РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

Задача 4.1. Пресметнете стойността на числовия израз:

$$A = (27846:9 + 3801:7) - 36 \cdot 101.$$

Възможно ли е точно едно от участващите в израза A числа да се замени с друго така, че първоначалната стойност на израза да се увеличи с 5?

Решение: $A = (27846:9 + 3801:7) - 36 \cdot 101 = (3094 + 543) - 3636 = 3637 - 3636 = 1$.

Желаната замяна е възможна по един от следните два начина: или 27846 да се замени с 27891, или 3801 да се замени с 3836.

Схема на оценяване: Правилното извършване на деленията и умножението – по **1 т.**, общо **3 т.** За пресмятането на числовата стойност на израза – още **1 т.** За правилен отговор на въпроса в задачата (без обосновка) – **1 т.** и още **2 т.**, ако е показано как да стане промяната на стойността на израза (достатъчно е посочване на един начин).

Задача 4.2. Дължината и широчината на правоъгълник, измерени в сантиметри, са естествени числа. Обиколката на правоъгълника в сантиметри е двуцифрено число с цифра на единиците 0, а лицето на правоъгълника в квадратни сантиметри е двуцифрено число с цифра на десетиците 9.

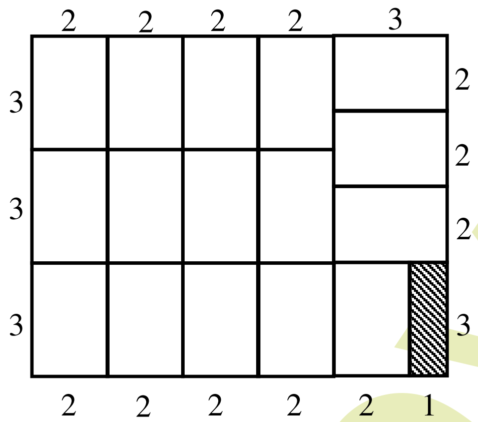
а) Да се намерят всички такива правоъгълници.

б) Лицето на правоъгълника е 99 *кв. см*. Колко най-много правоъгълника с размери 3 *см* и 2 *см* могат да бъдат разположени в дадения правоъгълник без застъпване и припокриване?

Решение: а) Можем да предполагаме, че широчината на търсените правоъгълници е не по-голяма от дължината. Да разгедаме правоъгълник с исканите свойства. Ако широчината на правоъгълника е по-голяма от 9 *см*, то лицето му ще е поне $10 \cdot 10 = 100$ *кв. см*, което е невъзможно. Следователно широчината на правоъгълника е едноцифрено число. Тя не може да 1 *см*, защото тогава дължината трябва да е поне 90 *см* (заради лицето), но в такъв случай обиколката не може да е двуцифрено число. По същия начин проверяваме, че широчината не може да е 2 *см* – тогава дължината трябва да е поне 45 *см,* но обиколката става по-голяма от 90 *см* и няма как да е двуцифрено число, завършващо на 0. Ако дължината на правоъгълника е a *см,* а широчината му е b *см*, то за да завършва обиколката $P = 2 \cdot (a + b)$ на нула, трябва сборът $a + b$ да завършва на 5 или на 0. Ако широчината на правоъгълника е 3 *см*, то понеже $3 \cdot 30 = 90$ и $3 \cdot 33 = 99$, дължината му може да бъде 30, 31, 32 или 33 *см*. Но само дължина 32 *см* е такава, че $3 + 32 = 35$ завършва на 5. Така намираме един правоъгълник, който е решение на задачата. Той е с дължина 32 *см*, широчина 3 *см*, обиколка 70 *см* и лице 96 *кв. см*. По същия начин проверяваме останалите възможности за широчината на правоъгълника. Окончателно получаваме следните правоъгълници, които са решения на задачата:

Дължина	Широчина	Обиколка	Лице
32	3	70	96
13	7	40	91
12	8	40	96
11	9	40	99

б) Като използваме намереното в а), виждаме, че става въпрос за правоъгълника с дължина 11 *см* и широчина 9 *см*. Да отбележим, че измеренията на този правоъгълник могат да бъдат намерени и без да се използват резултатите от а). Понеже лицето на един "малък" правоъгълник е $3 \cdot 2 = 6$ *кв. см* и $17 \cdot 6 = 102 > 99$, то в дадения правоъгълник не могат да бъдат разположени повече от 16 "малки" правоъгълника. Ето пример на вариант за разположение на 16 "малки" правоъгълника:



Защрихованият правоъгълник остава непокрит.

<u>*Схема на оценяване*</u>: За а) – общо **4 т.**, по **1 т.** за всеки открит правоъгълник. Ако правоъгълниците са само посочени, без никаква обосновка, да се присъждат **2 т.** За б) – общо **3 т.**, от които **1 т.** за намиране броя на правоъгълниците и **2 т.**, ако е построен коректен пример на разположение на правоъгълниците.

Задача 4.3. Да се реши числовият ребус $abcd \cdot a = eeeed$, в който на еднаквите букви отговарят еднакви цифри, а на различните букви отговарят различни цифри.

Решение: Цифрата a не може да бъде равна на 0, защото е първа цифра. Тя не може да е 1, защото тогава произведението $abcd \cdot a$ няма да бъде петцифрено. Да разгледаме последователно останалите възможности за цифрата a. Ако $a = 2$, то произведението $abcd \cdot a$ ще бъде по-малко от $3000 \cdot 2 = 6000$ и няма да е петцифрено. Следователно и този случай е невъзможен. Ако $a = 3$, то произведението $abcd \cdot a$ ще бъде по-малко от $4000 \cdot 3 = 12000$. Затова единствената възможност за цифрата e в този случай е $e = 1$. При това произведението $d \cdot a = d \cdot 3$ трябва да завършва на d, което е възможно само ако $d = 0$ или $d = 5$. Проверката показва, че равенството $3705 \cdot 3 = 11115$ е решение на ребуса. Ако $a = 4$, то отново трябва $e = 1$. Но това е невъзможно, защото $eeeed = 1111d$, докато $4000 \cdot 4 = 16000 > 1111d$. Нека $a = 5$. Тъй като $abcd \cdot a$ е число между $5000 \cdot 5 = 25000$ и $6000 \cdot 5 = 30000$, за e получаваме единствената възможност $e = 2$. Тогава $eeeed = 2222d < 25000 = 5000 \cdot 5 < abcd \cdot a$ и отново не получаваме решение. При $a = 6$ произведението $abcd \cdot a$ ще се намира между 36000 и 42000. Затова сега $e = 3$ или $e = 4$. Но ако $e = 3$, то $eeeed = 3333d < 36000$, а ако $e = 4$, то $eeeed = 4444d > 42000$. Следователно и този случай е невъзможен. При $a = 7$ произведението $abcd \cdot a$ ще се намира между $7000 \cdot 7 = 49000$ и $8000 \cdot 7 = 56000$ Затова $e = 4$ или $e = 5$ и понеже отново $eeeed$ ще е $4444d$ или $5555d$, за e остава само възможността $e = 5$. Като отчетем, че трябва $d \cdot a$ да завършва на d, заключаваме, че $d = 0$ или $d = 5$. Тъй като вече $e = 5$, остава $d = 0$. Но делението $eeeed : a = 55550 : 7$ е невъзможно. Отново не получаваме решение на ребуса. Нека $a = 8$. Тогава $abcd \cdot a$ ще бъде между $8000 \cdot 8 = 64000$ и $9000 \cdot 8 = 72000$. Следователно $e = 6$ или $e = 7$. Възможността $e = 7$ отпада, защото $7777d > 72000$. Остава $e = 6$. Отново от факта, че $d \cdot a$ трябва да завършва на d, определяме $d=0$, при което делението $eeeed:a=66660:8$ е невъзможно. Остана случаят $a=9$. Сега произведението $abcd\cdot a$ се намира между $9000\cdot 9=81000$ и 90000, откъдето $e=8$. Както по-горе, намираме, че $d=0$ или $d=5$. Но деленията $eeeed:a=88880:9$ и $eeeed:a=88885:9$ са невъзможни.

Окончателно ребусът има единствено решение: $3705\cdot 3=11115$.

