

## Вариант от украинска олимпиада по математика

**Задача 1.** Решете уравнението  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cdot \cos 2x$ .

**Задача 2.** Хипотенузата  $AB$  на правоъгълния триъгълник  $ABC$  е хорда в окръжност с радиус  $10$ . Върхът  $C$  на триъгълника лежи на диаметъра на окръжността, който е успореден на хипотенузата. Ъгълът  $CAB$  е равен на  $75^\circ$ . Пресметнете лицето на триъгълника  $ABC$ .

**Задача 3.** Намарете всички стойности на параметъра  $a$ , за които неравенството

$$x^2 - (3a - 5)x - a + \frac{5}{4} \leq 0$$

има точно две цели решения, като и двете са отрицателни.

**Задача 4.** Околният ръб на правилна пирамида е  $a$ . Докажете, че обемът на пирамидата не надминава  $\frac{2}{3}a^3$ . Може ли обемът да е равен на  $\frac{2}{3}a^3$ ?

**Задача 5.** Може ли от членовете на редицата  $1, 5, 5^2, \dots, 5^n, \dots$  да изберем няколко два по два различни члена, така че те да образуват геометрична прогресия, сумата на която е равна на  $10^{12}$ ?