и търсеното число е **17**. Всички останали случаи се получават като разменим "по-голямо" и "по-малко", но възможностите за търсената разлика се повтарят. От посочените отговори само числото 27 не се реализира.

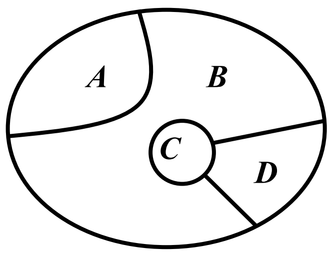


4. Отг. В). Попълваме броя на наличните жетони на всяко момче в таблица, като започваме отзад напред.

	Гошо	Пешо	Тошо
След третата игра (губи Тошо)	24	24	24
След втората игра (губи Пешо)	12	12	48
След първата игра (губи Гошо)	6	42	24
В началото	39	21	12

5. Отг. D). За да бъде числото най-малко, трябва цифрата на хилядите да е 1, а цифрата на стотиците възможно най-малка. При еднакъв сбор тя ще е най-малка, когато другите две цифри са най-големи, т.е. ако са равни на 9. Следователно цифрата на стотиците е $25-(1+9+9)=6$.

6. Отг. 240. Нека област A е оцветена в един от петте цвятя. Тогава област B може да бъде оцветена в един от останалите 4 цвята. За област C също остават 4 възможни цвята (без цвета, избран за B), а за област D – 3 цвята (без цветовете, избрани за B и C). Тъй като за област A има 5 различни възможности за оцветяване, общият брой на различните оцветявания е $5.4.4.3=240$.



7. 1. От това, че първото число е едноцифрено, второто – двуцифрено, следва, че разликата между тях може да е едноцифрено или двуцифрено число.

2. Ако приемем, че разликата е едноцифрено число, то тогава $B=1$ и ще излезе, че третото число е двуцифрено. Тъй като това не е така, заключаваме, че постоянната разлика е двуцифрено число.

3. Третото число е равно на сбор на две двуцифрени числа. Следователно $D = 1$.

4. Четвъртото и петото число са равни на сбора на трицифрено с двуцифрено и тъй като цифрите на стотиците им са различни от $D = 1$, то $C = 2$ и $F = 3$. Така стигаме до записа A, $B2$, $1EA$, 232, $3GA$.

5. Разликата между четвъртото и второто число завършва на 0. Тъй като тя е равна на удвоената постоянна разликата, то постоянната разлика трябва да завършва на 5.

6. Сега от разликата между третото и второто число заключаваме, че $A - 2$ завършва на 5 и следователно $A = 7$. Получаваме записа 7, $B2$, $1E7$, 232, $3G7$.

7. Разликата между четвъртото и първото число е 225 и тя е равна на утроената постянна рзлика. Следователно постоянната разлика (т.е. разликата между две съседни числа) е равна на $225 : 3 = 75$.

Окончателно, първоначално записаните числа са: 7, 82, 157, 232, 307.

Национален кръг на "Европейско Кенгуру"

5 юни 2010 г.

ТЕМА за 5 – 6 клас

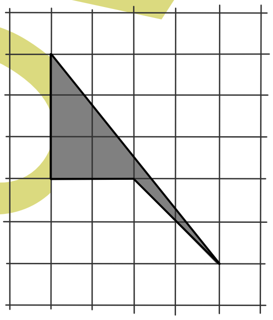
Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0 – 10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Лорд Волдемор поканил свои последователи да устроят засада на Хари Потър. На уречените място и час пристигнали 217 магьосници, като всеки от тях имал точно m познати измежду присъстващите. Коя от посочените стойности е възможна стойност на m?

A) 4 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 13 **E)** 15

2. Намерете лицето в квадратни сантиметри на затъмнената част от квадратната мрежа, ако лицето на единичното квадратче е 1 *кв. см*.



A) 4 **B)** 5 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 41

3. Пресметнете: $M = \frac{1}{1.4.7} + \frac{1}{4.7.10} + \frac{1}{7.10.13} + \ldots \frac{1}{19.22.25}$.

A) $\frac{91}{2200}$ **B)** $\frac{183}{1100}$ **C)** $\frac{183}{910}$ **D)** $\frac{119}{220}$ **E)** $\frac{29}{110}$

4. Еднакви каменни блокчета с размери в сантиметри $25 \times 25 \times 14$ се подреждат по следния начин: най-отдолу се поставят 36 блокчета във формата на правоъгълен паралелепипед с квадратна основа и височина 14 *см*, върху тях се поставят 25 блокчета във формата на правоъгълен паралелепипед с квадратна основа и височина 14 *см*, след това 16 блокчета по същия начин и т.н., като най-накрая се поставя 1 блокче. Намерете повърхнината в квадратни сантиметри на полученото тяло.

A) 29 400 *кв. см* **B)** 54 060 *кв. см* **C)** 72 600 *кв. см* **D)** 74 400 *кв. см* **E)** 78 600 *кв. см*

5. На лист хартия са записани една до друга цифрите 4 и 7. Вдясно от тях се записва цифрата на единиците на сбора на 4 и 7, т.е. 1. Продължаваме така, като всеки път записваме вдясно цифрата на единиците на сбора на последните две записани цифри. Получаваме 4, 7, 1, 8, 9, 7, 6 и т.н. Намерете цифрата, която е на 2010-то място.

A) 1 **B)** 4 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

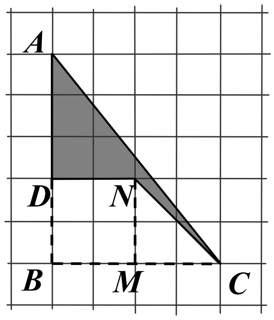
6. Гено е два пъти по-възрастен от Митко. Цифрата на единиците на възрастта на Митко е сумата от цифрите на възрастта на Гено, а цифрата на десетиците е съответно разликата. На колко години е Митко?