<u>*Схема на оценяване*</u>: **2 т.**, ако са направени правилни разсъждения за ограничаване стойностите на коя да е от участващите цифри; още **3 т.**, ако са изчерпани всички възможни варианти за стойностите на цифрите (при частично разглеждане на случаите се присъждат **1 т.** или **2 т.** по усмотрение на областната комисия) и още **2 т.** за намиране на решението.

Задача 5.1. Да се пресметне стойността на израза:

$$C.C\ +\ C.(C-1)\ +\ C.(C-2)\ +\ C.(C+3),\ \text{където}$$

$C=A-B$, $A=1,23.12,4.125+(1+2+3+4+5+6+7).25$ и $B=123.1,24.12,5+1,25.400.1,2$.

Решение:

$A=1,23.12,4.125+(1+2+3+4+5+6+7).25=1,23.12,4.125+28.25=1,23.12,4.125+700$

$B=123.1,24.12,5+1,25.400.1,2=123.1,24.12,5+600$

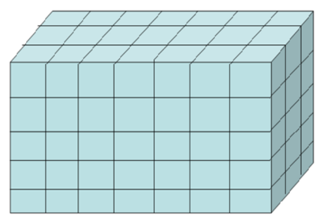
Произведенията от изразите A и B са равни, т.е. $1,23.12,4.125=123.1,24.12,5$ и следователно $C=A-B=700-600=100$. Тогава

$$C.C\ +\ C.(C-1)\ +\ C.(C-2)\ +\ C.(C+3)=$$

$$=100.100+100.99+100.98+100.103=100(100+99+98+103)=100.400=40\,000.$$

<u>*Схема на оценяване*</u>: За пресмятане на $C=100$ общо **5 т.** и още **2 т.** за завършване на задачата. Разпределението на първите **5 т.** е по **2 т.** за A и B, както и **1 т.** за $C=A-B=700-600=100$. Ако се следва описаното решение, **1 т.** за получаване на $A=1,23.12,4.125+700$, **1 т.** за получаване на $B=123.1,24.12,5+600$ и **2 т.** за съображението $1,23.12,4.125=123.1,24.12,5$.

Задача 5.2. Правоъгълен паралелепипед е съставен от 105 еднакви кубчета. Ако от всяка стена се извади централното кубче, повърхнината на полученото тяло ще бъде с 384 *кв. см* по-голяма от повърхнината на паралелепипеда. Намерете:



а) дължината на ръба на едно кубче и размерите на паралелепипеда;

б) лицето на повърхнината на правоъгълния паралелепипед;

в) обема на правоъгълния паралелепипед.

Решение: а) Да означим с $a\,см$ ръба на едно кубче. Всяко извадено кубче увеличава повърхнината с $4.a.a$ *кв. см*. Тъй като са отнемат 6 кубчета, то повърхнината ще се увеличи с $24.a.a$ *кв. см*. От условието $384=24.a.a$ намираме $a.a=16$ и следователно $a=4\,см$. Тогава размерите на паралелепипеда са: $7.4=28$ *см*, $3.4=12\,см$ и $5.4=20\,см$.

б) Лицето на повърхнината на паралелепипеда е равно на

$$2(28.12+28.20+20.12)=2.1136=2272\ кв.\ см.$$

в) $V=28.12.20=6720\ куб.\ см.$

Схема на оценяване: общо **3 т.** за намиране ръба на едно кубче, от които **1 т.** за съображението, че всяко извадено кубче увеличава повърхнината с $4.a.a$ *кв. см* и **1 т.**, че общото увеличение на повърхнината е с $24.a.a$ *кв. см*; **1 т.** за пресмятане на размерите; **2 т.** за б) и **1 т.** за в).

Задача 5.3. Да се намери най-голямото естествено число n, за което съществува $n-$цифрено число с различни цифри така, че числото да се дели на всяка своя цифра.

Решение: Търсеното число не може да съдържа нулата в записа си, защото с нулата не може да се дели. Следователно, за да се дели числото на 5, то трябва да завършва на 5. Но ако числото завършва на 5, със сигурност то не се дели на 2, 4, 6 и 8, откъдето следва, че числото е най-много петцифрено. Затова ще се откажем от петицата и ще покажем, че съществува число с повече цифри, което изпълнява условието на задачата. Сумата на всички цифри без 0 и 5 е равна на $1+2+3+4+6+7+8+9=40$. Броят на тези цифри е 8, но е ясно, че не съществува 8-цифрено число с исканато свойство, защото то със сигурност няма да се дели на 3, на 6 и на 9 (от признаците за делимост на 3 и 9). Заключаваме, че търсеното число е най-много със седем цифри. За да се дели търсеното число на 3 и на 6 (в случай, че си подсигурим да завършва на четна цифра), достатъчно е да се освободим от цифрата 1. Тогава сумата от оставащите цифри става равна на 39 и се дели на 3. Ако се откажем обаче от цифрата 4, вместо от 1, можем да си подсигурим делимост и на 9. За да се дели търсеното число на 8, достатъчно е (съгласно признака за делимост на 8) числото, образувано от последните му три цифри, да се дели на 8. За последни три цифри можем да вземем например 328. Сега лесно стигаме до 7-цифреното число 9 176 328, за което непосредствено се проверява, че се дели на 1, 2, 3, 6, 7, 8 и 9. С това задачата е решена, но ще отбележим, че намереното число не е единственият пример.

Схема на оценяване: **1 т.** за отхвърляне на нулата; **1 т.** за разсъждението в случай, че числото се дели на 5; общо **5 т.** за случая, когато числото не се дели на 5, от които **1 т.** за съображението $1+2+3+4+6+7+8+9=40$, **1 т.** за заключението, че търсеното число е най-много със седем цифри, **1 т.** за отхвърляне на цифрата 4 чрез съображенията за делимост на 6, **1 т.** за включване на признака за делимост на 8 и избор на последните три цифри на числото, **1 т.** за верен пример на 7-цифрено число.

Задача 6.1. Николай има два кашона с форма на правоъгълен паралелепипед и с размери съответно 1 *м* × 1 *м* × 60 *см* и 80 *см* × 70 *см* × 60 *см*. Колко най-много кутии със същата форма и с размери 20 *см* × 20 *см* × 15 *см* е възможно Николай да постави в кашоните?

Решение: Намираме обемите V_1, V_2 и V_3 съответно на първия кашон, втория кашон и кутиите: $V_1=10.10.6=600\ dm^3$, $V_2=8.7.6=336\ dm^3$ и $V_3=2.2.1,5=6\ dm^3$. Като разделим V_1 на V_3 и V_2 на V_3, получаваме, че в големия кашон Николай може да постави най-много 100 кутии, а в малкия – най-много 56 кутии.

Реализация. В първия кашон поставяме кутиите по следния начин: 20 *см* на ръб 1 *м* и 15 *см* на ръб 60 *см*; така получаваме един пласт от $5.4=20$ кутии и е достатъчно да образуваме пет пласта (това е възможно, защото $100:20=5$). Във втория кашон поставяме кутиите по следния начин: 15 *см* на ръб 70 *см* и 20 *см* на ръб 60 *см*; по този начин на стената 70 *см* × 60 *см* поставяме два реда с по 3 кутии, т.е. общо 6 кутии, които в тази стена заемат правоъгълник с размери 30 *см* × 60 *см*; образуваме общо четири пласта (това е възможно, защото $80:20=4$) и по този начин нареждаме общо 24 кутии, запълвайки паралелепипед с размери 30 *см* × 60 *см* × 80 *см*; в оставащия паралелепипед 40 *см* × 60 *см* × 80 *см* най-напред на ръб 60 *см* поставяме 4 кутии по ръб 15 *см* и в стената 60 *см* × 80 *см* получаваме 4 реда с по 4 кутии (общо 16 кутии); образуваме общо два пласта (това е възможно, защото $40:20=2$), като по този начин нареждаме общо $16.2=32$ кутии.

Схема на оценяване: по **1 т.** за намиране на обемите на кашоните и кутията – общо **3 т.**, **1 т.** за оценяване броя на кутиите, които могат да бъдат поставени, **1 т.** за правилно попълване на първия кашон и **2 т.** за правилно попълване на втория; ако са реализирани екстремалните попълвания без намиране на обеми – **7 т.**

Задача 6.2. В касичката си Валентин събира само монети. Един ден той решил да преброи паричките в нея. Оказало се, че половината от всички монети плюс една били от 1 лев. Четири десети от останалите и още 4 монети били от 50 стотинки. Десет процента от новия остатък и още 3 монети били от 20 стотинки, а последните 42 монети били от 10 стотинки. Колко са монетите в касичката на Валентин и каква е тяхната стойност в лева?

