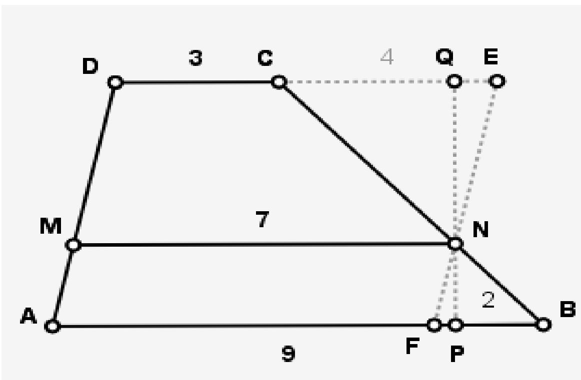
Зад. 1 Определяме Д.С. $x \neq -7; -4; -2$. Като приведем под общ знаменател получаваме $\frac{13x^2+56}{(x+2)(x+4)(x+7)} < 0$. Решения са $x < -7$ или $-4 < x < -2$.

Зад. 2 За краткост означаваме $2010 = 6n$. По условие $\frac{S_{3n}}{S_{6n}-S_{3n}} = \frac{1}{3}$ или $4S_{3n} = S_{6n}$. От $4\frac{2a_1+(3n-1)d}{2}3n = \frac{2a_1+(6n-1)d}{2}6n$ намираме $2a_1 = d$. Общият член на редицата е $a_k = a_1 + (k-1)d = a_1(2k-1)$, а сумата на първите и m члена е $S_m = \frac{a_1+a_m}{2}m =$ $= \frac{a_1+a_1(2m-1)}{2}m = a_1m^2$. Пресмятаме $\frac{S_{2n}}{S_{6n}-S_{4n}} = \frac{a_1.4n^2}{a_1.36n^2 - a_1 16n^2} = \frac{1}{5}$.



Зад.3 През N построяваме $EF \parallel AD$, $E \in CD, F \in AB$. От подобието $\Delta CNE \sim \Delta BNF$ намираме $\frac{QN}{NP} = \frac{CE}{FB} = 2$.

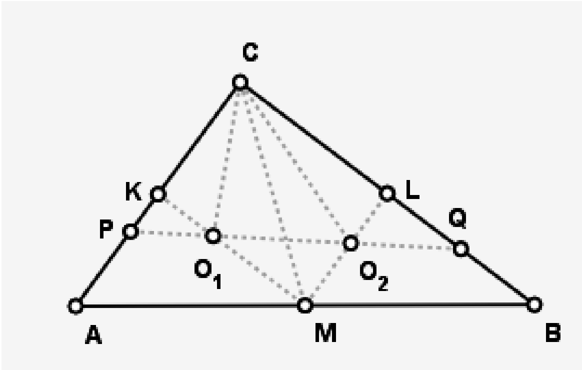
Тогава $\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{(AB+NM)}{(NM+CD)}\frac{NP}{NQ} = \frac{16}{10}\frac{2}{4} = \frac{4}{5}$.

Зад .4 От първото уравнение разбираме, че $xy \geq 0$. Вижда се, че ако $(x; y)$ е решение на системата, то решение е и $(-x; -y)$. Ще търсим само положителните решения. Повдигаме второто уравнение на квадрат и получаваме $x^2 + y^2 + 2xy = 5/16$ или $(x^2+y^2)^2 + (x^2+y^2) - 5/16 = 0$, от където $x^2 + y^2 = 1/4$ и $xy = 1/32$. От $x + y = \sqrt{5}/4$ и $xy = 1/32$, знаем че *x, y* са корени на $t^2 - \frac{\sqrt{5}}{4}t + \frac{1}{32} = 0$. Намираме $(x; y) = \left(\frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{3}}{8}; \frac{\sqrt{5}\mp\sqrt{3}}{8}\right)$. Добавяме и отрицателните решения.

Зад. 5 Записваме уравнението във вида $2\sin^2 x + \sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x) = \cos x$ или $(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) = -(\sin x - \cos x)$. Получаваме $\sin x - \cos x = 0$ с решения $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (k – цяло) или $\sin x + \cos x = -1$, $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ с решения $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ и $x = \pi + 2n\pi$ (*m, n* – цели).

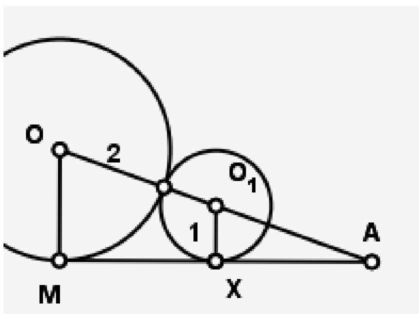
Зад. 6 Д.С. $x \leq 0$ или $x \geq 1$. При $x \leq -2$ няма решения. За x от Д.С. и $x > -2$ повдигаме на квадрат $x^2 - x < (x+2)^2(x-3)^2 = (x^2-x-6)^2$. Полагаме $u = x^2 - x - 6$. Получаваме $u^2 - u - 6 > 0$ или $(u-3)(u+2) > 0$. Ако $u < -2$, $x^2 - x - 4 < 0$, което е изпълнено при $\frac{1-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$. При $u > 3$, $x^2 - x - 9 > 0$, $x < \frac{1-\sqrt{37}}{2}$ или $x > \frac{1+\sqrt{37}}{2}$. Отчитаме x от Д.С. и $x > -2$ и намираме $x \in \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, 0\right] \cup \left[1, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{37}}{2}, \infty\right)$.