7. Да се намери най-малкото естествено число, което е кратно на 132 и има сбор от цифрите 60.

РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 5 – 6 клас

1. Отг. А). Тъй като всеки от магьосниците има точно m познати, то броят на познанствата е $\frac{217.m}{2}$ (делим на 2, защото всяко познанство е изброено два пъти). За да се получи броят на познанствата цяло число, трябва m да е четно. Единственият четен отговор е 4.

2. Отг. А).



От лицето на триъгълника ABC изваждаме лицето на квадрата $BMND$ и лицето на триъгълника NMC, т.е. $10-4-2=4$ *кв. см.*

3. Отг. А). Ако $0<m<n<p$, то $\frac{1}{m.n.p}=\frac{1}{p-m}\left(\frac{1}{m.n}-\frac{1}{n.p}\right)$. При $p-m=6$ получаваме $\frac{1}{1.4.7}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1.4}-\frac{1}{4.7}\right)$, $\frac{1}{4.7.10}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4.7}-\frac{1}{7.10}\right)$, . . . , $\frac{1}{19.22.25}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{19.22}-\frac{1}{22.25}\right)$, откъдето $M=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{1.4}-\frac{1}{22.25}\right)=\frac{1}{6}\cdot\frac{275-2}{44.25}=\frac{1}{6}\cdot\frac{273}{1100}=\frac{91}{2200}$.

4. Отг. D). В търсената повърхнина влизат лицата на двете основи на най-долния паралелепипед. За долната основа това е ясно, а за горната се убеждаваме, когато наблюдаваме тялото отгоре надолу. В търсената повърхнина влизат също околните повърхнини на участващите в тялото 6 правоъгълни паралелепипеда, образувани съответно от 36, 25, 16, 9, 4 и 1 блокчета. Оттук получаваме отговора в квадратни сантиметри:

$$2.(6.25).(6.25)+(6+5+4+3+2+1).25.4.14=45\ 000+21.14.100=45\ 000+29\ 400=74\ 400.$$

5. Отг. С). Продължаваме процеса и получаваме 47189763921347. Забелязва се, че след дванадесетата цифра се появявят отново първите две цифри 4 и 7. Оттук нататък ще се повтарят и останалите, т.е. първите 12 цифри ще се повтарят. Остатъкът на 2010 при деление с 12 е 6, откъдето заключаваме, че търсеният отговор е шестата подред цифра от началото, т.е. 7.

6. Отг. 17. Ако Гено е на $\overline{ab}$ години, то Митко е на $\overline{(a-b)(a+b)}$ или на $\overline{(b-a)(b+a)}$ години. Уравнението $\overline{ab}=2\overline{(a-b)(a+b)}$ не дава решение, а от уравнението $\overline{ab}=2\overline{(b-a)(b+a)}$ получаваме $10a+b=2(10(b-a)+b+a)$, което е еквивалентно с $28a=21b$, т.е. $4a=3b$. Като вземем предвид, че a и b са цифри, не едновременно равни на нула, а също, че и $a+b$ е цифра, намираме единственото решение $a=3$, $b=4$. Оттук получаваме, че Гено е 34 години, а Митко – на 17 години.

7. Отг. 36 999 996 . От неравенството $60>6\cdot 9$ следва, че търсеното число има най-малко седем цифри. Нека n е 7-цифрено число, което е решение на задачата. Тъй като $132=3\cdot 4\cdot 11$, то n се дели на 3, на 4 и на 11. Ще използваме признака за делимост на 11. Ако S_1 е сумата от първата, третата, петата и седмата цифра на n (отляво надясно), а S_2 е сумата от втората, четвъртата и шестата му цифра, то S_1 и S_2 се различават с кратно на 11. Тъй като $S_1 + S_2 = 60$, което означава, че S_1 и S_2 са с еднаква четност, то S_1 и S_2 се различават с кратно на 22. Освен това $S_1 \le 4.9 = 36$ и $S_2 \le 3.9 = 27$. Случаят $S_1 = S_2$ дава $S_1 = S_2 = 30$, което е невъзможно, защото по-горе получихме, че $S_2 \le 27$. В случай, че S_1 и S_2 се различават точно с 22, то от $S_1 + S_2 = 60$ намираме, че едно от числата S_1 и S_2 трябва да е равно на 41, а другото на 19. Това също е невъзможно, защото $41 > 36$. Аналогично се отхвърля и случаят, когато S_1 и S_2 се различават с 44 (по-големите кратни на 22 отпадат поради ограничението $S_1 + S_2 = 60$). Следователно няма 7-цифрено число, което е решение на задачата. Търсим най-малкото възможно решение и затова ще проверим 8-цифрените числа, т.е. нека сега n е 8-цифрено число и нека S_1 е сумата от първата, третата, петата и седмата му цифра, а S_2 е сумата от втората, четвъртата, шестата и осмата му цифра. Точно както в случая на 7-цифрено число се убеждаваме, че единствената възможност е $S_1 = S_2 = 30$. От равенството $S_1 = 30$ следва, че най-лявата цифра на n е поне 3, защото в противен случай $S_1 \le 2 + 3 \cdot 9 = 29$. Тъй като търсим възможно най-малкото число, проверяваме възможността n да започва с 3. В този случай третата, петата и седмата цифра на n задължително са равни на 9. Нека последната цифра на n е a. От признака за делимост на 4 следва, че числото $\overline{9a}$ трябва да се дели на 4. Това е възможно само ако $a = 2$ или $a = 6$. Ако $a = 2$, то $S_2 \le 2 + 3 \cdot 9 < 30$, което е невъзможно. Остава възможността $a = 6$. Тогава сумата от останалите три цифри, участващи в S_2, трябва да е равна на 24. Нека $n = \overline{3b9...96}$. За да бъде n най-малко, трябва цифрата b да е най-малко. Но b е поне 6, защото 5+9+9<24. От друга страна проверката показва, че числото 36 999 996 наистина се дели на 3, на 4 и на 11. Следователно 36 999 996 е търсеното число.