Решение: Ще решим задачата отзад напред. Вторият остатък съдържа монети само от 20 ст. и 10 ст. Ако 3 монети от 20 ст. бяха монети от 10 ст., то монетите от 20 ст. щяха да съставляват 10% от втория остатък. Следователно 90% от втория остатък съдържа $42+3=45$ монети. Оттук намираме, че вторият остатък е 50 монети (90% от $50=45$). Първият остатък съдържа 50 монети от 20 ст. и 10 ст., както и монети от 50 ст. Ако 4 монети от 50 ст. бяха монети от другия вид (20 ст. и 10 ст.), то монетите от 50 ст. щяха да съставляват 0,4 части от първия остатък. Следователно 0,6 части от първия остатък съдържа $50+4=54$ монети. Оттук намираме, че първият остатък е 90 монети ($0,6.90=54$). В касичката има 90 монети от 50 ст., 20 ст. и 10 ст., както и монети от 1 лев. Ако една монета от 1 лев беше монета от другия вид (50 ст., 20 ст. и 10 ст.), то монетите от 1 лев щяха да бъдат половината от всички монети. Следователно половината от всички монети съдържа $90+1=91$ монети. Оттук намираме, че всички монети са $91.2=182$ на брой. Монетите от 1 лев са $\frac{1}{2}\cdot 182+1=92$ и стойността им в лева е 92. Останалите монети са $182-92=90$. Монетите от 50 ст. са $0,4.90+4=40$ и стойността им е 20 лв. Новият остатък монети е $90-40=50$. Монетите от 20 ст. са $0,1.50+3=8$ и стойноста им е 1,60 лв. Стойността на монетите от 10 ст. е $42.0,1=4,20$ лв. За общата стойност на всички монети получаваме:

$$92+20+1,60+4,20=117,80 \text{ лв.}$$

Схема на оценяване: **5 т.** за намиране на общия брой 182 на монетите и **2 т.** за намиране на стойността им в лева.

Задача 6.3. В таблица $n\times n$ по един от главните диагонали са поставени пионки. На един ход е позволено произволни две пионки да се преместят в съседна горна клетка. Възможно ли е по този начин всички пионки да се преместят на най-горния ред, ако:

а) $n=9$;

б) $n=2011$?

Решение: Ясно е, че пионката в горния край на диагонала не може да се мести.

Останалите пионки трябва да обходят еднократно всички полета над главния диагонал, върху който са разположение пионките, т.е. преместването на пионките от диоганала към най-горния ред представлява преброяване на клетките над главния диагонал. Тъй като на всеки ход се местят по две пионки, то за да е възможно исканото преместване, трябва броят на клетките над главния диагонал да е четно число.

а) Възможно е. Броят на клетките над главния диагонал е:

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36,$$

което е четно число и следователно е изпълнено необходимото условие за осъществяване на исканото преместване. Ще посочим един начин за реализация на преместването. Да номерираме пионките отгоре надолу по главния диагонал последователно с числата от 1 до 9. Както беше отбелязано, пионката с № 1 не се мести. На първия ход преместваме пионките с № 2 и с № 9, при което пионката с № 2 отива на най-горния ред, а пионката с № 9 отива на реда на пионката с № 8. На втория ход преместваме пионките с № 3 и с № 7, при което пионката с № 3 отива на втория ред отгоре надолу, а пионката с № 7 отива на реда на пионката с № 6. На третия ход преместваме пионките с № 3 и с № 5, при което пионката с № 3 отива на най-горния ред, а пионката с № 5 отива на реда на пионката с № 4. След тези три хода пионките с №№ 1, 2 и 3 са на най-горния ред, а двойките № 4 и № 5, № 6 и № 7, № 8 и № 9 са намират на едни и същи редове, съответно на четвъртия, шестия и осмия ред отгоре надолу. С три хода преместаваме пионките с № 4 и с № 5 на най-горния ред, с пет хода преместваме пионките с № 6 и с № 7 на най-горния ред и с още седем хода преместваме пионките с № 8 и с № 9 на най-горния ред. Общият брой ходове е $3+3+5+7=18$.

а) Не е възможно. Броят на клетките над главния диагонал е:

$$1+2+...+2010=(1+2010).1005=2011.1005,$$

което е нечетно число (произведение на нечетни числа) и следователно необходимото условие за осъществяване на исканото преместване е нарушено.

Схема на оценяване: общо **4 т.** за пълна реализация на преместване в случая а); частични кредити (без акумулиране): **1 т.** за посочен верен отговор, **2 т.** за преброяване на клетките над главния диагонал, **1 т.** за съображението, че броят на клетките над главния диагонал трябва да е четно число, **1 т.** за правилно започнато, но недовършено премстване; общо **3 т.** за б), от които **2 т.** за преброяване на клетките над главния диагонал (както в предната подточка – частични кредити без акумулиране).

Задача 7.1. От град А за град Б тръгнал автобус, а осем минути по-късно след него потеглила кола. Двете превозни средства се движили с постоянни скорости, като тази на колата била с 50% по-голяма от тази на автобуса. Колата изпреварила автобуса на 24 *км* от А. Когато тя пристигнала в Б, на автобуса му оставали още 48 *км* път.

а) Определете скоростите на автобуса и колата.

б) Определете разстоянието от А до Б.

в) С каква скорост е трябвало да се движи автобусът от А до Б, за да стигне в Б едновременно с колата?

Решение: а) Понеже скоростта на колата е 1,5 пъти по-голяма от тази на автобуса, то за първите 24 *км* времето на автобуса трябва да е 1,5 пъти по-голямо от това на колата (нека последното е t минути). Понеже разликата на двете времена е $0,5t=8$ минути, то $t=16$ минути, а времето на автобуса е $1,5t=24$ минути. Така автобусът изминава 1 *км* за минута, т.е. скоростта му е 60 *км/ч*. Скоростта на колата е $1,5.60=90$ *км/ч*.

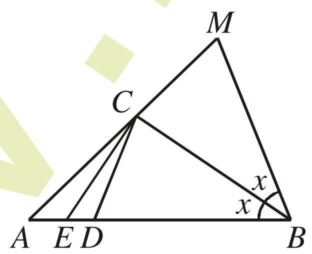
б) Нека след изпреварването колата да се е движила още h часа. За това време тя е изминала $90h$ *км*, а автобусът – $60h$ *км*. Имаме $90h-60h=48$, откъдето $h=1,6$ *ч*.

Тогава $90h = 90.1,6 = 144$ *км* и разстоянието от А до Б е $24 + 144 = 168$ *км*.

в) Понеже 24 минути са 0,4 часа, автобусът е разполагал с $0,4 + 1,6 = 2$ часа за изминаване на 168 *км*, т.е. скоростта му е трябвало да бъде $168 : 2 = 84$ *км/ч*.

Схема на оценяване: а) **2 т.**, от които **1 т.** за правилно съставяне на уравнение и **1 т.** за намиране на отговорите; б) **3 т.**, от които **1 т.** за правилно съставяне на уравнение и **2 т.** за завършване (**1 т.** , ако е намерена само втората част от пътя); в) **2 т.**, от които **1 т.** за откриване на времето за пътуване и **1 т.** за завършване на решението.

Задача 7.2. Даден е триъгълник ABC и точки E и D върху страната AB така, че $\angle ACE = \angle ECD = 12^\circ$. Да се намери $\angle ABC$, ако $\angle ECB = 90^\circ$ и $AC + CD = AB$.



Решение: Върху лъча $AC^{\rightarrow}$ построяваме точка M така, че $AM = AC + CD$. Тогава $CD = CM$ и $\angle DCB = \angle BCM = 78^\circ$. Следователно $\Delta DCB \cong \Delta MCB$ (I признак), откъдето $\angle CBD = \angle CBM = x$. От теоремата за сбора на ъглите в ΔACB намираме $\angle BAC = 180^\circ - (90^\circ + 12^\circ + x) = 78^\circ - x$. Тъй като ΔBMA е равнобедрен, за сбора на ъглите му имаме $4x + 78^\circ - x = 180^\circ$, откъдето $x = 34^\circ$ и $\angle ABC = 34^\circ$.