Зад. 7 Д.С. $x + b > 0, x + b \neq 1, 4x + b^2 > 0$. Получаваме $4x + b^2 = (x+b)^2$ или $x(x + 2b - 4) = 0$. $x = 0$ е решение при $b > 0$ и $b \neq 1$, а $x = 4 - 2b$ – при $b < 4$ и $b \neq 3$. При $b = 2$ двете решения съвпадат. Уравнението има единствено решение за $b \leq 0$, $b = 1$, $b = 2$, $b = 3$ или $b \geq 4$.



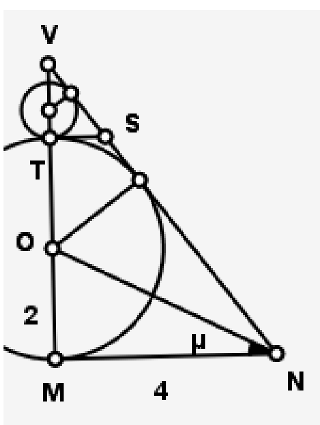
Зад.8 Нека O_1 и O_2 са центровете на вписаните в ΔAMC и ΔBMC окръжности. Означаваме пресечните точки на O_1O_2 с AC и BC с P и Q. От подобията $\Delta O_1KP \sim \Delta O_1MO_2 \sim \Delta O_2LQ$ имаме $\frac{S_{O_1KP}}{S_{O_1MO_2}} = \left(\frac{O_1K}{O_1M}\right)^2 = \left(\frac{CK}{CM}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}$ и аналогично $\frac{S_{O_1KP}}{S_{O_1MO_2}} = \frac{a^2}{c^2}$. Разбираме, че $\frac{S_{O_1KP}+S_{O_2LQ}}{S_{O_1MO_2}} = \frac{a^2+b^2}{c^2}$, т.е. $S_{O_1KP}+S_{O_2LQ} = S_{O_1MO_2}$.

Понеже $S_{PQC} = S_{CMLK} + S_{O_1KP} + S_{O_2LQ} - S_{O_1MO_2}$ установяваме, че $S_{PQC} = S_{CMLK} = \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{24}{2}$. $=12$



Зад. 9 Втората сфера се допира до основата $ABCD$ и до ABV, следва че центърът и O_1 лежи в ъглополовящната им равнина – ABO (O е центърът на вписаната сфера). Аналогично O_1 лежи и в равнината ADO, т.е. O_1 е на правата AO. Двете сфери се допират по централата. Ясно е, че $AO = 2O_1O_2 = 6$ (O_1X е средна отсечка). От тук $AM = \sqrt{AO^2 - OM^2} = 4\sqrt{2}$ и $AB = 8$.

Нека N е средата на AD. O лежи на ъглополовящата NO. Означаваме $\angle MNO = \mu$. Имаме $\operatorname{tg}\mu = \frac{OM}{MN} = \frac{1}{2}$.



Пресмятаме $\operatorname{tg} 2\mu = \frac{2\operatorname{tg}\mu}{1-\operatorname{tg}^2\mu} = \frac{4}{3}$. Височината $VM = MN \operatorname{tg} 2\mu = \frac{16}{3}$.

Както по-горе се доказва, че центърът на третата сфера лежи на VM. През T построяваме $TS \parallel MN$. От $\Delta VTS \sim \Delta VMN$ имаме $\frac{r_2}{r} = \frac{VT}{VM} = \frac{16/3-4}{16/3} = \frac{1}{4}$ или $r_2 = \frac{1}{2}$.

Зад. 10 Лесно се съобразява, че $2 < x < 3$. Тогава $\frac{2011}{x} - \frac{2009}{x} = \frac{2}{x} < 1$ или $\left\lfloor \frac{2011}{x} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{2009}{x} \right\rfloor + 1$. Нека $\left\lfloor \frac{2011}{x} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2009}{x} \right\rfloor + 1 = n+1$. Ако $\left\lfloor \frac{2010}{x} \right\rfloor = n$ получаваме $3n+1 = 2010$, а ако тя е $n+1$ имаме $3n+2 = 2010$. И двете са невъзможни (2010=3.670). Разбираме, че $\left\lfloor \frac{2009}{x} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2011}{x} \right\rfloor = 670$ или $670x \ge 2009$ и $671x < 2011$. Решения са $x \in \left(\frac{2011}{671}; \frac{2009}{670}\right]$.