Национален кръг на "Европейско Кенгуру"

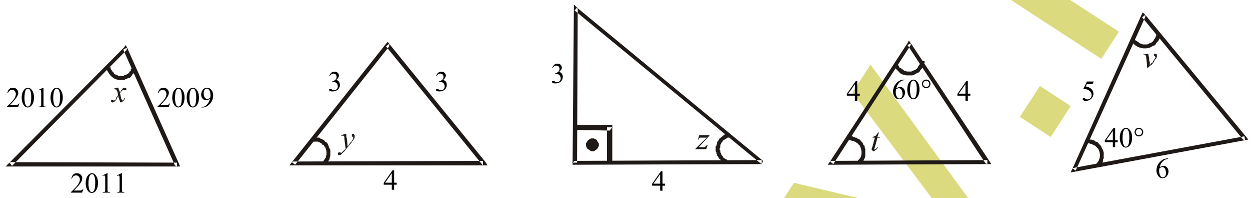
5 юни 2010 г.

ТЕМА за 7 – 8 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0 – 10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Кое от посочените твърдения е невярното?



A) $x > t > y$ **B)** $60° \le t < v$ **C)** $y + t < 120° < v + x$ **D)** $45° < z < 60°$ **E)** $v - z > 65° - t$

2. За положителните числа a, b и c е изпълнено $\dfrac{a}{b} = \dfrac{2a}{6b-3c} = \dfrac{3b}{7a+3c}$. Изчислете $\dfrac{a}{b}$.

A) $\dfrac{1}{3}$ **B)** $\dfrac{3}{10}$ **C)** $\dfrac{3}{7}$ **D)** $\dfrac{4}{3}$ **E)** $\dfrac{2}{9}$

3. В състезанието "Европейско Кенгуру" участвали ученици от много градове на България. Участниците от Пловдив били една пета от общия брой на участниците от Пловдив, Бургас и Димитровград, участниците от Бургас – няколко седми от общия брой на участниците от тези три града, а от Димитровград – 303. Колко е общият брой на участниците от трите града?

A) 2205 **B)** 2835 **C)** 3185 **D)** 3535 **E)** 3255

4. Във вътрешността на успоредник $ABCD$ е взета точка K. Правата DK пресича продължението на страната AB в точка E така, че B е между A и E. Правата BK пресича продължението на страната AD в точка F така, че D е между A и F. Да се намери лицето на четириъгълника $ABKD$, ако лицето на ΔKEC е a, а лицето на ΔFKC е b.

A) $a+b$ **B)** $\dfrac{a+b}{2}$ **C)** $2(a+b)$ **D)** $\dfrac{ab}{a+b}$ **E)** $\dfrac{a^2}{b} + \dfrac{b^2}{a}$

5. По колко различни начина могат да се оцветят стените на куб с използване на шест цвята така, че всяка от стените да е оцветена в точно един от цветовете и да няма две стени с еднакъв цвят. Два куба са еднакво оцветени, ако могат да се разположат така в пространството, че да са неразличими.

A) 24 **B)** 30 **C)** 60 **D)** 90 **E)** 120

6. Няколко тръби с еднакви характеристики пълнят двата басейна на плувен комплекс "Приморски" във Варна. Когато са напълнени, басейните съдържат еднакви количества вода. Половин ден всички тръби пълнили басейн "Юлиян Русев", след което половината от тръбите продължили да го пълнят и до края на деня го напълнили, а другите тръби започнали да пълнят басейн "Алекси Алексиев" и в края на деня били спрени. На следващия ден била пусната само една тръба, която до края на деня допълнила басейн "Алекси Алексиев" до половината. Колко са тръбите, които пълнят двата басейна?

7. Точките $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ($n \ge 6$) са разположени върху окръжност. В точката A_1 е записано числото -1, а в останалите точки $+1$.

а) За един ход е разрешено да се сменят знаците на числата едновременно в шест последователни точки. Възможно ли е при $n = 12$ след определен брой такива ходове да се получи числото -1 в A_3, а всички останали числа да бъдат $+1$?

б) За един ход е разрешено е да се сменят знаците на числата едновременно в три последователни точки. Възможно ли е при $n = 2010$ след определен брой такива ходове да се получи числото -1 в A_2, а всички останали числа да бъдат $+1$?

<u>РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 7 – 8 клас</u>

1. Отг. D). От данните следва: $x > 60°$, $y < 60°$, $z < 45°$, $t = 60°$, $v > 70°$. С непосредствена проверка се установява, че твърденията в **A)**, **B)**, **C)** и **E)** са верни, а единствено невярното е в **D)**.

2. Отг. C). Като използваме свойствата на пропорциите, получаваме:

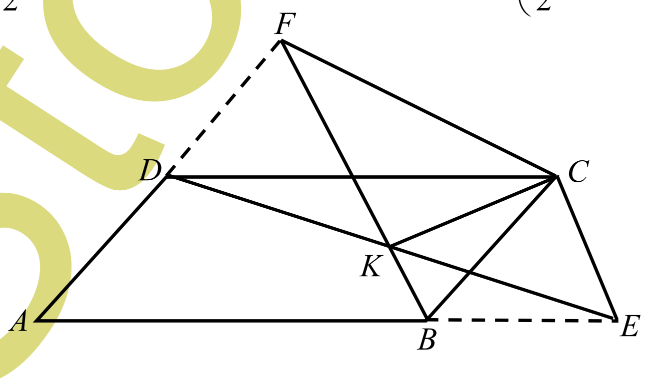
$$\frac{a}{b} = \frac{a+2a+3b}{b+6b-3c+7a+3c} = \frac{3(a+b)}{7(b+a)} = \frac{3}{7}.$$

Задачата може да се реши и по друг начин. От първото равенство следва, че $6b-3c=2b$, т.е. $3c=4b$ и като заместим в третата дроб, получаваме $\frac{a}{b}=\frac{3b}{7a+4b}$. Оттук $7a^2+4ab-3b^2=0$. Ако разделим двете страни на полученото равенство на b^2 и положим $\frac{a}{b}=x$, стигаме до уравнението $7x^2+4x-3=0$, което има корени -1 и $\frac{3}{7}$. Той като $\frac{a}{b}\neq -1$, защото по условие a и b са положителни, остава единствената възможност $\frac{a}{b}=\frac{3}{7}$.