Схема на оценяване: **2 т.** за допълнителното построение (точка M); по **1 т.** (общо **4 т.**) за установяване, че $\angle DCB = \angle BCM = 78^\circ$, $\Delta DCB \cong \Delta MCB$, $\angle CBD = \angle CBM$ и $\angle BAC = 78^\circ - \angle ABC$; **1 т.** за завършване на решението.

Задача 7.3. Квадратна градина е разделена на 25 квадратни лехи с лица по 1 *кв. м*. Съседни наричаме лехите с обща страна. В някои от лехите са посадени цветя. Лехите, в които има цветя, остават с цветя и през следващата година. Ако някоя леха няма цветя, то на следващата година в нея поникват цветя само ако тя има поне две съседни лехи с цветя.

а) Възможно ли е в 14 поредни години лехите с цветя да са все различен брой?

б) Колко най-малко лехи трябва да се засадят, за да може след известно време във всички лехи да има цветя?

Решение:

6	5	1	13	14
1	4	5	12	13
1	3	6	11	12
1	2	7	10	11
1	1	8	9	1

а) Да. Един възможен начин е показан в таблицата, като числата показват номерата на годините, през които за пръв път се появяват цветя в съответните лехи (началното засаждане съответства на полетата с 1).

б) Ако посадим цветя в петте лехи по някой диагонал, след пет години във всички лехи ще има цветя. Ако сме посадили цветя в не повече от четири лехи, то обиколката на цветната площ е не повече от 16 *м*. При поява на цветя в нова леха тази обиколка не нараства, понеже от нея се премахват поне 2 *м* (заради съседните засадени лехи) и се добавят не повече от 2 *м* (заради съседните незасадени лехи). Ако във всички лехи имаше цветя, обиколката щеше да стане 20 *м*, така че това е невъзможно. Така търсеният минимален брой лехи е 5.

Схема на оценяване: а) **3 т.**, от които **2 т.** за показано подходящо начално засаждане и **1 т.** за обяснение защо примерът работи (само отговор "да" без аргументация не се оценява); б) **4 т.**, от които **1 т.** за деклариран верен отговор, **1 т.** за показано подходящо начално засаждане и **2 т.** за доказателство за минималност.

Задача 8.1. Пътят между хижите "Бор" и "Иглика" се състои в изкачване от хижа "Бор" до връх Скала и слизане от връх Скала до хижа "Иглика". Турист, който се движи със скорост 3 *km*/*h* при изкачване и 6 *km*/*h* при слизане, стига от "Бор" до "Иглика" за 210 минути, а се връща за 4 часа. Намерете разстоянията между хижите и върха.

Решение: Да означим с x *km* разстоянието от хижа "Бор" до връх Скала и с y *km* – разстоянието хижа "Иглика" до връх Скала. Тогава в едната посока туристът се изкачва $t_1=\frac{x}{3}$ часа и слиза $t_2=\frac{y}{6}$ часа, а в другата посока се изкачва $t_3=\frac{y}{3}$ часа и слиза $t_4=\frac{x}{6}$ часа. Тъй като 210 *min* = 3,5 *h*, от условието имаме $t_1+t_2=3{,}5$ и $t_3+t_4=4$. Така получаваме системата: $\left|\begin{array}{l}\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=3{,}5\\ \frac{x}{6}+\frac{y}{3}=4\end{array}\right.$ или $\left|\begin{array}{l}2x+y=21\\ x+2y=24\end{array}\right.$, откъдето (след като съберем и извадим левите и десните части на уравненията) $\left|\begin{array}{l}x+y=15\\ y-x=3\end{array}\right. \Rightarrow x=6,\ y=9$ (отново след събиране и изваждане на левите и десните части на уравненията).

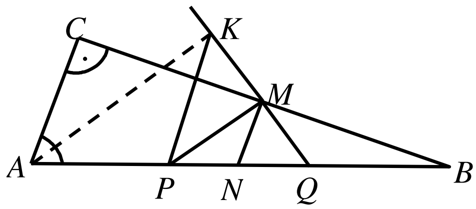
Следователно, разстоянията между хижите и върха са съответно са 6 *km* и 9 *km*.

<u>*Схема на оценяване*</u>: Общо **4 т.** за съставяне на модела и **3 т.** за решаване на системата. В рамките на тези точки се оценяват частични резултати: например **1 т.** за съображението, че на връщане изкачването става спускане, а спускането става изкачване; по **1 т.** за изразяване на времената на отиване и връщане; при липса на пълно решение на системата – **1 т.** за получаване на една или повече еквивалентни системи.

Задача 8.2. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза $AB=12$ *см* и катет $AC=4$ *см*. Точката M е средата на катета BC, а точките P и Q са разположени върху хипотенузата AB така, че $AP=PQ=QB$.

а) Да се намери $\angle PMQ$.

б) Ако ъглополовящата на $\angle BAC$ пресича лъча $QM^{\rightarrow}$ в точката K, да се намери дължината на отсечката KP.



Решение: а) Нека N е средата на PQ. Тогава $AN=AP+PN=NQ+QB=NB$, т.е. N е средата на AB и следователно MN е средна отсечка в ΔABC. Получаваме, че $MN=\frac{1}{2}AC$. Тъй като $AB=3AC$, то $PQ=AC$, откъдето $MN=\frac{1}{2}PQ$. Но MN е медиана в ΔPQM и следователно $\angle PMQ=90°$.

б) От $MN \parallel AC$ следва, че $\angle NMC=90°$ и $\angle BNM=\angle BAC$ (съответни), а от $PN=MN$ имаме, че $\angle NPM=\angle PMN$. Тогава $\angle BAC=\angle BNM=2.\angle NPM$ и тъй като AK е ъглополовяща, получаваме $\angle NPM=\angle BAK$. Следователно $AK \parallel PM$. Заключаваме, че $\angle AKQ=90^0$, т.е. ΔAQK е правоъгълен и тъй като KP е медиана в него, то $KP = \frac{1}{2} AQ = AC = 4\,см$.

Схема на оценяване: Общо **3 т.** за а) и **4 т.** за б), както следва: **1 т.** за въвеждане на средата N, **1 т.** за заключението $MN = \frac{1}{2} PQ$ и **1 т.** за завършване на а); **2 т.** за заключението $\angle BAC = 2\angle NPM$, **1 т.** за заключението $AK \parallel PM$ и **1 т.** за завършване на решението.

Задача 8.3. Да се намерят целочислените решения на уравнението $10x^2 + y^2 = 2011$.

Решение: Нека (x, y) е решение на уравнението. Тогава $(-x, y)$, $(x, -y)$ и $(-x, -y)$ също са негови решения. Затова ще предполагаме, че $x > 0$ и $y > 0$. От условието следва, че $y^2 = 2011 - 10x^2$, откъдето $2011 - 10x^2 > 0$. Следователно $x^2 < \frac{2011}{10} < 225 = 15^2$, т.е. $x \le 14$. При това условие с непосредствена проверка се установява, че уравнението има единствено положително решение $x = 7$, $y = 39$. Следователно всички целочислени решения на даденото уравнение са: $(7, 39)$, $(-7, 39)$, $(7, -39)$ и $(-7, -39)$.

Схема на оценяване: **1 т.** за съображението, че $(-x, y)$, $(x, -y)$ и $(-x, -y)$ са решения, ако (x, y) е решение на уравнението; **3 т.** за оценката $x \le 14$ или за точна оценка за y (**1 т.** за идея за оценка или за наличието на груба оценка); **2 т.** за разглеждане на всички случаи съгласно оценката (**1 т.** за частични разглеждания – поне три); **1 т.** за завършване на задачата.

Задачите са предложени, както следва:

зад. 4.1 – Светлозар Дойчев и Сава Гроздев, зад. 4.2 – Светлозар Дойчев и Сава Гроздев, зад. 4.3 – Светлозар Дойчев и Сава Гроздев

зад. 5.1 – Диана Миланова, зад. 5.2 – Диана Миланова, зад. 5.3 – Светлозар Дойчев и Сава Гроздев

зад. 6.1 – Ирина Шаркова, зад. 6.2 – Ирина Шаркова, зад. 6.3 – Ирина Шаркова

зад. 7.1 – Ивайло Кортезов, зад. 7.2 – Иван Ангелов, зад. 7.3 – Ивайло Кортезов

зад. 8.1 – Чавдар Лозанов, зад. 8.2 – Чавдар Лозанов, зад. 8.3 – Веселин Ненков

60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 12-13.03.2011 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 9.1. Да се реши уравнението $\sqrt{x-\sqrt{a}} = a-x$ в зависимост от стойностите на реалния параметър a.

Решение. Преди всичко трябва $a \geq 0$, като при $a = 0$ единственото решение е $x = 0$. Нека $a > 0$. Уравнението има смисъл при $x \geq \sqrt{a}$, като при $x > a$ то няма решение. Нека $\sqrt{a} \leq x \leq a$. Оттук следва и $a \geq \sqrt{a}$, т.е. $a \geq 1$ и при $0 < a < 1$ уравнението няма решение.

При $a \geq 1$ уравнението е равносилно с $x-\sqrt{a} = (a-x)^2$ или $x^2-(2a+1)x+a^2+\sqrt{a} = 0$. Корените на това квадратно уравнение са $x_1 = a+\sqrt{a}$ и $x_2 = a-\sqrt{a}+1$. Тъй като $a+\sqrt{a} > a$, то x_1 не е решение. Понеже $a-\sqrt{a}+1 \geq \sqrt{a}$ (това е равносилно с $(\sqrt{a}-1)^2 \geq 0$) и $a-\sqrt{a}+1 \leq a$ (това следва от $a \geq 1$), то x_2 е решение.

Окончателно, при $a < 0$ и $0 < a < 1$ уравнението няма решение, при $a = 0$ има решение $x = 0$ и при $a \geq 1$ решението е $x = a-\sqrt{a}+1$.

Инструкции за оценяване. 1 т. за случая $a = 0$; 1 т. за достигане до $x \in [\sqrt{a}, a]$ и $a \geq 1$; 2 т. за намиране на x_1 и x_2, 1 т. за отхвърляне на x_1; 1 т. за обосноваване, че x_2 е решение; 1 т. за окончателния отговор.

Задача 9.2. Да се намерят всички прости числа p, за които съществуват взаимно прости естествени числа a и b, такива, че

$$p(a^2+ab+b^2) = 1501(a+b).$$

Решение. Ако допуснем, че има просто число r, делящо $a+b$ и a^2+ab+b^2, то от $b \equiv -a \pmod{r}$ и $0 \equiv a^2+ab+b^2 \equiv a^2-a^2+a^2 = a^2 \pmod{r}$ следва, че $r|a$ и $r|b$, което противоречи на $(a,b) = 1$. Следователно $(a+b, a^2+ab+b^2) = 1$. Тогава, тъй като $a+b|p(a^2+ab+b^2)$, то $a+b|p$. Но $a+b > 1$, така че $a+b = p$ и $a^2+ab+b^2 = 1501$.

От $1501 = (a+b)^2-ab = p^2-ab$ получаваме $p^2 > 1501$ и оттук $p \geq 39$. Освен това a и b са корени на квадратното уравнение (1) $x^2-px+p^2-1501 = 0$ и трябва дискриминантата D на това уравнение да е неотрицателна. От $D = 6004-3p^2 \geq 0$ получаваме $p^2 \leq 2001$ и значи $p \leq 44$.

Понеже p е просто число, остават възможностите $p = 41$ и $p = 43$. Сега пресмятаме, че при $p = 41$ корените на (1) са 5 и 36 (взаимно прости естествени числа), а при $p = 43$ те не са цели числа. Окончателно, $p = 41$.

Инструкции за оценяване. 3 т. за обосновано получаване на $a+b = p$ и $a^2+ab+b^2 = 1501$, 3 т. за достигане да $39 \leq p \leq 44$, 1 т. за окончателния отговор.

Задача 9.3. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, в който H_a е ортоцентър на $\triangle BCD$, H_b е ортоцентър на $\triangle CDA$, H_c е ортоцентър на $\triangle DAB$ и H_d е ортоцентър на $\triangle ABC$. Да се докаже, че ако правите AC и H_aH_c са успоредни, но не съвпадат, то правите BD и H_bH_d са успоредни.

Решение. Имаме $AH_c \perp BD$ и $CH_a \perp BD$, откъдето $AH_c \| CH_a$ и следователно четириъгълникът AH_cCH_a е успоредник.

Да построим точката P така, че векторите $\overrightarrow{AH_c}$, $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{CH_a}$ са равни. Тогава $PB \| AH_c \Rightarrow \sphericalangle PBD = 90^\circ$ и $PA \| BH_c \Rightarrow \sphericalangle PAD = 90^\circ$. Оттук, точката A лежи на описаната окръжност на $\triangle PBD$. Аналогично, точката C лежи на същата описана окръжност и четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност.

Да построим точката Q, диаметрално противоположна на C в тази окръжност. По обратния път на горното разсъждение установяваме, че QAH_dB е успоредник, $QA = BH_d$, и аналогично $QA = DH_b$, откъдето $BH_d = DH_b$, фигурата BH_dH_bD също е успоредник, и $BD \| H_bH_d$, както се искаше.

Инструкции за оценяване. 1 т. за доказателство, че AH_cCH_a е успоредник; 4 т. за доказателство, че четириъгълникът $ABCD$ е вписан, 2 т. за довършване.

Задача 9.4. Да се намерят всички стойности на реалните параметри a и b, за които полиномът $f(x) = x^4 + x^3 - (a^2-1)x^2 + 2abx + a^2 - a - 6$ се дели на полинома $g(x) = x^2 - a^2$.

Решение. Лесно се вижда, че $a = 0$ не дава решение на задачата. Тъй като корените на делителя $g(x)$ са a и $-a$, при $a \neq 0$ условието е еквивалентно на $f(a) = f(-a) = 0$. Оттук получаваме системата $a^4 + a^3 - a^2(a^2-1) + 2a^2b + a^2 - a - 6 = 0$, $a^4 - a^3 - a^2(a^2-1) - 2a^2b + a^2 - a - 6 = 0$. След елиминиране на $a^3 + 2a^2b$ достигаме до квадратното уравнение $2a^2 - a - 6 = 0$ с корени $a_1 = 2$ и $a_2 = -\frac{3}{2}$. Сега от първото уравнение от горната система намираме $b = -\frac{a}{2}$, откъдето $b_1 = -1$ и $b_2 = \frac{3}{4}$. Следователно търсените стойности са $(a,b) = (2,-1)$ и $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$, като съответните разлагания са $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = (x^2-4)(x^2+x+1)$ и $x^4 + x^3 - \frac{5}{4}x^2 - \frac{9}{4}x - \frac{9}{4} = (x^2 - \frac{9}{4})(x^2+x+1)$.

Инструкции за оценяване. 1 т. за записване на системата $f(a) = f(-a) = 0$, 4 т. за получаване на уравнение за a, 2 т. за намиране на b при известно a.

Задача 9.5. Нека T е множеството от всички триъгълници ABC с радиуси r и r_a съответно на вписаната окръжност и на външновписаната окръжност срещу върха A, където r и r_a са фиксирани положителни числа. Да се докаже, че:

а) всички триъгълници в T имат една и съща дължина на височината от върха A;

б) измежду всички триъгълници в T най-малко лице има този, за който $AB = AC$.

Решение. а) Нека I и I_a са съответно центровете на вписаната и външновписаната окръжност, а $AH = h_a$ е разстоянието от A до BC, $H \in BC$. Ако $IP \perp BC$, $P \in BC$, и $I_aQ \perp BC$, $Q \in BC$, имаме $\frac{AI}{AI_a} = \frac{r}{r_a}$. Аналогично, ако $IR \perp AH$, $R \in AH$, и $I_aS \perp AH$, $S \in AH$, то $\frac{AI}{AI_a} = \frac{h_a - r}{h_a + r_a}$. Оттук се вижда, че $h_a = \frac{2rr_a}{r_a - r}$ може да бъде определено еднозначно по r и r_a, и следователно всички триъгълници от T имат равни височини през A.