3. Отг. D). Означаваме с x общия брой на участниците от трите града, а няколкото седми от този брой, които задават участниците от Бургас, съответно с $\frac{n}{7}$. Получаваме $\frac{1}{5}x+\frac{n}{7}x+303=x \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}-\frac{n}{7}\right)x=303 \Leftrightarrow x=\frac{3.5.7.101}{28-5n}$. Тъй като x е естествено число, числото $28-5n$ трябва да е нечетно и положително. Възможните стойности за n са 1, 3 и 5. От тях единствено решение се получава при $n=5$, а именно $x=3535$ участници.

4. Отг. A). Тъй като $S_{ABKD}=S_{ABCD}-\left(S_{KBC}+S_{DKC}\right)$, $S_{KBC}=S_{FBC}-S_{FKC}$ и $S_{DKC}=S_{DEC}-S_{KEC}$, то $S_{ABKD}=S_{ABCD}-\left(S_{FBC}-S_{FKC}+S_{DEC}-S_{KEC}\right)$. От друга страна, ако h_1 и h_2 са височините на успоредника $ABCD$ съответно към страните CD и BC, то $S_{FBC}=\frac{1}{2}BC.h_2=\frac{1}{2}S_{ABCD}$ и

$S_{DEC}=\frac{1}{2}CD.h_1=\frac{1}{2}S_{ABCD}$. Следователно $S_{ABKD}=S_{ABCD}-\left(\frac{1}{2}S_{ABCD}-b+\frac{1}{2}S_{ABCD}-a\right)=a+b$.



5. Отг. B). Означаваме цветовете с числата от 1 до 6 и оцветяваме една от стените с цвят 1. За цвят 2 има две възможности – да е върху съседна или върху срещуположна стена на стената с цвят 1. Ако цвят 2 е върху съседна стена, то за цвят 3 има 4 възможности за избор, след което за цвят 4 остават 3 възможности, за цвят 5 остават 2 възможности, а за цвят 6 остава последната неоцветена стена. В този случай броят на оцветяванията е $4.3.2.1 = 24$.

Ако цвят 2 е върху срещуположната стена на стената с цвят 1, то за цвят 3 има 1 възможност, след което за цвят 4 остават 3 възможности, зя цвят 5 остават 2 възможности, а за цвят 6 остава последната неоцветена стена. В този случай броят на оцветяванията е $1.3.2.1 = 6$.

Общо възможните оцветявания са $24 + 6 = 30$.

6. Отг. 8. Нека x е броят на тръбите, а P са толкова части вода от един пълен басейн, колкото може да напълни 1 тръба за 1 ден. От условието за басейн “Юлиан Русев” следва, че $x \cdot \frac{P}{2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{P}{2} = 1$, т.е. $P \cdot \frac{2x + x}{4} = 1$ и $P = \frac{4}{3x}$. От условието за басейн “Алекси Алексиев” следва, че $\frac{x}{2} \cdot \frac{P}{2} + 1.P = \frac{1}{2}$, т.е. $P\left(\frac{x}{4} + 1\right) = \frac{1}{2}$ и $P = \frac{2}{x+4}$. Като приравним десните страни на получените две зависимости, намираме $\frac{4}{3x} = \frac{2}{x+4}$ и оттук $2(x+4) = 3x$, т.е. $x = 8$.

7. Да означим числата, записани в точките $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, съответно с $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

а) **Не е възможно** . След всеки ход произведението $a_1.a_4.a_7.a_{10}$ остава равно на -1, защото винаги си сменят знака точно два от множителите. Следователно не е възможно да се получи $a_3 = -1$, а останалите числа да са равни на $+1$.

б) **Не е възможно**. В този случай разглеждаме произведението $a_1.a_3.a_4.a_6a_7.a_9.a_{10}.a_{12} \dots a_{2005}.a_{2007}.a_{2008}.a_{2010}$, т.е. разделяме числата на групи по 3 и махаме средното число във всяка тройка. След всеки ход това произведение остава равно на -1, защото си сменят знака точно два от множителите. Следователно не е възможно да се получи $a_2 = -1$, а останалите числа да са равни на $+1$.

Национален кръг на "Европейско Кенгуру"

5 юни 2010 г.

ТЕМА за 9 – 10 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Даден е равнобедрен ΔABC с $\angle ACB > 90^0$. Височините AM (M лежи на правата BC) и CN ($N \in AB$) се пресичат в точката H. Да се намери дължината на височината CN, ако $AH = 7$ и $HM = 5$.

A) $\sqrt{42}$ **B)** $\sqrt{\frac{7}{6}}$ **C)** $\frac{6}{\sqrt{42}}$ **D)** $6\sqrt{7}$ **E)** 7

2. Кое от посочените числа е корен на уравнението $\sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{\frac{x-1}{x}}$?

A) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ **B)** 0 **C)** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

3. В редица са записани 2011 числа. Първото число е 3^{2010}, а всяко следващо е равно на сбора от цифрите на предходното число. Да се намери последното число в тази редица.

A) 3^{1005} **B)** 9045 **C)** 3^{335} **D)** 9 **E)** 18090

4. Разглеждаме всички осемцифрени числа, в записа на които участват само цифрите 3 и 7, като всяка от тези цифри участва поне по веднъж. Колко на брой са числата, в записа на които няма две тройки една до друга?