б) От а) следва, че най-малко лице ще има този от триъгълниците в T, в който дължината на страната BC е минимална. Лесно се вижда, че четириъгълникът BI_aCI е вписан в окръжност k с диаметър II_a, като $II_a \geq r + r_a$ и равенство се достига, когато вписаната и външновписаната окръжност се допират. В същия случай мярката на $\sphericalangle BAC$ е максимална, а BC е хорда в k срещу ъгъл $90^\circ + \frac{1}{2} \sphericalangle BAC$.

Получихме, че лицето на $\triangle ABC$ е минимално точно тогава, когато вписаната и външновписаната окръжност се допират. Последното е възможно само тогава, когато $AB = AC$.

Инструкции за оценяване. 2 т. за а); 2 т. за въвеждане на вписания четириъгълник BI_aCI с цел оценяване на дължината на BC; 3 т. за довършване.

Задача 9.6. Една редица от естествени числа $x_1, x_2, \ldots, x_k$ се нарича n-добра, ако $x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leq n$ и $x_i - i$ се дели на 3 за всяко $i = 1, \ldots, k$. Нека a_n е броят на n-добрите редици за фиксирано естествено число n. Да се докаже, че числото $a_{n+8} - a_n$ се дели на 3.

Решение. Ако $1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ е n-добра редица, то $x_2-1, x_3-1, \ldots, x_k-1$ е $(n-1)$-добра редица. Вземайки пред вид и редицата с единствен член $x_1 = 1$ получаваме, че броят на n-добрите редици, които започват с 1, е $a_{n-1} + 1$. Ако $x_1, x_2, \ldots, x_k$ е n-добра редица с $x_1 \geq 4$, то $x_1 - 3, x_2 - 3, \ldots, x_k - 3$ е $(n-3)$-добра редица. Оттук следва, че броят на n-добрите редици, незапочващи с 1, е a_{n-3}.

Горните разсъждения показват, че $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + 1$. Пресмятаме първите няколко стойности на a_n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_n	1	2	3	5	8	12	18	27	40	59	87
$a_n \pmod 3$	1	2	0	2	2	0	0	0	1	2	0

Сега твърдението лесно следва по индукция. Базата за индукцията следва от таблицата. Нека $n \geq 4$ и $a_{k+8} \equiv a_k \pmod 3$ за всяко $k \leq n$. Тогава

$$a_{n+9} = a_{n+8} + a_{n+6} + 1 \equiv a_n + a_{n-2} + 1 = a_{n+1} \pmod 3,$$

което завършва доказателството.

Инструкции за оценяване. 4 т. за намиране на рекурентна връзка за a_n; 1 т. за пресмятане на първите членове на редицата; 2 т. за довършване на доказателството по индукция.

Задача 10.1 Да се намерят всички стойности на реалните параметри a и b, за които неравенството $2|x^2 + ax + b| > 1$ няма решения в интервала $[1, 3]$.

Решение. Да означим $f(x) = x^2 + ax + b$. Първо ще докажем, че абсцисата на върха на параболата $f(x)$ е в интервала $[1, 3]$.

Ако $-\frac{a}{2} < 1 \iff a > -2$, условието е еквивалентно на $2f(1) \geq -1$ и $2f(3) \leq 1$, откъдето получаваме $2 + 2a + 2b \geq -1$ и $18 + 6a + 2b \leq 1$. Следователно $-2a - 3 \leq 2b \leq -6a - 17$, откъдето $-2a - 3 \leq -6a - 17 \iff a \leq -\frac{7}{2}$, което противоречи на $a > -2$. Аналогично се вижда, че неравенството $-\frac{a}{2} > 3$ е невъзможно – дава $a < -6$ и $a \geq -\frac{9}{2}$.

При $-\frac{a}{2} \in [1, 3]$ условието е еквивалентно на $2f(1) \leq 1$, $2f(3) \leq 1$ и $2f(-\frac{a}{2}) \geq -1$, съответно $1 + a + b \leq \frac{1}{2}$, $9 + 3a + b \leq \frac{1}{2}$ и $b - \frac{a^2}{4} \geq -\frac{1}{2}$. От първото и третото получаваме $\frac{a^2}{4} - \frac{1}{2} \leq b \leq -a - \frac{1}{2}$ и следователно $a^2 + 4a \leq 0 \iff a \in [-4, 0]$. Аналогично от второто и третото неравенства имаме $\frac{a^2}{4} - \frac{1}{2} \leq b \leq -3a - \frac{17}{2}$ или $a^2+12a+32 \leq 0 \iff a \in [-8, -4]$. Следователно $a = -4$ е единствената възможност, а тогава за b получаваме (от кое да е от двете двойни неравенства по-горе) $b = \frac{7}{2}$.

Окончателно, $a = -4$ и $b = \frac{7}{2}$.

Инструкции за оценяване: 2 т. за отхвърляне на възможността $-\frac{a}{2} \notin [1, 3]$, 5 т. за случая $-\frac{a}{2} \in [1, 3]$, като от тях 2 т. за получаване на $a^2 + 4a \leq 0$, 2 т. за получаване на $a^2 + 12a + 32 \leq 0$ и 1 т. за намиране на b.

Задача 10.2. Виж задача 9.2.

Решение.

Инструкции за оценяване:

Задача 10.3. Виж задача 9.3.

Задача 10.4. Да се реши неравенството

$$\sqrt{1 - 3x - \sqrt{12 - 8x}} > \sqrt{-x^2 - 3x + 4}.$$

Решение. Допустимите стойности за x са всички решения на системата

$$\begin{array}{rcl} -x^2 - 3x + 4 & \geq & 0 \\ 12 - 8x & \geq & 0 \\ 1 - 3x - \sqrt{12 - 8x} & \geq & 0. \end{array}$$

Оттук получаваме $x \in [-4, -11/9]$.

Повдигаме двете страни на квадрат и получаваме

$$x^2 - 3 > \sqrt{12 - 8x}.$$

Това неравенство не е изпълнено за $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. За всички останали стойности на x повдигаме още веднъж на квадрат и достигаме до

$$x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = (x - 1)^2(x^2 + 2x - 3) > 0.$$

Тъй като $(x - 1)^2 > 0$ за всяко допустимо x, горното неравенство се свежда до $x^2 + 2x - 3 > 0$, откъдето $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.

Окончателно решения на неравенството са всички $x \in [-4, -3)$.

Инструкции за оценяване: 2 т. за определяне на дефиниционната област на x; 2 т. за достигане на неравенство от четвърта степен; 2 т. за разлагане на полинома от четвърта степен и решаване на неравенството; 1 т. за намиране на окончателните стойности на x, които са решения на задачата.

Задача 10.5. Виж задача 9.5.

Задача 10.6. Виж задача 9.6.

Автори на задачите:

Петър Бойваленков – 9.4, 10.1;

Иван Ланджев – 9.6(10.6), 10.4;

Николай Белухов – 9.3(10.3), 9.5(10.5);

Керопе Чакърян – 9.1, 9.2 (10.2).

Министерство на образованието, младежта и науката

60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 12-13.03.2011 г.
Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 11.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$3^{\cos x} + 3^{1-\cos x} = a$$

има точно едно решение в интервала $[0, \pi]$.

Решение. След полагане $t = 3^{\cos x}$, получаваме уравнението $t^2 - at + 3 = 0$. За да има уравнението от условието точно едно решение в интервала $[0, \pi]$, уравнението $f(t) = t^2 - at + 3 = 0$ трябва да има единствено решение в интервала $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$.

Когато $D = a^2 - 12 = 0$, получаваме $a = \pm 2\sqrt{3}$ и тогава двата корена са съответно $\pm\sqrt{3}$. Тъй като само $\sqrt{3} \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$, то $a = 2\sqrt{3}$ е решение на задачата.

Ако $t = \frac{1}{3}$ е решение, то $a = \frac{28}{3}$ и тогава другият корен е $t = 9 \notin \left[\frac{1}{3}, 3\right]$. Това означава, че $a = \frac{28}{3}$ е решение на задачата.

Ако $t = 3$ е решение, то $a = 4$ и тогава другият корен е $t = 1 \in \left[\frac{1}{3}, 3\right]$. Това означава, че $a = 4$ не е решение на задачата.

Когато решението е в $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ трябва да имаме $f\left(\frac{1}{3}\right) f(3) < 0$ което дава $a \in \left(4, \frac{28}{3}\right)$.