A) 1024 **B)** 128 **C)** 123 **D)** 54 **E)** 51

5. Петоъгълникът $ABCDE$ е вписан в окръжност. Точките A, B и C разделят дъгата DE на четири дъги с равни дължини. Ако лицата на триъгълниците ABC и DEC са съответно S и 3, то лицето на петоъгълника е равно на:

A) $\frac{3S+6+\sqrt{S^2+12S}}{2}$ **B)** $\frac{S+6\pm\sqrt{S^2+12S}}{2}$ **C)** $\frac{3S+2+\sqrt{S^2+12S}}{2}$ **D)** $13+S$ **E)** S^2+12S

6. Дадени са 10 числа, всяко от които е равно на квадрата на сбора на останалите 9 числа. Да се намери сборът на дадените числа.

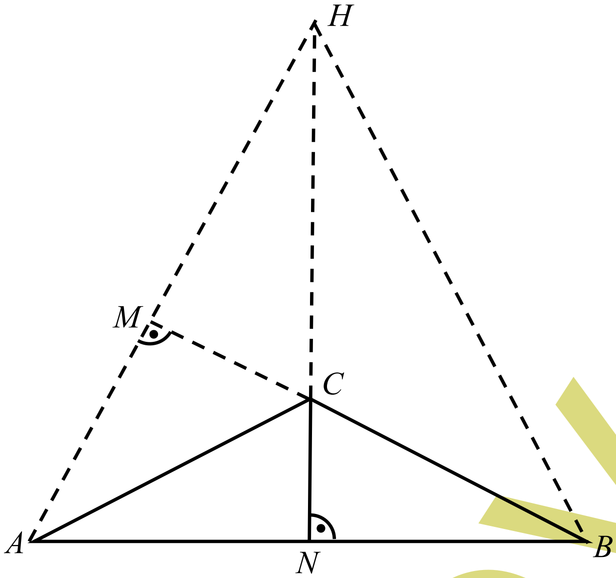
7. Нека M е множество, чийто елементи са 10 различни цели положителни числа, по-малки от 100. Да се докаже, че:

а) броят на всички подмножества на M, включително празното множество и самото M, е равен на 2^{10};

б) съществуват 2 различни подмножества на M без общи елементи и с равни суми на елементите в тях.

РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 9 – 10 клас

1. Отг. B).



От условието следва, че $AM = 2$. Ще използваме, че правата CN е симетрала на отсечката AB. Оттук следва, че $BH = AH = 7$. Нека $AN = NB = x$ и $CN = h$. От Питагоровата теорема за $\angle MBH$ почучаваме, че $BM = \sqrt{49-25} = \sqrt{24}$, а от Питагоровата теорема за ΔABM имаме $2x = AB = \sqrt{24+4} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$. Сега от подобието $\Delta NBC \sim \angle MBA$ следва, че $\frac{NC}{MA} = \frac{NB}{MB}$, т.е. $\frac{h}{2} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{24}}$ и тогава $h = \sqrt{\frac{7}{6}}$.

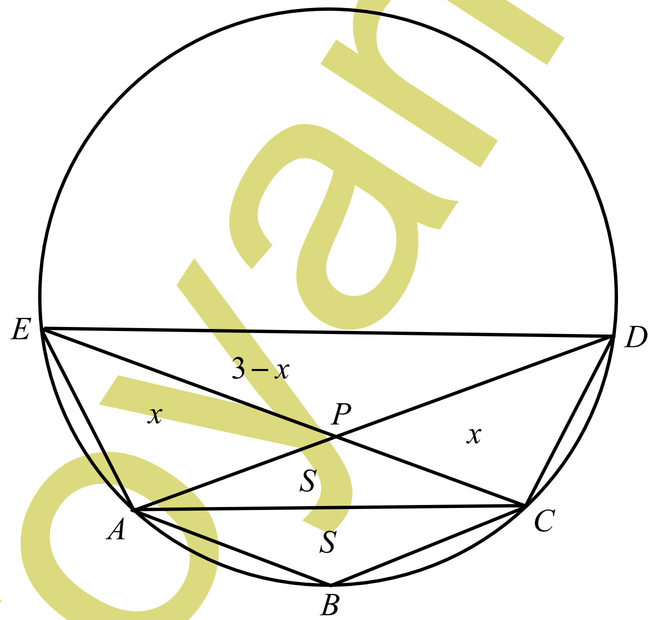
2. Отг. C). Допустимите стойности са $x \in [1;\infty)$. Като умножим двете страни на уравнението с $\sqrt{x}$, получаваме $\sqrt{x^2+x} = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$. Повдигаме двете страни на квадрат и опростяваме: $x^2 - x + 1 - 2\sqrt{x^2-x} = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2 = 0$. Оттук $x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, но само $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ е от областта на допустимите стойности. Следователно задачата има единствено решение $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Отг. D). Да означим последователните числа в редицата с a_1, a_2, …, a_{2011}. Тогава $a_1 = 3^{2010} = 3^{2.1005} = 9^{1005} < 10^{1005}$ и заключаваме, че a_1 има най-много 1005 цифри. Оттук следва, че $a_2 \le 9.1005 = 9045 \le 10\ 000 = 10^4$, което показва, че a_2 има най-много 4 цифри. По-нататък $a_3 \le 9.4 = 36$, откъдето по признака за делимост на 9 имаме, че $a_3 \in \{9,18,27,36\}$. Тогава $a_4 = 9$, $a_4 = 1+8$, $a_4 = 2+7$ или $a_4 = 3+6$. Във всички случаи $a_4 = 9$. Следователно $a_4 = a_5 = a_6 = \ldots = a_{2011} = 9$.

4. Отг. D). Ако използваме само веднъж цифрата 3, получаваме точно 8 числа, защото за тройката има 8 възможни позиции. Ако използваме два пъти цифрата 3, получаваме пермутации с повторения от 8 елемента, единият от които (тройката) участва 2 пъти, а вторият (седмицата) участва 6 пъти. Броят на тези пермутации е $\frac{8!}{2!6!} = 28$. От тях трябва да извадим случаите, в които двете тройки са една от друга. Тези случаи са 7, защото за двойката тройки една до друга има 7 възможни позиции. Така, при две тройки броят на търсените осемцифрени числа е $28-7=21$. Ако използваме три пъти цифрата 3, получаваме пермутации с повторения от 8 елемента, единият от които (тройката) участва 3 пъти, а вторият (седмицата) участва 5 пъти. Броят на тези пермутации е $\dfrac{8!}{3!5!}=56$. От тях трябва да извадим случаите, в които има 2 тройки една до друга. В тези случаи двете тройки една до друга можем за разглеждаме като един елемент и тогава пермутациите са $\dfrac{7!}{1!1!5!}=42$. Тук влизат и случаите на три тройки една до друга, които са преброени два пъти: единият път, когато най-напред имаме тройка, а след нея двойка тройки и втори път, когато имаме двойка тройки и след нея тройка. Следователно от 42 трябва да премахнем случаите, в които имаме три тройки една до друга. Тези случаи са точно 6. Окончателно, при използване на три тройки възможните осемцифрени числа са $56-(42-6)=20$. Ако сега използваме четири пъти цифрата 3, възможните осемцифрени числа са точно 5, защото между тройките трябва да има поне по една седмица (общо 3) и за четвъртата седмица има 5 възможни позиции. Повече от четири тройки не са възможни, защото тогава са необходими поне 4 седмици, които да ги разделят, и броят на цифрите става поне $5+4=9$.

Окончателно отговорът на задачата е $8+21+20+5=54$.

5. Отг. А).



От равенството на дъгите AE, AB, BC и CD следва, че $AC \parallel ED$, $AD \parallel BC$ и $AB \parallel EC$. Ако P е пресечната точка на AD и CE, то $ABCP$ е успоредник и $S_{ABC}=S_{ACP}=S$. От $AC \parallel ED$ следва, че $ACDE$ е трапец. Ако $S_{APE}=x$, то $S_{PCD}=x$ и $S_{PDE}=3-x$. Следователно $\dfrac{S_{APE}}{S_{ACP}}=\dfrac{EP}{PC}=\dfrac{S_{EPD}}{S_{PCD}}$, т. е. $\dfrac{x}{S}=\dfrac{3-x}{x}$. Тогава $x^2+Sx-3S=0$, откъдето $x_{1,2}=\dfrac{-S\pm\sqrt{S^2+12S}}{2}$. Но $x>0$ и получаваме $x=\dfrac{-S+\sqrt{S^2+12S}}{2}$. Окончателно

$$S_{ABCDE}=2S+3+x=2S+3+\frac{-S+\sqrt{S^2+12S}}{2}=\frac{3S+6+\sqrt{S^2+12S}}{2}.$$

6. Отг. 0 или $\dfrac{10}{81}$.

Нека $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{10}$ (*) са дадените числа и нека сборът им е S. От условието следва, че $x_1 = (S - x_1)^2$, $x_2 = (S - x_2)^2$, ... , $x_{10} = (S - x_{10})^2$ (**), а от (*) заключаваме, че $(S - x_{10})^2 \le (S - x_9)^2 \le \ldots \le (S - x_1)^2$. Ако заместим (**) в (*), получаваме обратното на последното неравенство, а именно: $(S - x_1)^2 \le (S - x_2)^2 \le \ldots \le (S - x_{10})^2$. Това е възможно само ако $(S - x_1)^2 = (S - x_2)^2 = \ldots = (S - x_{10})^2$. Тъй като числата са неотрицателни, сумата им не е по-малка от всяко от тях. Заключаваме, че дадените числа са равни. Нека са равни на x. Тогава $x = (9x)^2$, откъдето $x = 0$ или $x = \dfrac{1}{81}$, а сборът е 0 или $\dfrac{10}{81}$.

7. а) Вярно е по-общо, че ако M съдържа n елемента, то броят на всички подмножества на M, включително празното множество и самото M, е равен на 2^n. Можем да считаме, че елементите на M са подредени. На всяко подмножество можем да съпоставим редицата $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, където $a_i = 1$, ако i-тото число от M е елемент на подмножеството и $a_i = 0$, ако i-тото число от M не е елемент на подмножеството. Обратно на всяка такава редица от нули и единици съответства точно едно подмножество, т.е. броят на подмножествата е равен на броя на редиците. Но броят на редиците е равен на 2^{10} (за всяко a_i има две възможности), с което твърдението е доказано.

Задачата може да се реши и по индукция. Ако $n = 1$, твърдението е очевидно. Ако твърдението е вярно за някое n и означим елементите на M с a_1, a_2, …, a_n, нека a_{n+1} е $(n+1)-$ви елемент. Да разгледаме всички подмножества на M и да вземем тези подмножества още веднъж, т.е. разглеждаме една група от всички подмножества на M и втора група от всички подмножества на M. Ако към всяко множество от втората група добавим елемента a_{n+1}, двете групи ще бъдат съставени от всички подмножества на новото множество от $n+1$ елемента, т.е. от M и от a_{n+1}. Броят на подмножествата е $2.2^n = 2^{n+1}$, с което твърдението е доказано.

б) В конкретния случай $2^{10} = 1024$. Оттук следва, че броят на подмножествата на множеството M от условието на задачата без празното множество и самото M е равен на 1022. На всяко от тези подмножества съпоставяме число, което е равно на сумата на елементите в това подмножество. По този начин получаваме 1022 числа, всяко от които е по-малко от 1000, защото подмножествата съдържат по не повече от 10 числа, които са по-малки от 100. Тъй като $1000 < 1022$, между разглежданите числа има поне 2, които са равни. Да вземем двете подмножества, на които отговарят двете равни числа. Ако в тях има общи елементи, премахваме ги. При това сумите на оставащите числа остават равни. Така получаваме търсените две подмножества на M.

Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

5 юни 2010 г.

ТЕМА за 11-12 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0 – 10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Уравнението $x^2-(a-5)x-a^2-5a-4=0$, в което a е реален параметър, има реални и различни корени x_1 и x_2. Най-малката стойност на израза $|x_1+1|+|x_2+2|$ е равна на:

A) 0 **B)** 5 **C)** $\sqrt{41}-1$ **D)** $2\sqrt{14}-1$ **E)** 7

2. Всеки ред на един театрален салон съдържа по 97 места. 2010 ученици от няколко училища отишли на театрално представление. Известно е, че от всяко училище на представлението отишли не повече от 30 ученици. Ако учениците от всяко училище е трябвало да седнат на един и същи ред, то колко реда най-малко в салона е трябвало да бъдат запазени предварително?

A) 22 **B)** 25 **C)** 27 **D)** 30 **E)** 32

3. Окръжностите $k_1(1\,cm)$, $k_2(2\,cm)$ и $k_3(3cm)$ се допират външно две по две. Да се намери радиусът на окръжността, до която трите дадени окръжности се допират вътрешно.

A) $\frac{6}{23}\,cm$ **B)** $3+2\sqrt{2}\,cm$ **C)** $4+2\sqrt{3}\,cm$ **D)** $6cm$ **E)** $7\frac{2}{3}\,cm$

4. Броят на естествените числа n, за които неравенството $\cos^n x+\sin^n x\geq\frac{2}{n}$ е вярно за всяко реално число x, е:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** повече от 3

5. Нека M е множеството на всички естествени числа, в чийто запис няма повтарящи се цифри и не участват други цифри, освен 1, 3, 5 и 7. Сумата на всички числа от множеството M е равна на:

A) 58 928 **B)** 235 712 **C)** 118 384 **D)** 225 040 **E)** 117 856

6. Даден е ΔABC, в който $\angle A=10^\circ$ и $\angle B=50^\circ$. Върху страната AB са взети съответно точките M и N така, че $\angle ACM=10^\circ$ и $\angle BCN=70^\circ$. Да се намери отношението $MN:AB$.

7. Положителните числа a, b и c са такива, че $abc=1$. Да се докаже, че

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 2(1+a+b+c).$$

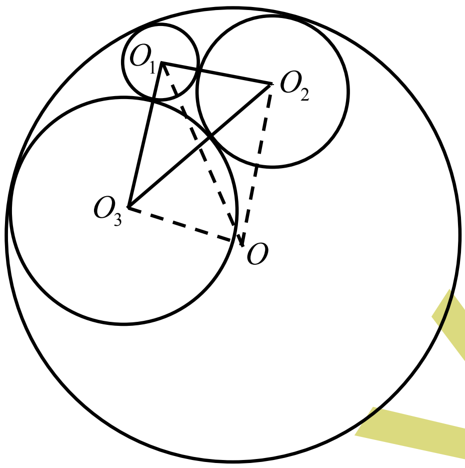
РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 11 – 12 клас

1. Отг. В). Ако $f(x)=x^2-(a-5)x-a^2-5a-4$, то $f(-1)=-a^2-4a-8$ и $f(-2)=-a^2-3a-10$. Тъй като $f(-1)<0$ и $f(-2)<0$ за всяко реално a, то уравнението $f(x)=0$ има реални и различни корени за всяка реална стойност на параметъра a, като при това числата -1 и -2 се намират между тях. Ако $x_1<-2<-1<x_2$, то $|x_1+1|+|x_2+2|=-x_1-1+x_2+2=x_2-x_1+1=\sqrt{D}+1$, където D е дискриминантата на даденото уравнение. Ако $x_2<-2<-1<x_1$, то $|x_1+1|+|x_2+2|=x_1+1-x_2-2=x_1-x_2-1=\sqrt{D}-1$. Ясно е, че във втория случай даденият израз ще приема по-малки стойности, отколкото в първия. Тогава най-малката стойност на израза ще бъде равна на най-малката стойност на израза $\sqrt{D}-1=\sqrt{5a^2+10a+41}-1=\sqrt{5(a+1)^2+36}-1$. От последното равенство е ясно, че търсената най-малка стойност се достига при $a=-1$ и е равна на 5.

2. Отг. С). Числото 97 е просто и затова разглеждаме 96. Най-големият делител на 96, който не надхвърля 30, е 24. Следователно, ако от някои училища има по повече от 24 ученика, то на един и същи ред могат да седнат учениците от най-много 3 училища. Тъй като $2010=80\cdot 25+10$, то ако на представлението отиват по 25 ученика от 80 училища и 10 ученика от още едно, 81-во училище, ще са необходими поне 27 реда за тяхното настаняване. Ще покажем, че тези 27 реда са достатъчни, независимо от броя на училищата и учениците от тях, които отиват на представление. Започваме да настаняваме по редовете учениците от тези училища, от които идват поне по 25 ученика. Понеже $3\cdot 30<97$, то всеки ред може да поеме три такива училища. Останалите места в съответния ред засега оставяме празни. Ако по този начин сме достигнали до 26-ия ред включително, то ще сме настанили най-малко $3\cdot 26\cdot 25=1950$ ученика и за последния 27-ми ред ще ни останат не повече от $2010-1950=60$ ученика. Ако училищата, които имат поне по 25 ученика, свършат преди запълването на 26-ия ред, то започваме да настаняваме учениците от останалите училища от първия ред до 26-ия, оставяйки места в някой ред само ако няма училище, чиито ученици могат да ги попълнят. В случай, че по този начин всички ученици са настанени на първите 26 реда, то всичко е направено. Затова да разгледаме ситуацията, в която започваме да настаняваме ученици на последния запазен 27-ми ред. Да видим какви празни места имаме във вече използваните 26 реда. Ако в някой от тези 26 реда има настанени ученици от 3 училища с поне по 25 ученици, то в този ред ще има не повече от $97-3\cdot 25=22$ празни места. Ако в някой от тези 26 реда има настанени ученици от училища с по-малко от 25 ученици, то празните места в такъв ред не може да са повече от 23, защото в противен случай ще можем да настаним учениците от някое друго училище. Това разсъждение показа, че във всеки от използваните досега 26 реда има най-много по 22 празни места. Но това означава, че в разглеждания момент са настанени най-малко $26\cdot(97-23)=1924$ ученици и за последния 27-ми ред ще са останали най-много $2010-1924=86$ ученици, които също можем да настаним.