Окончателно решението е $a \in \{2\sqrt{3}\} \cup \left(4, \frac{28}{3}\right]$.

Оценяване. За полагане и свеждане до уравнение за t – 2 т.; за $D = 0$ – 1 т.; за двата случая $t = \frac{1}{3}$ и $t = 3$ – по 1 т.; за случая $t \in \left(\frac{1}{3}, 3\right)$ – 2т.

Задача 11.2. Точките O и I са съответно център на описаната и вписаната окръжност за триъгълник ABC. Ъглополовящата на ъгъл ACB пресича описаната около триъгълника окръжност в точка D. Ако $OI = r$ и $ID = 2r$, където r е радиусът на вписаната окръжност, да се намери $\sin \sphericalangle ACB$.

Решение. Тъй като $DI = DA$ (следва от $\sphericalangle DIA = \sphericalangle DAI = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$), то от синусовата теорема получаваме $r = R\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

От $r^2 = OI^2 = R^2 - 2Rr$ след заместване $r = R\sin\frac{\gamma}{2}$, намираме

$$\sin^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\gamma}{2} - 1 = 0.$$

Оттук последователно намираме $\sin\dfrac{\gamma}{2} = \sqrt{2}-1$, $\cos\dfrac{\gamma}{2} = \sqrt{1-(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$ и

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \left(2(\sqrt{2}-1)\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Оценяване. За $r = R\sin\dfrac{\gamma}{2}$ – 2 т.; за използване на $r^2 = OI^2 = R^2 - 2Rr$ – 2 т.; за получаване на уравнение за $\sin\frac{\gamma}{2}$ – 1 т.; за пресмятане на $\sin \sphericalangle ACB$ – 2т.

Задача 11.3. Дадени са естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. Да се докаже, че твърдението:

За всяко естествено число n произведението $\dbinom{n}{a_1}\dbinom{n}{a_2}\ldots\dbinom{n}{a_{2011}}$ се дели на n, е вярно тогава и само тогава, когато най-големия общ делител на числата $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ е равен на 1.

Решение. Нека $(a_1, a_2, \ldots a_{2011}) = 1$ и $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_t^{\alpha_t}$. Ясно е, че за всяко i съществува a_s, което не се дели на p_i. Тогава $\dbinom{n}{a_s} = \dfrac{n}{a_s}\dbinom{n-1}{a_s-1}$ се дели на $p_i^{\alpha_i}$, т.е. n дели произведението от условието.

Обратно, да допуснем, че съществува просто число p, което дели всяко от числата $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. Ще покажем, че съществува естествено число n, за което p дели n, но p не дели $\binom{n}{a_i}$ за всяко i. Да разгледаме числата от вида $n = p^k - p$ и да разгледаме например $\dbinom{n}{a_1}$. Нека $a_1 = pa$. Имаме

$$\binom{n}{a_1} = \binom{p^k-p}{pa} = \frac{(p^k-p)(p^k-p-1)\ldots(p^k-p-pa+1)}{pa(pa-1)(pa-2)\ldots(pa-(pa-1))}.$$

Тъй като k може да бъде избрано произволно голямо, то най-високата степен на p, която дели числителя, е равна на най-високата степен на p, която дели произведението

$$p(p+1)(p+2)\ldots(p+pa-1).$$

Отделяме множителите, които се делят на p, и получаваме

$$p(p+p)(p+2p)\dots(p+(a-1)p) = p^a 1.2.3\dots a.$$

В знаменателя също отделяме множителите, които се делят на p и получаваме

$$pa(pa-p)(pa-2p)\dots(pa-(a-1)p) = p^a a(a-1)(a-2)\dots 1.$$

Оттук следва, че $\binom{n}{a_1}$ не се дели на p. Аналогично доказваме, че за всяко i числото $\binom{n}{a_i}$ не се дели на p, което означава, че разглежданото произведение не се дели на n.

Оценяване. За случая $(a_1, a_2, \dots a_{2011}) = 1$ – 3 т.; за обратната посока – 4 т.

Задача 11.4. Колко най-малко три елементни подмножества на множеството $A = \{1, 2, \dots, 8\}$ трябва да се изберат така, че всеки два елемента на A да са едновременно елементи на поне едно от избраните множества?

Решение. Всяка от седемте двойки $(1, 2), (1, 3), \dots, (1, 8)$ трябва да се среща в някое от избраните множества. Тъй като в едно три елементно множество се срещат най-много две от тези двойки, следва, че числото 1 се среща в поне 4 множества. Това е вярно за всяко от останалите числа. Тогава общо във всички множества трябва да има поне $8.4 = 32$ елемента. Това означава, че са ни необходими поне $\left\lceil \frac{32}{3} \right\rceil = 11$ множества.

Тъй като дадените 11 множества имат исканото свойство, то отговорът е 11.

$$\{1,2,3\}, \{1,4,5\}, \{1,6,7\}, \{1,2,8\}, \{2,4,6\}, \{2,5,7\}, \{2,3,8\}, \{3,4,7\}, \{3,5,6\}, \{4,5,8\}, \{6,7,8\}.$$

Оценяване. За оценката, че са необходими поне 11 множества – 4 т.; за пример, че 11 множества са достатъчни – 3 т.

Задача 11.5. Да се намерят всички функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такива, че за произволни x, y, z, е изпълнено неравенството

$$(f(x) + f(y) - 2f(xy)).(f(x) + f(z) - 2f(xz)) \geq 0.$$

Решение. (1 т.) При $y = 0$ и $z = 1$ следва, че $(f(x) - f(0)).(f(x) - f(1)) \leq 0$, т.е. $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ или $f(1) \leq f(x) \leq f(0)$ за всяко x.

(4 т.) Да предположим, че f не е константа. Ако $f(0) \leq f(x) < f(1)$ или $f(1) < f(x) \leq f(0)$ за някое $x \neq 0$, то при $y = 1/x$ и $z = 1$ следва, че $f(1) + f(1) > f(a) + f(1/a) \geq 2f(1)$ или $f(1) + f(1) < f(a) + f(1/a) \leq 2f(1)$ което е противоречие. Значи $f(x) = f(1)$ при $x \neq 0$.

(2 т.) Проверка показва, че всяка такава функция изпълнява даденото неравенство.

Задача 11.6. Дадено е естествено число a. Да се докаже, че множеството от простите делители на редицата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, за която $x_n = n^{2^{2011}} - a^2$, е безкрайно.

Решение. Нека $p = 4k + 3$ е произволно просто число. Ще докажем, че съществува член на редицата, който се дели на p. Да разгледаме числата $1^{2^m}, 2^{2^m}, \ldots, p^{2^m}$. Ще докажем с индукция по m, че това са точно квадратичните остатъци всеки броен по два пъти.

При $m = 1$ всичко е ясно. Нека твърдението е вярно за някое m и нека $1 \leq i < j \leq p$ са произволни. Имаме, че $i^{2^{m+1}} - j^{2^{m+1}} = (i^{2^m} - j^{2^m})(i^{2^m} + j^{2^m})$ Ясно е, че p не дели $i^{2^m} + j^{2^m}$, съгласно добре известния факт, че ако просто число $p = 4k + 3$ дели $x^2 + y^2$, то p дели x и y. Следователно p дели $i^{2^{m+1}} - j^{2^{m+1}}$ тогава и само тогава, когато p дели $i^{2^m} - j^{2^m}$. Понеже съгласно индукционната хипотеза $1^{2^m}, 2^{2^m}, \ldots, p^{2^m}$ са квадратичните остатъци, то лесно се вижда, че $1^{2^{m+1}}, 2^{2^{m+1}}, \ldots, p^{2^{m+1}}$, които също са квадрати, всъщност е пермутация на същите остатъци, т.е. доказахме твърдението за $m + 1$. Това означава (прилагаме доказаното за $m = 2011$), че произволни просто число от вида $4k + 3$ дели член на редицата.

Оценяване. За формулиране на основното твърдение (Да разгледаме $1^{2^m}, 2^{2^m}, \ldots, p^{2^m}$. Ще докажем с индукция по m, че това са точно квадратичните остатъци всеки броен по два пъти.), без доказателство – 3 т.; за разглеждане на квадратични остатъци, без придвижване към решение – 1 т.

За други подходи – според доказаното.