3. Отг. D). Нека O_1, O_2 и O_3 са центровете съответно на k_1, k_2 и k_3. От условието за допиране имаме, че $O_1O_2=3\ cm$, $O_1O_3=4\ cm$ и $O_2O_3=5\ cm$. В частност това означава, че $\Delta O_1O_2O_3$ е правоъгълен с прав ъгъл при върха O_1. Нека окръжността $k(O,\ r\ cm)$ е такава, че окръжностите k_1, k_2 и k_3 се допират до k вътрешно. От условието за допиране получаваме, че $OO_1=r-1$, $OO_2=r-2$ и $OO_3=r-3$. От косинусовата теорема за O_1O_2O получаваме, че

$\cos\angle OO_1O_2 = \dfrac{r+3}{3(r-1)}$ и аналогично от ΔO_3OO_1 имаме $\cos\angle OO_1O_3 = \dfrac{r+2}{2(r-1)}$. Тъй като $\angle OO_1O_2 + \angle OO_1O_3 = \angle O_2O_1O_3 = 90^\circ$, то оттук следва, че



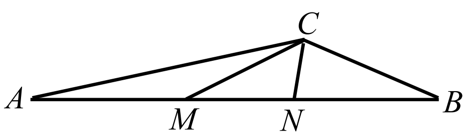
$$\cos^2\angle OO_1O_2 + \cos^2\angle OO_1O_3 = 1 \Rightarrow \left(\frac{r+3}{3(r-1)}\right)^2 + \left(\frac{r+2}{2(r-1)}\right)^2 = 1 \Rightarrow 23r^2 - 132r - 36 = 0.$$

Единственият положителен корен на това уравнение е $r = 6$.

4. Отг. С). За всяко нечетно n неравенството е нарушено например за $x = \pi$. Нека $n = 2k$, $k-$естествено число. След заместване в неравенството с $x = \dfrac{\pi}{4}$ получаваме $2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2k} \geq \dfrac{1}{k} \Leftrightarrow 2k \geq 2^k$. По индукция лесно следва обаче, че при $k \geq 3$ е изпълнено $2^k > 2k$. Това означава, че решения на задачата могат да са само $n = 2$ и $n = 4$. При $n = 2$ даденото неравенство се превръща в равенство за всяко реално x. При $n = 4$ неравенството $\cos^4 x + \sin^4 x \geq \dfrac{1}{2}$ може да се запише във вида $2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 \geq 0$, откъдето следва, че $n = 4$ е също решение на задачата.

5. Отг. Е). В множеството M има $V_4^1 = 4$ едноцифрени числа: 1, 3, 5 и 7; $V_4^2 = 12$ двуцифрени числа; $V_4^3 = 24$ трицифрени и $P_4 = 24$ четирицифрени числа. Едноцифрените числа можем да разбием на двойки с равни суми $1+7=3+5=8$, двуцифрените също, например $13+75=88$, $71+17=88$ и т.н. Същото важи и за подмножествата на трицифрените и четирицифрените числа в M. Разбиваме ги на двойки със суми съответно 888 и 8888. Следователно сумата на всички елементи на M ще е равна на $8\cdot\dfrac{4}{2} + 88\cdot\dfrac{12}{2} + 888\cdot\dfrac{24}{2} + 8888\cdot\dfrac{24}{2} = 117\,856$.

6. Отг. 1:3.



Нека $CM = x$. От синусовата теорема за ΔMNC имаме, че $\dfrac{MN}{x} = \dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 120^\circ} \Rightarrow MN = \dfrac{2x\sin 40^\circ}{\sqrt{3}}$.

От синусовата теорема за ΔBMC имаме, че $\dfrac{BM}{x} = \dfrac{\sin 110^\circ}{\sin 50^\circ} \Rightarrow BM = \dfrac{x\sin 110^\circ}{\sin 50^\circ}$. От друга страна, тъй като ΔAMC е равнобедрен, то $AM = MC = x$. Следователно $AB = AM + MB = x + \dfrac{x\sin 110^\circ}{\sin 50^\circ}$ и оттук $\dfrac{AB}{MN} = \dfrac{x\left(1+\dfrac{\sin 110^\circ}{\sin 50^\circ}\right)}{\dfrac{2x\sin 40^\circ}{\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sin 50^\circ + \sin 110^\circ}{\sin 50^\circ \sin 40^\circ} =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sin 80^\circ \cos 30^\circ}{\cos 40^\circ \sin 40^\circ} = 3\cdot\frac{\sin 80^\circ}{2\cos 40^\circ \sin 40^\circ} = 3\cdot\frac{\sin 80^\circ}{\sin 80^\circ} = 3.$$

7. Ще използваме тъждеството $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$, което се проверява непосредствено. С негова помощ можем да запишем неравенството от условието на задачата във вида $(a+b+c)(ab+bc+ca-2) \geq 3$. Но от неравенството между средното аритметично и средното геометрично имаме, че $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$ и $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$. Сега верността на полученото неравенство следва непосредствено.