Задачите са предложени от: 11.1, 11.2, 11.4 – Емил Колев; 11.3, 11.6 – Александър Иванов; 11.5 – Николай Николов

Задача 12.1. Допирателните към точки A и B от графиката на функцията $y = x^2$ се пресичат в точка C така, че $\triangle ABC$ е равностранен. Да се намери дължината на отсечката AB.

Решение. (2 т.) Ако $A = (a, a^2)$ и $B = (b, b^2)$, то съответните допирателни са $y - a^2 = 2a(x - a)$ и $y - b^2 = 2b(x - b)$ (понеже $(x^2)' = 2x$). Тогава за $C = (c_1, c_2)$ имаме, че $2c_1 - a^2 = 2bc_1 - b^2$, откъдето $c_1 = \frac{a+b}{2}$ и $c_2 = ab$. (2 т.) Сега от

$$(a - \frac{a+b}{2})^2 + (a^2 - ab)^2 = AC^2 = BC^2 = (b - \frac{a+b}{2})^2 + (b^2 - ab)^2$$

следва, че $|a^2 - ab| = |b^2 - ab|$. Ако $a^2 - ab = ab - b^2$, то $(a - b)^2 = 0$ – противоречие. Значи $a^2 - ab = b^2 - ab$, т.е. $a = -b$. (3 т.) Можем да считаме, че $a > 0$ и тогава $\sphericalangle ACB = 60^\circ$ точно когато ъгълът между допирателната през A и Ox е 60° (защото $AB || Ox$ и $AC = BC$). Оттук $AB = 2a = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

Задача 12.2. Точките O и I са съответно център на описаната и вписаната окръжност за триъгълник ABC. Ъглополовящата на ъгъл ACB пресича описаната около триъгълника окръжност в точка D. Ако r е радиусът на вписаната окръжност, $OI = r$ и $ID = 2r$, да се намери $\sin \sphericalangle ACB$.

Виж зад. 11.2.

Задача 12.3. Дадени са естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. Да се докаже, че твърдението:

За всяко естествено число n произведението $\binom{n}{a_1}\binom{n}{a_2}\ldots\binom{n}{a_{2011}}$ се дели на n, е вярно тогава и само тогава, когато най-големия общ делител на числата $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ е равен на 1.

Виж зад. 11.3.

Задача 12.4. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност, $\sphericalangle BAC < 90^\circ$, $\sphericalangle ABC \neq 90^\circ$ и точка M е среда на AC. Да се докаже, че $\sphericalangle BMD = 2 \sphericalangle BAD$ тогава и само тогава, когато е изпълнено равенството $AB.CD = AD.BC$.

Решение. Нека $\sphericalangle BAC = \alpha$ и O е центърът на окръжността. От $\sphericalangle ABC \neq 90^\circ$ следва, че $O \neq M$ и без ограничение приемаме, че O е във вътрешността на $\triangle ABC$. Ако $\sphericalangle BMD = 2\alpha$, то от $\sphericalangle BOD = 2\alpha$ следва, че точките M, O, B и D лежат на една окръжност. Тогава

$$\sphericalangle OMB = \sphericalangle ODB = 90^\circ - \alpha$$

и следователно $\sphericalangle BMC = \sphericalangle OMC - \sphericalangle OMB = 90^\circ - \sphericalangle OMB = \alpha$. Сега от подобието $\triangle MCB \sim \triangle ADB$ намираме $\dfrac{MC}{CB} = \dfrac{AD}{DB}$. Тъй като $MC = \dfrac{1}{2}AC$, последното е еквивалентно на $AC.BD = 2AD.BC$. От теоремата на Птолемей имаме $AC.BD = AD.BC + AB.CD$, откъдето следва $AB.CD = AD.BC$.

Обратно, ако $AB.CD = AD.BC$, то $AC.BD = 2AD.BC$, откъдето $\triangle MCB \sim \triangle ADB$ и $AC.BD = 2AB.CD$, откъдето следва $\triangle AMB \sim \triangle DCB$. От горните подобия следва, че $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMD = \sphericalangle BCD = 180^\circ - \alpha$, т.е. $\sphericalangle BMC = \sphericalangle DMC = \alpha$, откъдето $\sphericalangle BMD = 2\alpha$.

Оценяване. За правата посока – 4 т.(за доказване, че M, O, B и D лежат на една окръжност – 1 т.; за $\sphericalangle BMC = \sphericalangle DMC = \alpha$ – 1 т.; за подобието на триъгълниците $\triangle MCB \sim \triangle ADB$ – 1 т.; за използване на Птоломей – 1 т.); За обратната посока – 3 т. (за използване на Птоломей за доказване на $\triangle MCB \sim \triangle ADB$ и $\triangle AMB \sim \triangle DCB$ – 2 т.; за довършване – 1 т.)

Задача 12.5. Дадени са естествени числа n и k, за които $n \geq 3$ и $1 \leq k \leq n - 2$. В група от n човека има точно k двойки хора, които се познават. Да се докаже, че от тази група могат да се изберат $n-k+1$ човека, двама от които се познават, като всеки от двамата познати не познава никой от останалите $n-k-1$ от избраните.

Решение. Ще докажем задачата с индукция по $n \geq 3$. При $n = 3$ имаме $k = 1$ и твърдението е вярно, тъй като цялата група има исканото свойство.

Да допуснем, че твърдението е вярно за група от $n-1$ човека.

Ще го докажем за група от n човека.

Ако $k = 1$, цялата група от n човека е търсената. Нека $k > 1$.

Да допуснем, че има човек A, който познава само един от останалите. Групата, получена след премахване на A е от $n-1$ човека и познанствата са $k-1$ и твърдението следва от индукционната допускане.

Тъй като $2n > 2(n-2) \geq 2k$, то не е възможно всеки да има поне двама познати. Следователно има човек A без познати. Ако $k = n-2$, то A заедно с двама, които се познават дава търсената група. Ако k не е $n-2$, махаме A и получаваме задачата за $n-1$ човека и k познати. Според индукционното допускане съществува група от $n-1-k+1 = n-k$ човека с исканото свойство. Остава да добавим A към тази група.

Оценяване. За частни случаи, като $k = 1$ или $k = n-2$ – 1 т.; за опити за индукция – 1 т.; за междинни резултати при използване на индукция – максимум 4 т. (в този случай предните точки не се добавят).

Задача 12.6. Нека $\mathbb{R}^+$ е множествотото на положителните реални числа. Да се докаже, че за всяка неконстанта функция $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ съществуват числа x, y и $z > 0$, за които е изпълнено неравенството

$$(f(x) + f(y) - 2f(xy)).(f(x) + f(z) - 2f(xz)) < 0.$$

Решение. Да допуснем противното. Тогава са възможни два случая.

1. (2 т.) $f(x) + f(y) \geq 2f(xy)$ за произволни $x, y > 0$. При $y = 1$ следва, че $f(x) \leq f(1)$ за всяко $x > 0$. Тогава $2f(1) \geq f(x) + f(1/x) \geq 2f(1)$ и значи $f(x) = f(1)$ за всяко $x > 0$.

2. (3 т.) Съществува $x > 0$ такова, че (1) $f(x) + f(y) \leq 2f(xy)$ за всяко $y > 0$. При $y = 1$ следва, че $f(x) \geq f(1)$. Нека $m = \inf_{\mathbb{R}^+} f$ и $(a_n) \subset \mathbb{R}^+$ така, че $f(a_n) \to m$. При $y_n = a_n/x$ имаме, че $2m \leq f(x) + f(y_n) \leq f(xy_n) \to 2m$ и значи $f(x) = m = f(1)$ за всяко $x > 0$, за което (1) е в сила.

(2 т.) Ако този случай съществува $x > 0$ такова, че (2) $f(x) + f(y) \geq 2f(xy)$ за всяко $y > 0$, то при $y = 1$ следва, че $m = f(1) \geq f(x) \geq m$ и значи $f(x) = f(1)$ за всяко $x > 0$, за което (2) е в сила.

И в двата случая получихме, че f е константа – противоречие.

Забележка. Не ни е известно дали твърдението е вярно за $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Задачите са предложени от: 12.1, 12.6 – Николай Николов; 12.2 – Емил Колев; 12.3, 12.4, 12.5 – Александър Иванов